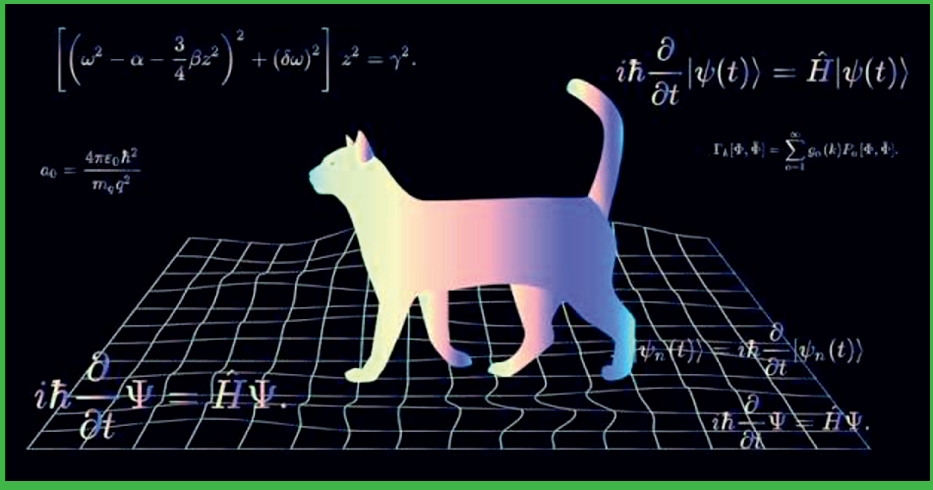
**КОРЧЕНКО О.Г., СУСЛІКОВ Л.М.,
МАТВІЇВ Ю.Ю., РІЗАК В.М.**

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КВАНТОВОЇ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Ужгород - 2026

КОРЧЕНКО О.Г., СУСЛІКОВ Л.М., МАТВІЇВ Ю.Ю., РІЗАК В.М.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КВАНТОВОЇ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальний посібник

Ужгород - 2026

УДК 621.391

Ф50

Корченко О.Г., Сусліков Л.М., Матвіїв Ю.Ю., Різак В.М. Фізичні основи квантової передачі інформації: навчальний посібник. Ужгород, 2026. 594 с.

У навчальному посібнику викладено фізичні основи квантової передачі інформації та сучасні принципи функціонування квантових комунікаційних систем. Розглянуто базові поняття квантової механіки, необхідні для опису квантової інформації, включаючи квантові стани, матрицю густини, квантову заплутаність, декогеренцію та квантові вимірювання. Значну увагу приділено квантовим каналам зв'язку, квантовій телепортації, квантовій криптографії, квантовим мережам, квантовим повторювачам і концепції квантового інтернету.

Рецензенти:

Гомонай Г.М., директор Інституту електронної фізики НАН України, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Іванченко Є.В., директор Навчально-наукового інституту кібербезпеки та захисту інформації Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій, доктор технічних наук, професор

Маркевич П.В., начальник Управління Держспецзв'язку в Закарпатській області

Рекомендовано до друку:

Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

(протокол № 12 від 25.09.2026 р.);

Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «УжНУ»

(протокол № 7 від 21.09.2026 р.)

ISBN

© Корченко О.Г., Сусліков Л.М., Матвіїв Ю.Ю., Різак В.М., 2026

ЗМІСТ

ВСТУП 8

РОЗДІЛ 1. КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ПРИРОДА ФОТОНА 11

1.1. Канонічне квантування вільного електромагнітного поля 11

1.2. Квантові характеристики та статистичні властивості фотонів 21

1.3. Вакуумні флуктуації та квантові стани як інфоносії 35

1.4. Способи кодування квантової інформації на фотоні 40

1.5. Фотони у системах квантової передачі інформації 45

РОЗДІЛ 2. ФІЗИКА КУБІТА ТА МОДЕЛЮВАННЯ ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМ 51

2.1. Дворівнева система як фундаментальна модель обробки даних 51

2.2. Геометричне представлення станів та сфера Блоха 57

2.3. Кубіт як носій квантової інформації 64

2.4. Базиси вимірювання та принцип взаємно-незміщених базисів 70

2.5. Апаратні реалізації кубітів та принципи керування ними 75

2.6. Динаміка станів кубіта під впливом зовнішніх полів 88

РОЗДІЛ 3. КВАНТОВА ЗАПЛУТАНІСТЬ ЯК ФІЗИЧНИЙ РЕСУРС 101

33.1. Концептуальні засади нелокальності та парадокс Ейнштейна-Подольського-Розена 101

3.2. Математичний апарат опису та класифікація заплутаних станів .. 114

3.3. Нерівності Белла (CHSH, CH) як критерій нелокальності 123

3.4. Критерії ідентифікації та кількісні міри квантової заплутаності .. 127

3.5. Методи генерації та розподілу заплутаності в каналах зв'язку 138

3.6. Протоколи дистиляції та очищення заплутаних станів 141

3.7. Використання заплутаності у квантовій передачі інформації 145

РОЗДІЛ 4. ФІЗИКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ ТА МЕХАНІЗМИ ДЕКОГЕРЕНЦІЇ 150
4.1. Математичний опис відкритих систем та рівняння Ліндблада 150
4.2. Природа декогеренції та моделі квантового шуму 161
4.3. Часові характеристики релаксації та деградація заплутаності 171
4.4. Прояви декогеренції у фізичних реалізаціях квантових систем ... 176
4.5. Методологія боротьби з декогеренцією в квантових технологіях 180

РОЗДІЛ 5. ТЕОРЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ ТА ОБМЕЖЕННЯ КВАНТОВОЇ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІ 187
5.1. Фундаментальні заборони на клонування та вимірювання станів 187
5.2. Нерозрізнюваність неортогональних станів та збурення при вимірюванні 204
5.3. Принцип причинності та межа Голєво для пропускної здатності каналів 208
5.4. Ентропійні співвідношення невизначеності 218
5.5. Протоколи квантової телепортації та надщільного кодування 225
5.6. Квантове кодування та теорія виправлення помилок у каналах зв’язку232

РОЗДІЛ 6. ФІЗИКА ГЕНЕРАЦІЇ ТА ДЕТЕКЦІЇ ЗАПЛУТАНИХ ФОТОННИХ ПАР 240
6.1. Нелінійно-оптичні механізми генерації корельованих фотонів ... 240
6.2. Спонтанне параметричне розсіяння та умови фазового синхронізму 251
6.3. Квантовий опис та класифікація видів фотонної заплутаності 259

6.4. Експериментальні схеми вимірювання у базисі Белла 269
6.5. Прикладне застосування заплутаних фотонних станів 278

РОЗДІЛ 7. ПРОТОКОЛИ ТЕЛЕПОРТАЦІЇ ТА ПЕРЕДАЧІ КВАНТОВИХ СТАНІВ 283

7.1. Математичний формалізм та алгоритм базового протоколу телепортаці ї283
7.2. Принципи реалізації телепортації та роль вимірювання у базисі Белла 293
7.3. Надщільне кодування та обмін заплутаністю 301
7.4. Протоколи передачі багатокубітних станів 309
7.5. Експериментальна реалізація телепортації на апаратних платформах 315

РОЗДІЛ 8. АНАЛІЗ КВАНТОВИХ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ ТА ФІЗИКА ВТРАТ 324

8.1. Математичний формалізм та класифікація квантових каналів 324
8.2. Механізми виникнення втрат у волоконних та атмосферних лініях 332
8.3. Моделі каналів із втратами та межі пропускної здатності інформації 338
8.4. Межа PLOB та фундаментальні обмеження безповторювачних каналів 345
8.5. Методи компенсації втрат та експериментальні реалізації каналів 349

РОЗДІЛ 9. МЕТОДИ ТА АПАРАТНІ ЗАСОБИ РЕЄСТРАЦІЇ ОДИНИЧНИХ ФОТОНІВ 362

9.1. Квантова теорія фотодетектування та статистика відліків 362
9.2. Принципи роботи напівпровідникових лавинних

фотодетекторів 366
9.3. Надпровідникові сенсори та реєстрація низькоенергетичних квантів 395
9.4. Шумові характеристики та функціональні обмеження реальних детекторів 400
9.5. Методи детектування квадратур поля та порівняння технологій .. 412
9.6. Застосування фотодетекторів в квантовій передачі інформаці ї422

РОЗДІЛ 10. ПРИНЦИПИ РЕАЛІЗАЦІЇ КВАНТОВОЇ ПАМ'ЯТІ ТА ІНТЕРФЕЙСІВ 426
10.1. Когерентна взаємодія світла з резонансним середовищем 426
10.2. Фізичні принципи квантової пам'яті 436
10.3. Методи зупиненого світла та фотонного еха у квантовій пам'яті 446
10.4. Принципи побудови квантових інтерфейсів на основі резонансних систем 457
10.5. Технологічні платформи та порівняльний аналіз систем зберігання станів 464
10.6. Функціонування квантової пам'яті у протоколах мережевого зв'язку 468

РОЗДІЛ 11. АРХІТЕКТУРА КВАНТОВИХ ПОВТОРЮВАЧІВ 477
11.1. Обмеження передачі станів на великих відстанях та методи їх подолання 477
11.2. Архітектура сегментованого каналу та каскадний обмін заплутаністю 482
11.3. Дистиляція заплутаності у вузлах повторювача 493
11.4. Динаміка функціонування та часова синхронізація вузлів 499
11.5. All-photonic повторювачі та сучасні експериментальні реалізації 504

РОЗДІЛ 12. СТРУКТУРНА ОРГАНІЗАЦІЯ ТА ТОПОЛОГІЯ КВАНТОВИХ МЕРЕЖ 512

12.1. Організація вузлів та каналів у системах квантової Комунікації 512

12.2. Топологічні схеми, синхронізація часу та мультиплексування ... 528

12.3. Гібридні інтерфейси та інтеграція з класичною інфраструктурою 555

12.4. Концепція глобального квантового інтернету та перспективи розвитку 566

12.5. Характеристика протоколів квантового розподілу ключів у мережах 574

12.6. Аналіз вразливостей та фізичних атак на квантові канали 580

ЛІТЕРАТУРА 592

ВСТУП

У сучасному світі інформаційні технології переживають якісно новий етап розвитку, пов’язаний із використанням принципів квантової механіки. Квантова передача інформації є одним із ключових напрямів цієї трансформації, оскільки вона відкриває принципово нові можливості для обробки, передачі та захисту даних. Використання таких фундаментальних явищ, як суперпозиція, квантова заплутаність і квантове вимірювання, дозволяє створювати системи зв’язку, які не мають аналогів у класичних технологіях.

Поточний стан розвитку цієї галузі характеризується переходом від теоретичних досліджень і лабораторних експериментів до створення реальних квантових комунікаційних систем. У світі вже функціонують експериментальні та пілотні квантові мережі, реалізовано квантовий розподіл ключів у телекомунікаційних інфраструктурах, активно розвиваються супутникові квантові системи. Водночас створення повноцінного квантового інтернету залишається складною науково-технічною задачею, що потребує вирішення проблем втрат, декогеренції, синхронізації, масштабування та інтеграції різних фізичних платформ.

