Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. Випуск 10. – 2001

МАЛАЯ ОСЦИЛЛЯТОРНАЯ ДЛИНА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

А.Д.Базавов, Г.Ф.Филиппов

Институт теоретической физики НАН Украины им. Н.Н.Боголюбова,
Метрологическая 14б, Киев, 03143

На примере гауссовского потенциала изучено применение представления гармонического осциллятора при малом значении осцилляторной длины r_0. Показано, что в этом случае схема расчета сдвига фазы и волновой функции системы значительно упрощается.

Введение

Известно, что при решении ядерных задач в рамках алгебраической версии метода резонирующих групп (АВМРГ) результат не должен зависеть от осцилляторной длины r_0 [1]. Выбор r_0 определяется, как минимум, двумя требованиями: 1) обеспечить самую быструю сходимость в той области, где еще несправедлива асимптотика волновой функции, 2) упростить вычисление матричных элементов оператора потенциальной энергии.

Ранее [2] нами было показано, что в случае медленно убывающих потенциалов – кулоновского и обратно пропорционального кубу гиперрадиуса (эффективного потенциала метода гиперсферических функци й) – матрица потенциальной энергии при больших значениях числа осцилляторных квантов становится эквивалентна диагональной матрице. Тогда система алгебраических уравнений сводится к трехчленным рекуррентным соотношениям, связывающим коэффициенты разложения при конечных значениях числа квантов с асимптотическими коэффициентами. Здесь обсуждается вопрос о том, как можно добиться аналогичных упрощений для короткодействующих потенциалов. В качестве примера выбрана частица в поле гауссовского потенциала.

Свойства базисных функций и матричных элементов

Для нахождения собственной функции

$$\Psi_{Elm}(r,\theta,\phi) = R_l(r) Y_{lm}(\theta,\phi) \quad (1)$$

гамильтониана частицы $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$ со сферически симметричным потенциалом $U(r)$ в состоянии с энергией E, орбитальным моментом l и его проекцией m радиальную часть волновой функции представим в виде разложения

$$R_{El}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nl}^{E} R_{nl}(r). \quad (2)$$

$R_{nl}(r)$ – радиальные базисные функции гармонического осциллятора. Тогда уравнение Шредингера для волновой функции в координатном представлении сводится к системе бесконечного числа алгебраических уравнений для коэффициентов C_{nl}^{E}.

Радиальные базисные функции гармонического осциллятора, как известно, выражаются через полиномы Лагерра. Их замечательным свойством является то, что при умножении на $r^{3/2}$ они принимают δ-образный вид в окрестности точки поворота, что обеспечивает простую связь между коэффициентами $C_{nl}^{\prime E}$ и радиальной частью волновой функции $R_{E,l}(r)$ в точках $r_i = r_0\sqrt{4n+2l+3}$:

$$C^E_{nl} \cong R_{E,l}(r_0\sqrt{4n+2l+3})\sqrt{2r_0}\,(4n+2l+3)^{1/4} \quad (3)$$

Другим следствием этого же свойства является то, что сумма матричных элементов потенциала вдоль строки свертывается в достаточно простое выражение:

$$\sum_{\tilde{n}}^{\infty}\langle nl|U(r)|\tilde{n}l\rangle C^E_{\tilde{n}l} = U(r_0\sqrt{4n+2l+3})C^E_{nl}. \quad (4)$$

Соотношение (4) выполняется при достаточно больших значениях n. Матрица оператора кинетической энергии является трехдиагональной. Поэтому система превращается в трехчленные рекуррентные соотношения, связывающие ближайшие значения коэффициентов C^E_{nl}. Выполнение предельного перехода $n \to \infty$ превращает эти соотношения в дифференциальные уравнения, решения которых дают нам асимптотику коэффициентов как функцию n. Здесь наблюдается полная аналогия с координатным представлением: решение является линейной комбинацией регулярного (функция Бесселя) и нерегулярного (функция Неймана) решений, а ее коэффициентом является тангенс сдвига фазы.

Методы решения системы алгебраических уравнений в осцилляторном представлении

Все изложенные выше свойства позволяют сформулировать алгоритм замыкания и решения системы бесконечного числа алгебраических уравнений, о которой говорилось выше. А именно: 1) Выбрать достаточно большое значение $n = N$, при котором справедлива асимптотика и вычислить коэффициенты $C^E_{N,l}$ и $C^E_{N+1,l}$. (Отметим, что они выражаются через тангенс сдвига фазы, который на этом этапе нам еще неизвестен). 2) С помощью трехчленных рекуррентных соотношений, содержащих потенциал, имеющий вид правой части соотношения (4), "спуститься" до такого значения $n = n_0$, при котором это соотношение уже перестает выполняться с достаточной точностью. 3) Решить систему алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются первые $n_0 + 1$ коэффициентов и тангенс сдвига фазы.

Решение при малых значениях осцилляторной длины

Рассмотренный нами пример короткодействующего потенциала (потенциала Гаусса) показал, что когда значение r_0 меньше характерной длины взаимодействия в системе (в данном случае, радиуса потенциала Гаусса) соотношение (4) становится справедливым сразу, уже для $n = 0$. Это позволяет избежать решения системы алгебраических уравнений. Фактически, "спуск" с асимптотических значений коэффициентов C^E_{nl} осуществляется до самого первого уравнения, которое связывает значения двух первых коэффициентов и тангенс сдвига фазы. Вопрос заключается лишь в том, при каких r_0 такой подход становится справедливым. Расчеты показали, что, когда осцилляторная длина примерно в десять раз меньше радиуса потенциала, соотношение (4) выполняется для $n = 0$ с погрешностью менее одного процента (!), а фаза, подсчитанная таким простым способом, совпадает с результатами других расчетов.

Заключение

Когда осцилляторная длина меньше радиуса потенциала, матрица потенциальной энергии становится эквивалентна диагональной матрице, в результате чего алгоритм решения системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения волновой функции по базису гармонического осциллятора сводится к тривиальной рекуррентной процедуре. Фазы рассеяния, вычисленные на основе этого алгоритма и стандартного для базиса гармонического осциллятора подхода не отличаются. Этим подтверждается предположение [1] о независимости имеющих физический смысл результатов расчета от осцилляторной длины.

Литература

1. Мошинский М. *Гармонический осциллятор в современной физике от атомов до кварков.* (М.: Мир, 1980).
2. Филиппов Г.Ф., Базавов А.Д., Като К., Кореннов С.В. *ЯФ.* **60.** 4 с.635 (1997)

SMALL OSCILLATOR LENGTH USED IN HARMONIC OSCILLATOR REPRESENTATION

A.D.Bazavov, G.F.Filippov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Ukr. Nat. Acad. Sci., Metrolohichna St.14b, Kyiv, 03143

The use of harmonic oscillator representation with small oscillator length r_0 is studied with the example of Gauss potential. It is shown that phase shift calculation algorithm and building of the wave function of the system under consideration can be considerably simplified.