Актуальність вивчення фізичних основ квантової передачі інформації зумовлена як швидким розвитком квантових технологій, так і потребою у формуванні фахівців, здатних працювати в міждисциплінарному середовищі на стику фізики, інформатики та телекомунікацій. Формування квантових комунікаційних систем, захищених каналів зв’язку та розподілених квантових обчислень потребує глибокого розуміння фізичних процесів, що лежать в основі передачі квантових станів.

Зміст даного навчального посібника побудовано за принципом послідовного переходу від фундаментальних фізичних основ до прикладних аспектів квантових мереж і глобального квантового інтернету. У першій частині розглядаються основи квантування електромагнітного поля та фізика фотона як носія інформації. Далі послідовно викладаються фізика кубіта, явище квантової

заплутаності як ресурсу, процеси декогеренції та фундаментальні обмеження квантової передачі інформації. Наступні розділи присвячені фізиці генерації заплутаних фотонів, квантовій телепортації, властивостям квантових каналів і методам детектування. Особливу увагу приділено квантовій пам'яті, інтерфейсам, повторювачам і, зрештою, фізичній архітектурі квантових мереж і концепції квантового інтернету.

Об'єктом дослідження є процеси формування, передачі та обробки квантової інформації у фізичних системах і мережах.

Предметом дослідження є фізичні механізми, закономірності та технологічні принципи, що визначають функціонування квантових каналів зв'язку, генерацію і використання заплутаності, вплив середовища на квантові стани, а також архітектурні особливості побудови квантових мереж.

Метою посібника є формування системного уявлення про фізичні основи квантової передачі інформації, формування у здобувачів вищої освіти цілісного уявлення про принципи роботи квантових каналів, мереж і протоколів, а також розвиток здатності застосовувати ці знання для аналізу та проєктування сучасних квантових комунікаційних систем.

Для досягнення цієї мети у посібнику вирішуються такі основні завдання:

– розкриття фундаментальних фізичних принципів квантової передачі інформації;

– формування уявлення про кубіт як базовий елемент квантових інформаційних систем;

– дослідити квантову заплутаність як ключовий ресурс квантової передачі інформації;

– проаналізувати вплив декогеренції та шумів на квантові системи;

– розглянути фундаментальні теореми та обмеження квантової передачі інформації;

– вивчити фізику генерації заплутаних фотонів і реалізацію квантових протоколів;

– дослідити властивості квантових каналів зв’язку та методи детектування;

– ознайомити з принципами роботи квантової пам’яті, інтерфейсів і повторювачів;

– сформувати розуміння архітектури квантових мереж і принципів їх функціонування;

– розглянути концепцію глобального квантового інтернету та сучасні виклики його реалізації.

У результаті опрацювання матеріалу посібника здобувачі вищої освіти мають набути таких компетентностей:

– загальнонаукових: розуміння фундаментальних законів квантової фізики та їх застосування в інформаційних технологіях;

– професійних: здатність аналізувати процеси передачі квантової інформації, оцінювати ефективність квантових каналів і мереж;

– інженерних: навички роботи з сучасними підходами до побудови квантових комунікаційних систем;

– аналітичних: уміння оцінювати технологічні обмеження та перспективи розвитку квантових мереж;

– міждисциплінарних: здатність інтегрувати знання з фізики, інформатики та телекомунікацій.

Навчальний посібник поєднує фундаментальні фізичні основи з сучасними технологічними аспектами квантової передачі інформації та формує цілісне бачення цієї галузі як одного з ключових напрямів розвитку науки і технологій XXI століття.

Посібник призначений для здобувачів вищої освіти за спеціальностями фізичного, фізико-технічного, інформаційного та телекомунікаційного профілю. Він також буде корисним для аспірантів, науковців, інженерів і фахівців, які працюють у галузі квантових технологій, а також для всіх, хто цікавиться сучасними напрямами розвитку квантових комунікацій.

РОЗДІЛ 1. КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ПРИРОДА ФОТОНА

Електромагнітне випромінювання є основним фізичним носієм квантової інформації, а фотон – базовою частинкою, що реалізує квантові стани у сучасних комунікаційних технологіях. Проте класичне хвильове уявлення про світло не дозволяє пояснити його дискретні властивості, необхідні для опису кубітів і квантових протоколів.

Квантування електромагнітного поля ґрунтується на тому, що кожна його мода еквівалентна гармонічному осцилятору з дискретним енергетичним спектром. У цьому підході фотон постає як квант збудження відповідної моди поля, а різні стани світла набувають суворого операторного опису.

Таким чином, перехід від класичної електродинаміки до квантового опису поля формує теоретичний фундамент для розуміння природи фотона та фізичних основ квантової передачі інформації.

1.1. Канонічне квантування вільного електромагнітного поля

Квантова передача інформації в оптичних каналах ґрунтується на використанні фотонів як носіїв квантових станів. Проте повне розуміння природи фотона та квантових станів світла неможливе без глибокого осмислення класичної електродинаміки – теорії, що описує електромагнітне поле як безперервну фізичну сутність.Класична електродинаміка, сформульована у завершеному вигляді в рівняннях Максвелла, є однією з найбільш узгоджених і експериментально підтверджених теорій фізики. Вона описує виникнення та поширення електромагнітних хвиль, взаємодію поля з зарядами, перенесення енергії та імпульсу, структуру світлових хвиль. Саме в межах класичної теорії вперше стало зрозуміло, що світло – це електромагнітна хвиля, яка поширюється у вакуумі зі швидкістю

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \tag{1.1}$$

де c – швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі; μ_0 – магнітна стала (магнітна проникність вакууму); ε_0 – електрична стала (діелектрична проникність вакууму).

Разом із тим, класична електродинаміка виявилася недостатньою для пояснення низки явищ, що й привело до квантування поля. Таким чином, вона є необхідною відправною точкою для побудови квантової теорії електромагнітного поля. Для подальшого квантування електромагнітного поля необхідно: розглянути структуру класичних рівнянь поля, встановити хвильову природу електромагнітного випромінювання, показати, що поле може бути розкладене на незалежні моди, виявити обмеження класичного підходу. Саме розклад поля на гармонічні моди стане ключем до його подальшого квантування.

У диференціальній формі рівняння Максвелла у вакуумі мають вигляд:

1. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ Закон Гауса для електричного поля
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ Закон Гауса для магнітного поля
3. $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ Закон Фарадея (електромагнітна індукція)
4. $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ Закон Ампера-Максвелла

де ∇ – оператор набла (векторний диференціальний оператор); **E** – вектор напруженості електричного поля; **B** – вектор магнітної індукції; t – час. Ці рівняння відображають фундаментальні властивості поля: відсутність магнітних монополів, взаємне породження електричного та магнітного полів, динамічний характер електромагнітної взаємодії.

Застосовуючи оператор ротору до рівняння Фарадея, отримуємо хвильове рівняння:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Аналогічне рівняння виконується для магнітного поля.

Розв’язком є плоска монохроматична електромагнітна хвиля:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E_0}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}, \tag{1.3}$$

де $\boldsymbol{r}$ – радіус-вектор точки спостереження, задає координати у тривимірному просторі; $\boldsymbol{E_0}$ – амплітуда електричного поля. Векторна величина, що визначає максимальне значення поля і напрям поляризації хвилі. Саме напрям $\boldsymbol{E_0}$ задає поляризацію; $\boldsymbol{k}$ – хвильовий вектор, визначає напрям поширення хвилі і довжину хвилі: $|\boldsymbol{k}|=k=\frac{2\pi}{\lambda}$; ω – кутова частота: $\omega=2\pi\nu$, де ν — частота.

Тут виконується дисперсійне співвідношення:

$$\omega = c|\boldsymbol{k}|. \tag{1.4}$$

Це співвідношення пізніше стане основою квантового зв'язку $E=\hbar\omega$.

Густина енергії поля:

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2. \tag{1.5}$$

Потік енергії визначається вектором Пойнтінга:

$$S=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}. \tag{1.6}$$

Класична теорія передбачає неперервний розподіл енергії. Амплітуда хвилі може змінюватися довільно, а отже і енергія є неперервною величиною. Саме це припущення згодом виявиться неповним. Розглянемо поле в обмеженому об'ємі V з періодичними граничними умовами. Тоді електромагнітне поле можна розкласти у ряд Фур'є:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)e^{i\boldsymbol{kr}}. \tag{1.7}$$

Кожна пара $(\boldsymbol{k},\lambda)$ відповідає незалежній моді поля.

Підставляючи розклад у гамільтоніан поля, отримуємо:

$$H=\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}(\frac{1}{2}p^2_{\boldsymbol{k},\lambda}+\frac{1}{2}\omega_k^2q^2_{\boldsymbol{k},\lambda}). \tag{1.8}$$

Це – сума незалежних гармонічних осциляторів.

Саме цей результат дозволяє здійснити перехід до квантування.

У вакуумі хвиля є поперечною:

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.9}$$

Для кожного $\boldsymbol{k}$ існують дві незалежні поляризації.

Поляризація відіграє фундаментальну роль у квантовій передачі інформації, оскільки саме вона використовується як фізична реалізація фотонного кубіта.

Попри успіхи, класична теорія не змогла пояснити спектр теплового випромінювання (ультрафіолетова катастрофа), фотоефект, дискретність атомних спектрів. Гіпотеза кванту енергії, висунута Максом Планком, стала першим кроком до перегляду класичного підходу. Пізніше Альберт Ейнштейн інтерпретував світло як потік квантів енергії – фотонів.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1. Поширення сигналу в оптичному волокні. У класичній моделі світло в волокні описується як хвиля, що задовольняє хвильове рівняння з граничними умовами. Моди хвилеводу визначають дозволені значення $\boldsymbol{k}$. У квантовій теорії кожна така мода відповідає фотонному осцилятору.

2. Інтерференція. У класичній теорії інтерференційна картина виникає через суперпозицію хвиль:

$$E_{\text{заг}} = E_1 + E_{2.} \tag{1.10}$$

Інтенсивність:

$$I \sim |E_{\text{заг}}|^{\,2}. \tag{1.11}$$

Цей результат зберігається і в квантовій теорії, але інтерпретується як інтерференція амплітуд імовірності.

3. Поляризаційне кодування. Класично:

$$E = E_0(\hat{\boldsymbol{x}} cos\theta + \hat{\boldsymbol{y}} sin\theta), \tag{1.12}$$

де $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ – одиничні вектори вздовж осей x та y.

Вони задають ортонормований базис у площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі. У квантовій теорії це переходить у суперпозицію двох базисних станів фотона.

Отже, класична електродинаміка встановлює хвильову природу світла, вводить поняття мод електромагнітного поля, демонструє перенесення енергії та імпульсу, описує поляризаційні властивості випромінювання.

Найважливіший результат для подальшого викладу наступний:

Електромагнітне поле можна представити як сукупність незалежних гармонічних осциляторів. Саме цей факт робить можливим канонічне квантування та введення фотона як кванта збудження поля. Таким чином, класична електродинаміка виступає не альтернативою квантовій теорії, а її необхідною попередницею та граничним випадком.

Квантовий гармонічний осцилятор є однією з центральних моделей сучасної теоретичної фізики. Його значення виходить далеко за межі задачі про частинку в параболічному потенціалі. Саме ця модель лежить в основі квантування електромагнітного поля, визначає структуру фотонних станів, описує фонони, коливання кристалічних ґраток, моди резонаторів, формує математичний апарат квантової оптики. У контексті посібника «Фізичні основи квантової передачі інформації» квантовий гармонічний осцилятор відіграє принципову роль, оскільки кожна мода електромагнітного поля після квантування еквівалентна незалежному квантовому осцилятору. Фотон у цьому формалізмі постає як квант збудження такої моди.

Таким чином, розуміння квантового осцилятора є необхідною умовою для подальшого аналізу фотонних кубітів, когерентних станів і квантових каналів зв’язку. У класичній механіці гармонічний осцилятор описується рівнянням руху

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0, \qquad (1.13)$$

де m – маса, ω – власна частота системи.

Перехід до квантової теорії здійснюється шляхом канонічного квантування: координата x та імпульс p стають операторами, виконується комутаційне співвідношення:

$$[\hat{x}\ \hat{p}] = i\hbar, \qquad (1.14)$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – фундаментальна квантова стала, яка визначає масштаб квантових ефектів і пов'язує енергію з частотою.

Саме ця заміна призводить до появи дискретного енергетичного спектра та нової фізичної інтерпретації коливального процесу. Гамільтоніан квантового осцилятора має вигляд:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 \hat{x}^2, \tag{1.15}$$

де $\hat{x}$ і $\hat{p}$ – оператори координати та імпульсу, що задовольняють канонічне комутаційне співвідношення $[\hat{x}\,\hat{p}] = i\hbar$.

Це оператор повної енергії системи. Розв'язання стаціонарного рівняння Шредінгера приводить до спектра:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0,1,2, \ldots, \tag{1.16}$$

де E_n – енергія системи у квантовому стані з номером n; n – квантове число, визначає номер енергетичного рівня.

Індекс n нумерує дозволені енергетичні рівні. Основні особливості спектра: енергія дискретна; мінімальна енергія у стані $n = 0$ визначається як

$$E_0 = \frac{1}{2}\, \hbar\omega. \tag{1.17}$$

Це так звана нульова енергія коливань, яка відсутня в класичній фізиці. Отже, навіть у стані n = 0 система має ненульову енергію.

Формулу (1.16) можна записати як

$$E_n = E_0 + n\, \hbar\omega, \tag{1.18}$$

де E_0 – енергія вакууму.

Кожен додатковий квант збільшує енергію на ħω. Отже: $n = 0 -$ вакуум, $n = 1 -$ однофотонний стан, $n = 2 -$ два фотони і т. д. Розв'язання рівняння Шредінгера у координатному представленні приводить до диференціального рівняння другого порядку, що має вигляд, аналогічний класичному рівнянню для ермітових функцій. Хоча цей шлях є математично коректним, він не є

найзручнішим для подальшого узагальнення на квантоване електромагнітне поле.

Для задач квантової оптики та квантової теорії поля доцільніше перейти до алгебраїчного методу розв'язання, який дозволяє уникнути безпосереднього інтегрування диференціального рівняння; безпосередньо отримати дискретний спектр енергії; ввести оператор числа квантів; сформувати природний базис для опису фотонних станів. Ідея полягає в тому, щоб представити гамільтоніан у вигляді добутку лінійних операторів. Оскільки він є квадратичною формою від $\hat{x}$ та $\hat{p}$, можна спробувати побудувати такі комбінації цих операторів, які є безрозмірними, спрощують комутаційні співвідношення, зводять гамільтоніан до компактного вигляду. З цією метою вводяться нові оператори – оператор знищення $\hat{a}$ та оператор народження $\hat{a}^{\dagger}$ кванта коливання:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \tag{1.19}$$

$$\hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right). \tag{1.20}$$

Ці оператори є лінійними комбінаціями координати та імпульсу. Завдяки канонічному комутаційному співвідношенню для $\hat{x}$ та $\hat{p}$ легко показати, що вони задовольняють фундаментальну умову:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = 1. \tag{1.21}$$

Підставивши ці вирази у гамільтоніан, отримаємо його значно простішу форму:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{1.22}$$

де $\hat{a}$ – оператор знищення кванта, $\hat{a}^{\dagger}$ – оператор народження кванта.

Таким чином, гамільтоніан виражається через оператор числа квантів

$$\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,. \tag{1.23}$$

Цей результат має принципове значення, зокрема: енергія системи пропорційна числу квантів збудження; дискретність спектра випливає без

розв’язання диференціальних рівнянь; з’являється природна інтерпретація кванта коливання як елементарного збудження.

Саме такий алгебраїчний підхід дозволяє в подальшому безпосередньо перенести формалізм на моди електромагнітного поля, де оператори $\hat{a}$ та $\hat{a}^{\dagger}$ набувають фізичного змісту ***операторів знищення та народження фотонів.***

Фізичний зміст операторів знищення та народження фотонів такий:

1. Знищення фотона не означає зникнення «частинки», а лише зменшення енергії моди на $\hbar\omega$. Це як «поглинання одного кванта поля» атомом чи детектором.

2. Народження фотона не означає появу «класичної частинки» у просторі – фотон з’являється як квант енергії поля. Це як «додавання одного кванта коливання» у осцилятор.

3. Фотон – це квант енергії моди, а оператори народження (знищення) описують кількість цих квантів.

Важливо розуміти: оператори не «рухають» частинку у просторі. Вони описують зміни числа квантів у конкретній моді поля. Ці оператори є математичним інструментом, який дозволяє описати квантові стани поля та взаємодію фотонів з речовиною. Отже, введення операторів народження і знищення є не просто математичним прийомом, а ключовим кроком до формування квантово-польового опису світла. Після введення операторів народження $\hat{a}^{\dagger}$ та знищення $\hat{a}$ квантів гармонічного осцилятора природно перейти від координатного опису до чисельного представлення.

Оскільки

$$\left[\widehat{H}, \widehat{N}\right] = 0, \tag{1.24}$$

то гамільтоніан і оператор числа мають спільні власні стани. Це означає, що енергетичні стани осцилятора одночасно є станами з певною визначеною кількістю квантів збудження. Саме це приводить до введення спеціального базису – фоківських станів. ***Фоківські стани*** (або стани з визначеним числом квантів) – це власні стани оператора числа $\widehat{N}$:

$$\widehat{N} \mid \mathrm{n}\rangle = n \mid \mathrm{n}\rangle\,, \quad \text{де } n = 0,1,2,\ldots \tag{1.25}$$

Власні стани позначаються |n⟩. Вертикальна риска та кутова дужка |·⟩ – це бра-кет нотація Дірака. В даному виразі: n – ціле додатне число, $\mid n\rangle$ – стан із точно визначеною кількістю квантів. У випадку електромагнітного поля ці кванти – фотони.

Ці стани також є власними станами гамільтоніана:

$$\widehat{H} \mid n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \mid n\rangle. \tag{1.26}$$

У контексті електромагнітного поля це означає: кожна мода поля – це квантовий гармонічний осцилятор; число n – це кількість фотонів у цій моді; |0⟩| – це вакуумний стан (відсутність фотонів); |1⟩ – це однофотонний стан; |n⟩| – це стан із n фотонами. Таким чином, фоківські стани забезпечують дискретний опис енергії та числа фотонів. Фоківські стани є фундаментальними для опису однофотонних джерел; формування фотонних кубітів; аналізу статистики фотонів; побудови квантових каналів. Особливо важливим є стан |1⟩, який використовується у протоколах квантової криптографії як носій одного кубіта. Саме цей базис є основою для побудови більш складних станів світла – когерентних, теплових і стиснених.

Стан |0⟩задовольняє:

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \tag{1.27}$$

Це вакуумний стан. Важливо, що навіть у цьому стані система має ненульову енергію:

$$E_0 = \frac{1}{2}\,\hbar\omega. \tag{1.28}$$

Нульові коливання є проявом принципу невизначеності Гайзенберга. При розкладі електромагнітного поля за модами кожна мода описується гамільтоніаном типу:

$$H_k = \frac{1}{2}p_k^2 + \frac{1}{2}\omega_k^2 q_k^2\,. \tag{1.29}$$

Це структура, формально ідентична гармонічному осцилятору. Після квантування:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}^\dagger{}_k \hat{a}_k + \frac{1}{2}). \tag{1.30}$$

Кількість фотонів у моді дорівнює власному значенню оператора числа:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}\,. \tag{1.31}$$

Для кращого розуміння наведеного матеріалу розглянемо приклади.

1. Однофотонний стан. Стан $|1\rangle$ має енергію:

$$E_1 = \frac{3}{2}\,\hbar\omega\,. \tag{1.32}$$

Вона перевищує вакуумну: $\hbar\omega$. Саме ця величина інтерпретується як енергія фотона.

2. Когерентний стан. Когерентний стан визначається як власний стан оператора знищення:

$$\hat{a}\,|\,\alpha\rangle = \alpha\,|\,\alpha\rangle, \tag{1.33}$$

де $\hat{a}$– оператор знищення фотона; $|\alpha\rangle$ – когерентний стан; α – комплексне число, що визначає амплітуду та фазу поля. Розклад у базисі $|n\rangle$ дає:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{1.34}$$

Ці стани описують лазерне випромінювання і широко застосовуються у квантових комунікаціях.

3. Квадратури поля. Оператори

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{P} = -\frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{1.35}$$

відповідають вимірюваним квадратурам поля. Оператори квадратур $\hat{X}$ та $\hat{P}$ є аналогами безрозмірних координати та імпульсу квантового гармонічного осцилятора і задовольняють комутаційному співвідношенню $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. Їх невизначеності задовольняють умові:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}. \tag{1.36}$$

Це фундаментальна межа квантового шуму. Квантовий гармонічний осцилятор має важливе значення для квантової передачі інформації. Він задає математичну структуру фотонних станів, визначає поняття числа фотонів,

пояснює вакуумні флуктуації, лежить в основі теорії когерентних і стиснених станів. У квантовій комунікації використовуються фоківські стани (однофотонні імпульси), когерентні стани (лазерні сигнали), стиснені стани (зменшення шуму). Усі вони є різними реалізаціями станів квантового осцилятора. Квантовий гармонічний осцилятор є фундаментальною моделлю, що демонструє дискретність енергії, вводить оператори народження та знищення, пояснює існування вакуумних флуктуацій. Він формує базис фотонних станів. Найважливіший концептуальний результат полягає в тому, що фотон – це квант збудження гармонічної моди електромагнітного поля. Таким чином, квантовий гармонічний осцилятор є математичним та фізичним ядром квантової оптики і основою для опису процесів квантової передачі інформації.

1.2. Квантові характеристики та статистичні властивості фотонів

Квантова передача інформації базується на використанні фотонів як носіїв квантових станів. Проте фотон не є елементарною «кулькою», а постає як квант збудження електромагнітного поля. Тому для побудови строгого фізичного апарату квантової комунікації необхідно перейти від класичного опису поля до його квантової теорії. Найбільш природним і концептуально прозорим способом такого переходу є канонічне квантування. Канонічне квантування електромагнітного поля є процедурою, що дозволяє перейти від класичного безперервного поля до квантово-механічної системи операторів. У результаті цього переходу електромагнітне поле інтерпретується як сукупність незалежних квантових гармонічних осциляторів, а його енергія набуває дискретної структури. Саме в цій картині фотон постає як квант збудження відповідної моди поля. Ідея канонічного квантування базується на глибокій аналогії між розкладом електромагнітного поля на нормальні моди та системою гармонічних осциляторів. У класичній теорії будь-яке поле можна представити як суперпозицію гармонічних хвиль із різними хвильовими векторами та поляризаціями. Кожна така мода поводиться як незалежний осцилятор із певною власною частотою.

Якщо для гармонічного осцилятора перехід до квантового опису здійснюється заміною координати та імпульсу на оператори з канонічними комутаційними співвідношеннями, то аналогічну процедуру можна застосувати й до кожної моди електромагнітного поля. Саме це і становить сутність канонічного квантування.

Канонічне квантування починається з лагранжевого формалізму. Лагранжіан електромагнітного поля у вакуумі:

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2. \tag{1.37}$$

Електричне та магнітне поля виражаються через векторний потенціал **A** та скалярний потенціал φ. Для спрощення квантування зазвичай обирають кулонівське калібрування:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{1.38}$$

У цьому калібруванні скалярний потенціал у вакуумі дорівнює нулю, а динамічними змінними залишаються лише поперечні компоненти векторного потенціалу. Припустимо, що поле замкнене в кубічному об'ємі зі сторонами L (періодичні граничні умови). Тоді векторний потенціал електромагнітного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ можна розкласти у вигляді:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} q_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) e_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}, \tag{1.39}$$

де **k** – хвильовий вектор, λ – індекс (стан) поляризації, $e_{\boldsymbol{k},\lambda}$ – ортонормовані поперечні вектори поляризації, $q_{\boldsymbol{k},\lambda}$– узагальнені координати. Кожна мода з фіксованими **k,** λ задовольняє рівнянню гармонічного осцилятора з частотою

$$\omega_k = c|\boldsymbol{k}|\,. \tag{1.40}$$

Після підстановки в гамільтоніан отримаємо:

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{1}{2} p^2_{\boldsymbol{k},\lambda} + \frac{1}{2} \omega_k^2 q^2_{\boldsymbol{k},\lambda}\,, \tag{1.41}$$

де $p_{\boldsymbol{k},\lambda}$ – канонічні імпульси. Таким чином, електромагнітне поле еквівалентне сукупності незалежних гармонічних осциляторів із частотами ω_k.

Класичні координати $q_{\boldsymbol{k},\lambda}$ та імпульси $p_{\boldsymbol{k},\lambda}$ замінюються операторами:

$$\left[q_{\boldsymbol{k},\lambda}, p_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\right] = i\hbar\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{1.42}$$

Далі вводяться оператори народження і знищення:

$$a_{\boldsymbol{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}q_{\boldsymbol{k},\lambda} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}p_{\boldsymbol{k},\lambda}, \tag{1.43}$$

$$a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}q_{\boldsymbol{k},\lambda} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}p_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{1.44}$$

Гамільтоніан набуває вигляду:

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_k\left(a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right). \tag{1.45}$$

Оператор числа фотонів у відповідній моді:

$$N_{\boldsymbol{k},\lambda} = a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{1.45}$$

Енергетичний спектр кожної моди дискретний:

$$E_n = \hbar\omega_k\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{1.46}$$

Квант із енергією $\hbar\omega_k$ інтерпретується як фотон з хвильовим вектором $\boldsymbol{k}$ і поляризацією λ. Після квантування векторний потенціал стає оператором:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k V}}\left(a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_k t)} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_k t)}\right)e_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{1.47}$$

Аналогічно визначаються оператори електричного та магнітного полів.

Розглянемо наступні приклади.

1. Одномодове поле. Якщо розглянути лише одну моду, система повністю еквівалентна квантовому гармонічному осцилятору. Стан із одним фотоном:

$$|1\rangle = a\dagger|0\rangle. \quad (1.48)$$

Енергія такого стану:

$$E_1 = \hbar\omega$$

Це базовий стан для фотонного кубіта.

2. Вакуумні флуктуації. Навіть у вакуумному стані середня енергія не дорівнює нулю:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Це призводить до фізичних ефектів, таких як сила Казимира та спонтанне випромінювання.

3. Когерентний стан. Когерентний стан визначається як власний стан оператора знищення (1.33). Такий стан найближчий до класичної електромагнітної хвилі й широко використовується в лазерній квантовій комунікації.

Канонічне квантування електромагнітного поля демонструє, що світло не є суцільною хвилею, а складається з дискретних квантів збудження – фотонів. Класичне поле після розкладу за модами перетворюється на систему незалежних квантових гармонічних осциляторів, кожен з яких має дискретний спектр енергії. Операторний формалізм лежить в основі квантової оптики та квантової теорії інформації. Він дозволяє строго визначити поняття фотона, числа фотонів, вакуумного стану та різноманітних квантових станів поля. Саме цей підхід формує фундамент для опису фотонних кубітів, квантових каналів зв'язку та фізичних обмежень квантової передачі інформації. Отже, канонічне квантування електромагнітного поля є основним теоретичним кроком, що з'єднує класичну електродинаміку з практикою квантових інформаційних технологій.

У класичній електродинаміці світло описується як електромагнітна хвиля – безперервне поле, що переносить енергію та імпульс у просторі. Проте численні експериментальні факти – фотоелектричний ефект, ефект Комптона, статистика теплового випромінювання, дискретний характер випромінювання атомів – засвідчили, що електромагнітне випромінювання проявляє дискретні

властивості. Ця подвійність – хвильова та корпускулярна – знаходить природне пояснення лише в рамках квантової теорії поля, де фотон постає не як матеріальна частинка у класичному розумінні, а як квант збудження електромагнітної моди. Такий підхід дозволяє поєднати хвильову природу світла з його дискретними властивостями і створює фізичну основу для квантової передачі інформації. У контексті квантової передачі інформації фотон є базовим фізичним носієм кубіта. Тому необхідно чітко зрозуміти його природу, математичний опис і фізичні властивості. У результаті канонічного квантування електромагнітне поле розкладається на незалежні моди, кожна з яких поводиться як квантовий гармонічний осцилятор.

Гамільтоніан вільного електромагнітного поля набуває вигляду:

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} a_{\boldsymbol{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right), \tag{1.49}$$

де H – оператор енергії (гамільтоніан) поля; $\boldsymbol{k}$ – хвильовий вектор (визначає напрям і довжину хвилі); λ – індекс поляризації (два незалежні поперечні стани); $\hbar$ – зведена стала Планка; $\omega_k = \mathrm{c}|\boldsymbol{k}|$ – кутова частота моди; $a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ – оператор народження фотона; $a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ – оператор знищення фотона; $a^{\dagger}\, a_{\lambda}$ – оператор числа фотонів у даній моді; $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$– енергія нульових коливань (вакуумна енергія).

З цієї формули випливає, що енергія кожної моди дискретна та кратна $\hbar\omega_k$). Саме цей квант енергії і називається фотоном.

Оператор числа фотонів у моді:

$$N_{\boldsymbol{k},\lambda} = a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} a_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{1.50}$$

Енергетичні рівні кожної моди дискретні:

$$E_n = \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.51}$$

Один фотон відповідає переходу з рівня $n = 0$ на рівень $n = 1$. Отже, фотон – це квант енергії $\hbar\omega_k$ певної моди. Електромагнітне поле можна уявити як систему нескінченної кількості незалежних гармонічних осциляторів

(мод). У класичній теорії амплітуда коливань може бути довільною. У квантовій теорії енергія кожної моди може змінюватися лише дискретно. Якщо мода має частоту ω, вона може перебувати у вакуумному стані (мінімальна енергія), мати одне збудження, мати два збудження і т. д. Одне таке збудження – це фотон. Важливо пам'ятати, що фотон не є «кулькою», що рухається у просторі. Він є мінімальним квантом коливання відповідної моди поля. Фотон – це елементарний квант збудження електромагнітної моди з енергією

$$\mathrm{E} = \hbar\omega$$

Імпульс фотона визначається як

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \tag{1.52}$$

Оскільки $\omega_k = \mathrm{c}|\boldsymbol{k}|$, то виконується релятивістський зв'язок:

$$E = pc, \tag{1.53}$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

Фотон не має маси, тобто його маса спокою дорівнює нулю. Вакуумний стан визначається як

$$a_{k,\lambda} \mid 0\rangle = 0. \tag{1.54}$$

де $a_{k,\lambda}$ – оператор знищення. Дане рівняння означає наступне: оскільки у вакуумі немає фотонів, то оператор знищення нічого не «знищує». В результаті маємо нульовий вектор.

Стан з одним фотоном у моді (**k**, λ):

$$|1_{k,\lambda}\rangle = a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} \mid 0\rangle. \tag{1.55}$$

Енергія такого стану:

$$E = \hbar\omega_k.$$

Проте реальний фотон зазвичай описується суперпозицією мод:

$$\mid \psi\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} c_{\boldsymbol{k},\lambda} \mid 1_{k,\lambda}\rangle, \tag{1.56}$$

де $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ –комплексні амплітуди. Фізично це означає, що фотон може не мати строго визначеного імпульсу, а бути хвильовим пакетом.

Для багатофотонного стану:

$$|n_{k,\lambda}\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \mid 0\rangle. \qquad (1.57)$$

де k – хвильовий вектор (напрям і довжина хвилі); λ – поляризація; $a^\dagger$ – оператор народження фотона. Ці стани називаються фоківськими станами або станами з визначеним числом n фотонів у моді (k,λ). Слід пам'ятати, що навіть коли фотонів немає, електромагнітне поле не дорівнює нулю. Існують нульові флуктуації. Це означає, що вакуум має фізичні властивості; існує фундаментальний квантовий шум; існує спонтанне випромінювання атомів пов'язане з вакуумними коливаннями. Для квантової передачі інформації це принципово важливо, оскільки визначає фундаментальні межі точності та рівень шуму. Фотон має спін 1, але через відсутність маси має лише дві фізичні проєкції спіну:

$$s_z = \pm 1. \qquad (1.58)$$

Це відповідає двом циркулярним поляризаціям – правій і лівій. Тобто фотон має два незалежні поляризаційні стани. Це означає, що він може перебувати в суперпозиції двох ортогональних поляризацій:

$$\mid \psi\rangle = \alpha \mid H\rangle + \beta \mid V\rangle, \qquad (1.59)$$

де $\mid H\rangle$ – горизонтальна поляризація; $\mid V\rangle$ – вертикальна поляризація; α, β – комплексні амплітуди, причому:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \qquad (1.60)$$

Фізично це означає, що один і той самий фотон може одночасно мати «горизонтальну» і «вертикальну» складові до моменту вимірювання. Саме ця двовимірність є основним ресурсом у квантовій передачі інформації, оскільки дозволяє реалізувати кубіт. Фотон не має класичної траєкторії. Його стан описується квантовою суперпозицією:

$$\mid \psi\rangle = \sum_{\mathbf{k},\lambda} c_{\mathbf{k},\lambda} \mid 1_{k,\lambda}\rangle, \qquad (1.61)$$

де $c_{\mathbf{k},\lambda}$ – комплексні коефіцієнти суперпозиції.

Сума відображає можливість одночасної присутності у багатьох модах. Це означає, що до вимірювання фотон не має строго визначеного імпульсу чи

положення. Він описується хвильовим пакетом, тобто розподілом імовірності. Ймовірність виявлення фотона пов'язана з квадратом модуля амплітуди. Лише в момент взаємодії з детектором відбувається локалізована подія. Саме цей дискретний акт ми і називаємо реєстрацією фотона. Навіть у вакуумному стані середня енергія не дорівнює нулю:

$$E_{\text{вакуум}} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \hbar\omega_k. \tag{1.62}$$

Це прояв нульових коливань поля. Вакуумні флуктуації відіграють важливу роль у формуванні квантового шуму. Фізичні властивості фотона роблять його ідеальним носієм квантової інформації. Це такі властивості: відсутність маси забезпечує поширення зі швидкістю світла; слабка взаємодія з середовищем забезпечує малі втрати; наявність поляризації забезпечує природний кубіт; можливість утворення заплутаних станів.

Заплутаний стан двох фотонів може мати вигляд

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle_1 |H\rangle_2 + |V\rangle_1 |V\rangle_2). \tag{1.63}$$

Розглянемо приклади.

1. Фотоелектричний ефект. Енергія електрона, вибитого з металу $E_e = \hbar\omega - W$, де E_e – кінетична енергія електрона; W – робота виходу. Енергія передається дискретно – по одному фотону.

2. Однофотонний кубіт. Поляризаційний стан:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle + |V\rangle).$$

Це суперпозиція двох ортогональних станів – базовий приклад квантового біта.

3. Імпульс фотона. Для світла з довжиною хвилі λ:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Це пояснює тиск світла та перенесення імпульсу.

Фотон у квантовій теорії поля є не класичною частинкою, а елементарним квантом збудження електромагнітної моди. Він проявляє хвильові властивості

під час поширення та корпускулярні під час взаємодії. Його енергія та імпульс визначаються частотою та хвильовим вектором, а внутрішня структура проявляється через поляризаційні ступені вільності. Операторний формалізм дозволяє строго визначити фотонні стани, вакуум, багатофотонні конфігурації та суперпозиції. Саме ці властивості роблять фотон універсальним носієм квантової інформації: він може існувати у суперпозиції, заплутуватися з іншими фотонами, переносити інформацію на великі відстані з мінімальними втратами. З іншого боку, фізична інтерпретація дозволяє зрозуміти, що фотон – це не класична частинка, а дискретна квантова подія взаємодії поля з речовиною. Саме така подвійна – математична і фізична – природа робить фотон унікальним фізичним об'єктом і дозволяє використовувати його як фундаментальний носій квантової інформації. Отже, розуміння фотона як кванта збудження поля є фундаментальним кроком до побудови фізично коректної теорії квантової передачі інформації та розробки фотонних квантових технологій.

Після встановлення того, що фотон є квантом збудження електромагнітного поля, природно постає принципове питання: яким чином різні квантові стани світла можуть слугувати носіями інформації?

Квантова передача інформації ґрунтується не просто на існуванні фотонів, а на можливості підготовки, перетворення та вимірювання певних квантових станів електромагнітного поля. Саме структура цих станів – їхні флуктуації, розподіл фотонів, поляризація, фазові співвідношення та міжмодові кореляції – визначає інформаційні можливості системи. У цьому параграфі увагу зосередимо не на процедурі квантування, а на фізичній інтерпретації різних типів станів поля як носіїв інформації.

Будь-який квантовий стан однієї моди поля можна подати як суперпозицію станів з різною кількістю фотонів:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0} c_n \ |n\rangle, \tag{1.64}$$

де $|n\rangle$ – стан з точно визначеною кількістю фотонів n; c_n – комплексні амплітуди, що визначають ймовірності різних значень n.

Фізично це означає, що будь-який стан світла можна розглядати як певну суперпозицію різної кількості фотонів у різних модах. Однак для задач квантової передачі інформації важливо не просто знати, що поле має квантову природу, а розуміти: які ступені свободи можна використати для кодування інформації; які стани є стійкими до втрат і шуму; які з них мають некласичні властивості; які забезпечують перевагу над класичними методами зв'язку. Таким чином, квантові стани поля розглядаються як фізичні ресурси. Різні квантові стани електромагнітного поля мають різну фізичну природу та різні інформаційні можливості. Зручно розглядати їх у вигляді ієрархії, що відображає поступове ускладнення квантової структури поля та зростання ступеня його некласичності. Некласичність проявляється через субпуассонівську статистику фотонів; антикумуляцію фотонів (фотони «уникають» одночасної появи); негативність квазіймовірнісних розподілів у фазовому просторі. Фізично це означає, що квантове поле може демонструвати кореляції, які неможливо пояснити класичною хвильовою теорією. Саме ці властивості дозволяють реалізувати безпечну квантову криптографію. Найбільш близькими до класичного опису є когерентні стани. Вони характеризуються мінімальними та симетричними квантовими флуктуаціями і тому відтворюють властивості класичної електромагнітної хвилі.

Розгляд когерентних станів логічно почати з двох причин:

1. Зв'язок із класичною електродинамікою. Когерентні стани є найближчим квантовим аналогом класичної електромагнітної хвилі. Їх середні значення відтворюють гармонічні коливання поля, а квантові флуктуації є мінімальними. Таким чином, вони забезпечують природний перехід від класичного опису, розглянутого раніше, до повністю квантового.

2. Фізична реалізовність. Більшість реальних джерел світла (зокрема лазери) генерують саме такі стани. Отже, когерентний стан є експериментально базовим і практично доступним. Таким чином, ми починаємо з найбільш «класичного» квантового стану. ***Когерентним станом*** називається квантовий

стан однієї моди електромагнітного поля, який є власним станом оператора знищення фотона (див. (1.33)):

Комплексний параметр можна подати як

$$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}, \tag{1.65}$$

де $|\alpha|$ визначає середню амплітуду (інтенсивність), ϕ – фазу поля. Середнє число фотонів у такому стані дорівнює

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2. \tag{1.66}$$

Когерентний стан є найбільш близьким до класичної гармонічної хвилі. В цьому стані середнє значення електричного поля осцилює гармонічно, як у класичній хвилі; квантові флуктуації мінімальні та однакові для обох квадратур; статистика фотонів відповідає класичній стохастичній інтенсивності. Лазерне випромінювання зазвичай добре описується саме когерентним станом. У контексті квантової передачі інформації когерентні стани використовуються в протоколах неперервних змінних, де інформація кодується в амплітуді та фазі світлового поля. Однак когерентні стани не демонструють вираженої некласичності. Тому постає питання: чи можна створити стани з більш вираженими квантовими властивостями?

У когерентному стані квантові флуктуації є мінімальними, але жорстко симетричними. Виникає природне питання: чи можна змінити структуру квантових флуктуацій, не порушуючи фундаментального співвідношення невизначеностей? Відповіддю є стиснуті стани. Стиснуті стани мають більш виражену квантову природу. В них відбувається перерозподіл квантових флуктуацій між канонічно спряженими величинами. ***Стиснутим станом*** називається квантовий стан електромагнітного поля, в якому дисперсія (квантова невизначеність) однієї з квадратур поля є меншою за відповідну дисперсію у вакуумному стані, при збереженні співвідношення невизначеностей Гейзенберга.

Для однієї моди поля вводяться оператори квадратур:

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(a + a^\dagger\right), \quad X_2 = \frac{1}{2i}\left(a - a^\dagger\right), \tag{1.67}$$

де a – оператор знищення фотона, $a^{\dagger}$ – оператор народження фотона. Ці оператори відповідають амплітудній і фазовій складовим електромагнітного поля: X_1 відповідає амплітудній складовій поля; X_2 – фазовій складовій. У цьому підході інформація кодується в неперервних значеннях цих величин. Виконується співвідношення невизначеностей:

$$\Delta X_1 \, \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}. \tag{1.68}$$

У когерентному стані:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2.$$

У вакуумному стані:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}. \tag{1.69}$$

Стиснутий стан – це стан, для якого виконується одна з умов:

$$\Delta X_1 < \frac{1}{2} \text{ або } \Delta X_2 < \frac{1}{2}.$$

Тобто хоча б одна квадратура має флуктуації менші за вакуумний рівень. При цьому інша квадратура має збільшену невизначеність так, щоб добуток залишався не меншим за 1/4. Отже, умова стискання – це саме зменшення хоча б однієї квадратури нижче вакуумного рівня. Стиснення означає ***перерозподіл квантових флуктуацій*** між двома канонічно спряженими величинами. Геометрично це можна уявити так: вакуумний стан відповідає симетричному «кругу невизначеності» у фазовому просторі; стиснутий стан відповідає «еліпсу», витягнутому в одному напрямку і стиснутому в іншому. Таким чином зменшується шум в одній квадратурі; зростає шум в іншій; фундаментальне співвідношення невизначеностей не порушується. Стиснуті стани не мають повного класичного аналога; демонструють некласичні статистичні властивості; дозволяють зменшити квантовий шум нижче вакуумного рівня. У задачах квантової передачі інформації вони підвищують точність гомодинних вимірювань; використовуються в протоколах неперервних змінних; підвищують чутливість інтерферометрів.

Стиснуті стани демонструють, що квантові флуктуації можна керовано змінювати в межах однієї моди. Звідси питання: чи можна створити квантові кореляції не лише всередині однієї моди, а між різними модами поля? Це приводить до заплутаних станів. Це принципово новий рівень квантової організації поля. У заплутаних станах кореляції між модами не можуть бути пояснені класичною статистикою. ***Заплутаним станом*** називається квантовий стан складеної системи, який не можна подати як тензорний добуток станів її підсистем. Нехай система складається з двох підсистем A і B. Якщо стан можна записати у вигляді

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B, \qquad (1.70)$$

де $\otimes$ – знак тензорного добутку; $|\psi\rangle_A$ – стан підсистеми A; $|\psi\rangle_B$ – стан підсистеми B, то такий стан є ***сепарабельним,*** тобто незаплутаним. Якщо стан неможливо представити у вигляді такого добутку, то стан є заплутаним. Особливу роль відіграють стани, в яких дві або більше мод поля перебувають у заплутаному стані. Фізична сутність заплутування полягає в тому, що вимірювання однієї частини системи визначає статистичні властивості іншої, незалежно від відстані між ними.

Класичний приклад двокубітного заплутаного стану:

$$|\Phi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|00\rangle + |11\rangle). \qquad (1.71)$$

Цей стан неможливо розкласти як добуток стану першої та другої частинок. Фізично це означає, що вимірювання першої підсистеми миттєво визначає стан другої; результати вимірювань демонструють кореляції, сильніші за класично можливі. Заплутаність означає, що квантовий стан описує систему як єдине ціле; інформація не локалізована в окремих підсистемах; кореляції не можуть бути пояснені спільним класичним джерелом. У випадку електромагнітного поля заплутаними можуть бути два фотони, дві моди поля, дві квадратури неперервних змінних. Заплутані стани є фізичним ресурсом для квантової телепортації, квантової криптографії, квантових обчислень, надточних вимірювань. Саме заплутаність відрізняє квантову інформацію від класичної.

Заплутування не є просто кореляцією – це ресурс, що не має класичного аналога. Електромагнітне поле у реальних каналах зазнає втрат, що фізично відповідає ймовірності знищення фотона. Якщо початковий стан був $|\psi\rangle$, то після втрат він переходить у статистичну суміш станів з меншою кількістю фотонів. Фізично це означає руйнування когерентності; зменшення заплутування; зниження інформаційної ємності каналу. Тому вибір конкретного квантового стану визначається компромісом між інформаційною ємністю та стійкістю до декогеренції.

Приклади фізичних реалізацій:

1. Поляризаційні кубіти у волоконно-оптичних лініях застосовуються в квантовій криптографії.

2. Часові бінарні стани ефективні для далекої передачі через атмосферу.

3. Стиснуте світло використовується в протоколах неперервних змінних для підвищення стійкості до шуму.

Заплутані фотонні пари – основа експериментів з перевірки нерівностей Белла та реалізації квантових мереж. У кожному випадку фізична структура стану безпосередньо визначає можливості інформаційної обробки. Квантові стани електромагнітного поля є фундаментальними фізичними носіями квантової інформації. Вони визначають не лише наявність фотонів, а й структуру когерентності, фазові співвідношення та міжмодові кореляції. Поляризація, часові моди, квадратури поля та заплутування утворюють фізичний інструментарій кодування інформації. Некласичні властивості світла забезпечують принципову перевагу над класичними методами зв’язку. Таким чином, електромагнітне поле постає не просто як середовище поширення сигналу, а як активний квантовий об’єкт, стан якого можна цілеспрямовано формувати й використовувати як ресурс для реалізації протоколів квантової передачі інформації.

1.3. Вакуумні флуктуації та квантові стани як інфоносії

У класичній електродинаміці вакуум розглядається як повністю порожній простір – як стан із нульовими електричним та магнітним полями, відсутністю енергії та будь-якої динаміки. Проте квантова теорія поля радикально змінює це уявлення. Навіть у стані з мінімально можливою енергією електромагнітне поле не є «порожнім». Воно перебуває у так званому вакуумному стані, який характеризується наявністю невід'ємних флуктуацій. Ці флуктуації не є наслідком зовнішніх впливів або недосконалості вимірювань, а є фундаментальною властивістю квантової природи поля. У контексті квантової передачі інформації вакуумні флуктуації відіграють подвійну роль. З одного боку, вони створюють обмеження, пов'язані з квантовим шумом і невизначеністю. З іншого, саме завдяки квантовим властивостям поля стає можливим існування квантових станів, які можуть виступати носіями інформації. Таким чином, розуміння природи вакууму та квантових станів є ключовим для побудови сучасних квантових комунікаційних систем. Щоб глибше зрозуміти роль квантових флуктуацій у передачі інформації, необхідно розглянути їх фізичну природу, математичний опис і прояви в реальних системах. Водночас важливо проаналізувати як різні квантові стани електромагнітного поля можуть використовуватися для кодування, передачі та обробки інформації.

Щоб зрозуміти фізичну природу вакуумних флуктуацій, необхідно повернутися до квантового опису електромагнітного поля. Після квантування кожна мода поля еквівалентна квантовому гармонічному осцилятору з енергією, що описується виразом (1.46). Навіть у вакуумному стаhs, коли n = 0, енергія не дорівнює нулю, і вона називається енергією нульових коливань. Це означає, що поле ніколи не є повністю «спокійним», у ньому завжди присутні квантові коливання.. Ненульова енергія нульових коливань є безпосереднім наслідком квантових флуктуацій. Саме вона визначає фізичну активність вакууму. Отже, вакуумні флуктуації – це мінімальні квантові коливання електромагнітного поля, що існують у його найнижчому енергетичному стані (вакуумі) та зумовлені

принципом невизначеності Гейзенберга навіть за повної відсутності фотонів. У результаті навіть у вакуумному стані спостерігаються випадкові коливання електричного і магнітного полів. Ці флуктуації не є результатом зовнішнього шуму або теплових процесів, вони мають фундаментальну природу і є проявом квантової структури самого поля.

Розглянемо фізичну сутність вакуумних флуктуацій і їхні наслідки, переходячи від мікроскопічного опису до спостережуваних ефектів. Для однієї моди електромагнітного поля вводяться оператори квадратур (1.67). Вакуумний стан $|0\rangle$ визначається умовою

$$a\,|0\rangle = 0. \qquad (1.72)$$

У цьому стані середнє значення поля дорівнює нулю:

$$\langle 0|\mathrm{X}_1|0\rangle = 0,\ \langle 0|\,\mathrm{X}_2\,|0\rangle = 0. \qquad (1.73)$$

Проте їхні дисперсії не дорівнюють нулю: (див. (1.69)). Це означає, що навіть за відсутності фотонів електромагнітне поле здійснює квантові флуктуації. Фізично це наслідок співвідношення невизначеностей (1.68). Якби обидві квадратури одночасно дорівнювали нулю, це порушило б фундаментальний квантовий принцип невизначеності. Отже, вакуум не є станом «відсутності поля», а є станом мінімальних, але ***невід'ємних (фундаментальних) флуктуацій*** електромагнітного поля. Таким чином вакуум виступає як фізичне середовище. Розглянемо фізичні наслідки, які випливають цього твердження. Якщо вакуум має флуктуації, то він може взаємодіяти з матеріальними системами. Атом, поміщений у вакуум, не є ізольованим: він взаємодіє з флуктуаційним електромагнітним полем. Саме це приводить до спонтанного випромінювання. Класична теорія не пояснює, чому збуджений атом випромінює навіть без зовнішнього поля. У квантовій теорії пояснення таке: вакуумні флуктуації збурюють атом і ініціюють перехід у нижчий стан із випромінюванням фотона. Таким чином, спонтанне випромінювання є індукованим вакуумом процесом. Якщо помістити дві провідні пластини на малій відстані одна від одної, спектр вакуумних мод між ними змінюється. Частина мод не може існувати через граничні умови. У результаті виникає

різниця між густиною енергії вакууму всередині та зовні пластин. Це приводить до виникнення сили притягання між двома ідеальними провідними пластинами – ***ефекту Казиміра***. Сила на одиницю площі має вигляд:

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}, \tag{1.74}$$

де F – сила, A – площа пластин, c – швидкість світла, d – відстань між пластинами.

Цей ефект є прямим макроскопічним проявом вакуумних флуктуацій. Отже, ефект Казиміра – це квантовий фізичний ефект, що полягає у виникненні сили взаємодії між нейтральними провідними тілами внаслідок зміни спектра вакуумних флуктуацій електромагнітного поля між ними. Якщо граничні умови змінюються з часом (наприклад, рухома дзеркальна поверхня або модуляція параметрів резонатора), вакуумні флуктуації можуть перетворюватися на реальні фотони. Це явище відоме як ***динамічний ефект Казиміра.*** Фізично це означає, що вакуум містить потенційну енергію, яку можна перетворити на кванти випромінювання. У нелінійних оптичних середовищах подібний механізм лежить в основі параметричного народження пар заплутаних фотонів. Це квантово-оптичний процес, під час якого один фотон із більшою енергією (накачки) у нелінійному середовищі перетворюється на пару фотонів із меншою енергією, що є основним методом генерації заплутаного світла. Вакуумні флуктуації лежать в основі такого ефекту як ламбівський зсув, тобто зміщення енергетичних рівнів атома водню, зумовлене взаємодією з квантовим вакуумом.

Для протоколів квантової комунікації вакуумні флуктуації визначають стандартний квантовий рівень шуму. Навіть у відсутності зовнішніх перешкод вони обмежують точність вимірювань і передачі інформації. У гомодинному детектуванні вакуумний шум визначає мінімальний рівень шуму, і мінімальна дисперсія сигналу дорівнює вакуумному рівню. Саме тому стискання квадратур дозволяє зменшити шум нижче цього рівня, але лише за рахунок іншої квадратури. Гомодинне вимірювання – це метод детектування, який дозволяє вимірювати одну з квадратур електромагнітного поля (амплітудну або фазову)

шляхом інтерференції слабкого квантового сигналу з сильним когерентним полем – локальним осцилятором і реєстрації різниці фотострумів. Фізично це спосіб «підсилити» квантовий сигнал так, щоб можна було виміряти його флуктуації відносно вакуумного рівня шуму. Таким чином, вакуум встановлює фундаментальну межу точності передавання та детектування квантових сигналів.

Однак вакуумний стан є лише найпростішим із можливих квантових станів електромагнітного поля. Уся сукупність квантових станів – фоківські, когерентні, стиснені та заплутані – може розглядатися як різні способи «організації» цих фундаментальних флуктуацій. Іншими словами, вакуумні флуктуації утворюють базовий фон, відносно якого формуються більш складні квантові стани. Зокрема, у когерентних станах флуктуації зберігають вакуумний рівень, але зміщується середнє значення поля; у стиснених станах відбувається перерозподіл флуктуацій між спряженими змінними; у заплутаних станах кореляції між флуктуаціями різних мод поля набувають нелокального характеру. Таким чином, квантові стани електромагнітного поля безпосередньо пов'язані з вакуумними флуктуаціями: вони виникають як їх узагальнення, модифікація або корельована структура. Це природно підводить до детального розгляду різних типів квантових станів як носіїв інформації та їх ролі у квантових комунікаціях.

У класичних системах інформація передається за допомогою бітів, які можуть перебувати лише у двох станах – 0 або 1. Проте в квантовій фізиці інформація кодується у квантових станах, що відкриває принципово нові можливості для її збереження, передачі та обробки. Саме квантові стани електромагнітного поля, зокрема фотонів, виступають основними інформаційними носіями у квантових комунікаціях. Основною одиницею квантової інформації є ***кубіт***. На відміну від класичного біта, він може перебувати у суперпозиції станів: $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, де α і β – комплексні коефіцієнти, що визначають ймовірності вимірювання. Це означає, що один квантовий стан може містити більше інформації, ніж класичний біт, і описує не просто значення, а ***ймовірнісну структуру стану системи***. Це дозволяє

одночасне існування кількох станів, що забезпечує паралельність обчислень. На відміну від класичних бітів, квантові стани дозволяють використовувати квантову заплутаність для розподілених обчислень, тобто створювати корельовані системи, де стан однієї частинки визначає стан іншої незалежно від відстані. Квантовий стан не можна точно скопіювати, що забезпечує високий рівень безпеки передачі інформації.

У квантових мережах інформація зазвичай переноситься фотонами. При цьому застосовують такі основні способи кодування: поляризаційне колування – горизонтальна $|H\rangle$ і вертикальна $|V\rangle$ поляризації відповідають станам 0 і 1; фазове кодування – інформація закладена у фазі хвилі.; часове кодування – використовуються різні моменти приходу фотона.; частотне кодування – різні частоти відповідають різним станам.

В реальних системах: фоківські стани використовуються у фотонних експериментах. Вони забезпечують точне визначення кількості фотонів; когерентні стани застосовуються у лазерних системах. Вони близькі до класичних сигналів; стиснені стани використовуються для підвищення точності вимірювань. Вони дозволяють зменшити шум; заплутані стани – основа квантової криптографії та телепортації.

Розглянемо окремі приклади використання квантових станів для передачі інформації.

1. Квантовий розподіл ключів (QKD). Інформація передається у вигляді квантових станів фотонів. Фотони у певних квантових станах передають секретний ключ. Вакуумні флуктуації та принцип невизначеності гарантують, що спроба перехоплення змінює стан і може бути виявлена.

2. Квантова телепортація. Заплутані стани дозволяють передавати квантову інформацію без фізичного перенесення частинки. Вакуумні флуктуації впливають на якість каналу.

3. Квантові мережі. Використання фотонів для передачі інформації між вузлами.

Разом з тим квантові стани як носії інформації стикаються з певними викликами. Це зокрема декогеренція, яка призводить до втрати квантових властивостей; шум, зокрема вакуумні флуктуації; втрати у каналах передачі; складність детектування одиничних фотонів. Квантові стани електромагнітного поля є фундаментальними носіями інформації у квантових технологіях. Завдяки таким властивостям, як суперпозиція, заплутаність і неможливість клонування, вони забезпечують нові підходи до передачі та захисту інформації. Водночас їх використання пов'язане з низкою фізичних обмежень, що визначають напрям сучасних досліджень у сфері квантових комунікацій.

Сучасні дослідження показують, що вакуумні флуктуації можуть не лише обмежувати, але й бути ресурсом у генерації заплутаних фотонів (SPDC); у створенні стиснених станів; у квантовій метрології. Це відкриває нові можливості для використання вакууму як активного елементу квантових технологій. Вакуумні флуктуації є фундаментальною властивістю квантового світу, яка змінює класичне уявлення про «порожній простір». Вони визначають мінімальний рівень шуму, впливають на динаміку квантових систем і встановлюють фундаментальні обмеження на передачу інформації. Водночас саме квантова природа електромагнітного поля дозволяє існувати різноманітним квантовим станам, які можуть виступати ефективними носіями інформації. Використання цих станів відкриває нові можливості для створення захищених каналів зв'язку, високоточних вимірювань і розподілених квантових систем. Таким чином, вакуумні флуктуації та квантові стани не лише формують фізичну основу квантової передачі інформації, але й визначають напрямки розвитку майбутніх квантових технологій.

1.4. Способи кодування квантової інформації на фотоні

Фотон як елементарний квант електромагнітного поля є природним носієм квантової інформації в системах зв'язку. На відміну від масивних частинок, фотони практично не взаємодіють із навколишнім середовищем, що забезпечує збереження когерентності на значних відстанях. Саме тому фотонні системи є

базовою платформою для реалізації квантових комунікацій у межах квантової теорії інформації. Кодування квантової інформації на фотоні полягає у відображенні абстрактного гільбертового простору квантових станів на фізичні ступені свободи електромагнітного поля. Для фотона це означає, що інформація може бути закодована у різних його ступенях свободи: поляризації, фазі, імпульсі, часових бінів тощо. Вибір конкретного способу кодування визначає ефективність передачі, стійкість до шумів і можливість експериментальної реалізації. Для системного аналізу способів кодування квантової інформації на фотоні розглянемо спочатку квантово-оптичний опис фотонних станів, після чого можна перейти до класифікації способів кодування за ступенями свободи.

Фотон як квантова система описується вектором стану в гільбертовому просторі

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \qquad (1.75)$$

де $|0\rangle$, $|1\rangle$ – базисні стани; α, β – комплексні амплітуди; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Символ С означає множину комплексних чисел. У випадку фотона ці базисні стани відповідають фізичним характеристикам (наприклад, горизонтальній і вертикальній поляризації). Квантово-оптичний опис фотона показує, що його стан визначається вибором мод електромагнітного поля, які утворюють відповідний гільбертів простір. Однак для практичного кодування інформації доцільно обмежитися підпросторами малої розмірності, які легко реалізуються експериментально.

Найпростішим і водночас фундаментальним прикладом такого підпростору є поляризаційний ступінь свободи фотона, що природно реалізує двовимірний гільбертів простір кубіта. Базис:

$$|0\rangle = |H\rangle, |1\rangle = |V\rangle, \qquad (1.76)$$

де $|H\rangle$ - горизонтальна поляризація; $|V\rangle$ - вертикальна.

Суперпозиція:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|H\rangle + \beta\,|V\rangle. \qquad (1.77)$$

Базис:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |V\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

Також використовуються діагональні стани:

$$|+\rangle = \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, |-\rangle = \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{1.79}$$

Цей простір ізоморфний сфері Блоха:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}\,|H\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}\,|V\rangle. \tag{1.80}$$

Переваги: простота реалізації; доступність оптичних елементів. Недоліки: чутливість до середовища (волоконні спотворення). Поляризаційне кодування є фундаментальним, оскільки забезпечує природну реалізацію кубіта. Незважаючи на концептуальну простоту та зручність поляризаційного кодування, у реальних каналах зв'язку, зокрема у волоконно-оптичних системах, воно зазнає впливу випадкових перетворень, що ускладнює підтримання стабільності базису. Це стимулює пошук альтернативних способів кодування, менш чутливих до таких впливів. Одним із них є фазове кодування, у якому інформація переноситься у відносну фазу між квантовими станами.

Фазове кодування базується на різниці фаз між двома шляхами фотона. Стан:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\phi}\,|1\rangle), \tag{1.81}$$

де ϕ – фазовий зсув. Оператор фазового зсуву:

$$U(\phi) = e^{i\phi\hat{n}}, \tag{1.82}$$

де $\hat{n}$ – оператор числа фотонів. Цей тип кодування реалізується за допомогою інтерферометрів. Особливості: висока стабільність у волокнах; використовується в квантовій криптографії. Фазове кодування має важливу властивість: інформація закодована не в абсолютній фазі, а у ***зсуві фази*.** Це підвищує стійкість до деяких типів шумів. Фазове кодування демонструє переваги завдяки використанню інтерференційних ефектів, однак його реалізація потребує високої стабільності оптичних шляхів. У зв'язку з цим виникає потреба

у ще більш стійких до зовнішніх впливів схемах. Такою альтернативою є часове кодування, в якому інформація переноситься у дискретні часові моди фотона.

У часовому кодуванні інформація кодується у часі приходу фотона:

$$| 0\rangle = | t_1\rangle, \quad | 1\rangle = | t_2\rangle. \tag{1.83}$$

Суперпозиція:

$$| \psi\rangle = \alpha | t_1\rangle + \beta | t_2\rangle. \tag{1.84}$$

Переваги: стійкість до декогеренції; ефективність у довгих каналах. Цей підхід особливо корисний у волоконно-оптичних системах. Часове кодування дозволяє ефективно працювати у волоконно-оптичних каналах, однак воно, як і попередні методи, зазвичай обмежується двовимірними просторами станів.

Для підвищення інформаційної ємності каналу доцільно розглянути інші ступені свободи фотона, зокрема його просторову структуру та орбітальний момент імпульсу, які природно описуються багатовимірними гільбертовими просторами. Фотони можуть нести орбітальний момент імпульсу (ОАМ). Простими словами: фотон може бути «скручений вправо», «вліво», або сильніше/слабше. Це дає не 2 стани, а багато, і можна кодувати більше інформації.

Стан:

$$| \psi\rangle = \sum_l \alpha_i | l_i\rangle, \tag{1.85}$$

де l_i – моди орбітального моменту.

Це дозволяє перейти від кубітів до кудітів (багатовимірних систем): d > 2. Це відкриває можливість підвищення інформаційної місткості каналу. Використання просторових мод та орбітального моменту імпульсу відкриває можливість переходу від двовимірних систем до багатовимірних квантових станів. Це узагальнення приводить до концепції кодування у просторі розмірності d > 2, що дозволяє значно підвищити інформаційну щільність передавання. У цьому контексті доцільно розглянути загальні принципи багатовимірного квантового кодування.

У загальному випадку

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |i\rangle. \quad (1.86)$$

де d – розмірність простору. Тобто замість 2 станів маємо багато (d станів). Це означає більше інформації в одному фотоні і швидшу передачу. Інформаційна місткість зростає: $I \leq log_2 d$. Це пов'язано з межею Голєво $\chi \leq S(\rho)$. Таким чином, використання багатовимірних просторів дозволяє підвищити ефективність передачі.

Багатовимірні системи забезпечують зростання інформаційної місткості, проте подальше розширення можливостей квантових комунікацій пов'язане не лише зі збільшенням розмірності простору, але й із використанням квантової кореляції між частинками. Це приводить до розгляду заплутаних фотонних станів, які відіграють ключову роль у таких протоколах, як телепортація та надщільне кодування.

Квантова інформація може кодуватися у заплутаних станах (1.71). Це означає, що є два фотони, але їх не можна розглядати окремо. Якщо виміряти один, то другий одразу «знає» результат.

Властивість:

$$\rho_A = Tr_B(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|) = \frac{I}{2}. \quad (1.87)$$

Це означає, що інформація розподілена нелокально.

Заплутані стани значно розширюють функціональні можливості квантових систем, однак у реальних умовах їх використання ускладнюється впливом шуму та декогеренції. Фотон може загубитися, змінити фазу, втратити суперпозицію. Будь-яка взаємодія з навколишнім середовищем призводить до часткової втрати квантових властивостей, що вимагає формального опису цих процесів. Це приводить до зміни матриці густини:

$$\rho \to E(\rho) \quad (1.88)$$

і зумовлює необхідність введення поняття квантового каналу та математичного опису шуму. Канал описується відображенням:

$$E(\rho) = \sum_a E_a \rho E_a^\dagger, \tag{1.89}$$

яке узагальнює всі типи шуму, а саме: втрати; декогеренцію; фазові флуктуації.

Матриця густини:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid. \tag{1.90}$$

Розглянемо приклади.

1. Поляризаційний кубіт. Фотон у стані:

$$\mid \psi\rangle = \frac{\mid H\rangle + \mid V\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1.91}$$

відповідає діагональній поляризації.

2. Фазове кодування. Якщо $\phi = \pi$, то

$$\mid \psi\rangle = \frac{\mid 0\rangle - \mid 1\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{1.92}$$

3. Time-bin. Фотон приходить у двох можливих часових інтервалах – це кубіт у часовому базисі.

Кодування квантової інформації на фотоні є фундаментальним елементом квантових комунікацій. Різні способи кодування – поляризаційне, фазове, часове, просторове – відповідають різним виборам базису у гільбертовому просторі і дозволяють адаптувати систему до конкретних умов передачі. Вибір способу кодування є критичним для ефективності та надійності квантових каналів зв'язку, а фотонні системи залишаються найбільш перспективною платформою для реалізації таких технологій.

1.5. Фотони у системах квантової передачі інформації

Сучасні системи передачі інформації дедалі більше орієнтуються на використання квантових принципів, які дозволяють досягати рівня безпеки та ефективності, недосяжного в класичних технологіях. У цьому контексті особливе місце займають фотони – кванти електромагнітного поля, які виступають основними носіями інформації у квантових комунікаційних

системах. Фотон є фундаментальним носієм квантової інформації. Він поєднує в собі властивості хвилі та частинки, що робить його унікальним об'єктом для передачі інформації на квантовому рівні. У класичній оптиці світло використовується для передавання сигналів за рахунок інтенсивності, фази або поляризації. У квантовій оптиці інформація кодується безпосередньо у квантові стани фотонів – дискретні (фоківські) або когерентні, стиснуті та заплутані стани. Використання фотонів як носіїв інформації дозволяє реалізовувати протоколи квантового шифрування, телепортації квантових станів і передачі неперервних змінних із високою точністю. Фундаментальна фізика фотона визначає межі квантової комунікації: вакуумний шум, спонтанне випромінювання, дисперсія та втрати в середовищі.

Як носії квантової інформації фотони мають низку переваг. Це зокрема відносно слабка взаємодія з навколишнім середовищем, що забезпечує низький рівень декогеренції та дозволяє передавати інформацію на великі відстані; висока швидкість передачі (фотони рухаються зі швидкістю світла, що забезпечує мінімальні затримки); гнучкість кодування (інформаця може бути закодована у поляризації, фазі, частоті, часових інтервалах); сумісність з існуючою інфраструктурою (фотони можуть передаватися через оптичні волокна, що вже широко використовуються у телекомунікаціях).

Щоб зрозуміти роль фотона у квантовій передачі інформації, спочатку необхідно розглянути його квантові стани та можливості їх кодування. Для цього використовуються як ***дискретні змінні*** (число фотонів, поляризація), так і ***неперервні змінні*** (квадратури поля). Квантові властивості фотона забезпечують фундаментальність (невід'ємність) квантових флуктуацій (фундаментальний шум); можливість створення некласичних станів світла (стиснуті, заплутані); захист інформації від класичного перехоплення завдяки принципам невизначеності та заплутаності.

Розглянемо кодування інформації у фотоні. Фотон має кілька фізичних ступенів свободи, які можна використати для кодування кубіта або більш складної квантової інформації. Інформацію можна кодувати у момент приходу

фотона або в його просторовій моді. Наприклад, два різні часові імпульси можуть утворювати базис кубіта. Фізично це означає, що квантова інформація пов'язана не лише з внутрішніми властивостями фотона, а і зі структурою електромагнітного поля в просторі та часі. Як згадувалося вище, існують два основні підходи до фотонної квантової інформації:

1. Дискретні змінні (DV) – кодування в однофотонних станах (поляризація, число фотонів).

2. Неперервні змінні (CV) – кодування у квадратурах електромагнітного поля.

Дискретні квантові змінні фотона найчастіше представлені: Фоківськими станами |n⟩, де n — точне число фотонів у моді і поляризаційними станами, що утворюють двохвимірний простір (наприклад, горизонтальна |H⟩ та вертикальна |V⟩ поляризації). Два ортогональні стани поляризації, наприклад горизонтальна |H⟩ та вертикальна |V⟩ утворюють базис двовимірного гільбертового простору. Довільний поляризаційний кубіт можна записати у вигляді суперпозиції поляризаційних станів (1.77). Таким чином, інформація закодована у співвідношенні амплітуд і фаз між двома можливими поляризаційними станами одного фотона. Фотон у такому стані є елементарним носієм кубіта для протоколів типу **BB84** у квантовій криптографії. Для протоколів, що використовують неперервні змінні, інформація кодується у **квадратурах поля** (1.67). Фізична сутність квадратур: X_1 відповідає амплітудній складовій поля; X_2 – фазовій складовій. У цьому підході інформація кодується в неперервних значеннях цих величин. Середнє значення та дисперсія квадратур визначають амплітуду та фазу сигнала.

Для кодування інформації часто використовуються когерентні стани |α⟩, де α – комплексна амплітуда та стиснуті стани, і де дисперсія однієї квадратури менша за вакуумний рівень:

$$\Delta X_i < \frac{1}{2}, \qquad i = 1 \text{ або } 2. \tag{1.93}$$

Це дозволяє зменшити квантовий шум і підвищити точність вимірювання. Заплутані фотони утворюють ресурс для квантової передачі інформації, оскільки їхні стани не можуть бути представлені як добуток станів окремих фотонів:

$$| \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| H\rangle_A | V\rangle_B + | V\rangle_A | H\rangle_B), \tag{1.94}$$

де фотони A і B поділені між відправником і отримувачем.

Властивості заплутаних фотонів дозволяють реалізовувати квантову телепортацію; виконувати квантове шифрування з гарантією безпеки; створювати корельовані некласичні стани для протоколів неперервних змінних. Під час передавання фотонів через оптичні волокна чи вільний простір слід враховувати: втрати: фотон може бути поглинутий; дисперсію: зміна форми хвильового пакета; декогеренцію: руйнування когерентності чи заплутаності. Математично це описується через оператори знищення a із трансформацією:

$$a \to \sqrt{\eta}a + \sqrt{1-\eta}v, \tag{1.95}$$

де η – коефіцієнт пропускання, v – оператор шумового каналу. Цей підхід дозволяє моделювати квантові канали та оцінювати ефективність передавання інформації. Для зчитування інформації з фотонів у протоколах неперервних змінних застосовуються:

1. Гомодинне вимірювання: дозволяє вибірково вимірювати одну квадратуру X_ϕ:

$$X_\phi = \frac{1}{2}\left(a\, e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}\right), \tag{1.96}$$

де ϕ – фаза локального осцилятора.

2. Гетеродинне вимірювання.

Гетеродинне вимірювання – це метод квантової оптики, який дозволяє одночасно отримувати інформацію про обидві квадратури електромагнітного поля (X_1 та X_2) шляхом змішування квантового сигналу з локальним осцилятором, частота якого відрізняється від частоти сигналу. На відміну від гомодинного вимірювання, де можна вибрати одну квадратуру для детектування, гетеродинна схема «перетворює» обидві квадратури у ***змішаний сигнал, що***

реєструється фотодетекторами. Гетеродинне вимірювання одночасно отримує інформацію про обидві квадратури, але з додатковим шумом. Це критично для протоколів кодування неперервних змінних, оскільки точність вимірювань обмежується вакуумними флуктуаціями.

Логічна ієрархія використання фотонів наступна: дискретні стани (фоківські, поляризаційні) – для кубітів і безпечного кодування; когерентні та стиснуті стани – для протоколів неперервних змінних, мінімізації квантового шуму; заплутані стани – для корельованих каналів, телепортації та квантового шифрування. Ця ієрархія забезпечує ефективність і безпеку квантової комунікації, адаптуючи властивості фотона під конкретний протокол.

Приклади застосувань:

1. Квантова криптографія BB84: поляризаційні стани фотона кодують біт.

2. Протоколи неперервних змінних: кодування амплітуди та фази когерентного стану; стиснуті стани зменшують шум.

3. Квантова телепортація: заплутані фотони передають стан між відправником і отримувачем.

4. Квантові датчики і надточні вимірювання: використання стиснутих та заплутаних станів для підвищення чутливості.

У квантових мережах фотони виконують функцію: «переносників» квантової інформації між вузлами; з'єднувальних елементів у квантових повторювачах; основи для побудови квантового інтернету.

Фотони є основними носіями квантової інформації завдяки своїм унікальним фізичним властивостям. Вони можуть бути реалізовані у вигляді дискретних станів для кубітів, когерентних і стиснутих станів для неперервних змінних, заплутаних станів для корельованих каналів і телепортації. Фотони забезпечують ефективну передачу квантових станів на великі відстані, підтримують різноманітні способи кодування інформації та інтегруються з існуючими телекомунікаційними технологіями. Попри наявність обмежень, пов'язаних із втратами, шумом і декогеренцією, фотонні системи залишаються основою сучасних квантових комунікацій. Подальший розвиток джерел,

детекторів і каналів передачі відкриває перспективи створення масштабованих квантових мереж і глобального квантового інтернету.

РОЗДІЛ 2. ФІЗИКА ОДИНОЧНОГО КУБІТА ТА ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМ

2.1. Дворівнева система як фундаментальна модель обробки даних

У квантовій фізиці надзвичайно складні системи – атоми, молекули, тверді тіла, електромагнітні поля – описуються багатовимірними гільбертовими просторами станів. Проте виявляється, що у великій кількості фізичних ситуацій реальна динаміка зводиться до взаємодії лише двох енергетичних (квантових) рівнів. Саме тому дворівнева система є не просто зручною математичною абстракцією, а фундаментальною фізичною моделлю сучасної квантової теорії. З фізичної точки зору дворівнева система – це квантовий об'єкт, який може перебувати у двох ортогональних станах і в їхніх суперпозиціях. З точки зору квантової передачі інформації дворівнева система є фізичною реалізацією квантового біта (кубіта) – мінімальної одиниці квантової інформації.

Дворівнева модель лежить в основі опису спіну електрона, опису двох вибраних енергетичних рівнів атома, поляризації фотона, надпровідних та іонних кубітів, квантових точок, центрів NV у діаманті. NV-центр (Nitrogen–Vacancy center) – це точковий дефект кристалічної ґратки діаманту, що складається з атома азоту N, який заміщує атом вуглецю, та сусідньої вакансії V – «порожнього» вузла ґратки. Таким чином, ця модель є універсальною мовою квантової фізики.

У попередньому розділі ми розглядали фотон як квант збудження електромагнітного поля. Проте для кодування, передачі та обробки квантової інформації недостатньо лише знати природу фотона – необхідно розуміти, як поводиться дискретна система з двома можливими станами, між якими можна створювати суперпозиції та здійснювати керовані переходи. Щоб побудувати фізику кубіта, спочатку потрібно усвідомити глибинну роль дворівневої системи в квантовій теорії. Через це розглянемо структуру простору станів дворівневої системи, її гамільтоніан та енергетичні властивості, геометричну інтерпретацію станів, динаміку під дією зовнішнього поля.

Дворівнева система має два стаціонарні стани (рис. 2.1):

$$|0\rangle \text{ (нижній рівень)}, \quad |1\rangle \text{ (верхній рівень)}.$$

Їм відповідають енергії E_0 та E_1 , причому

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \hbar\omega_0, \tag{2.1}$$

де ω_0 – частота переходу між рівнями.

Нижній рівень – стабільний стан. Верхній – збуджений. Перехід супроводжується поглинанням або випромінюванням кванта енергії $\hbar\omega_0$.

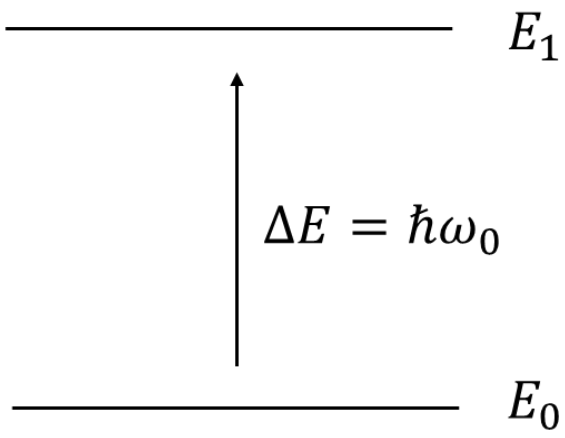


Рис. 2.1. Енергетична схема дворівневої системи з енергетичним розривом $\Delta E = \hbar\omega_0$: E_0 – нижній рівень, основний стан; E_1 – верхній рівень, збуджений стан

Ці базисні стани задовольняють умови ортонормованості:

$$\langle 0 \mid 0 \rangle = 1, \qquad \langle 1 \mid 1 \rangle = 1, \qquad 0 \mid 1\rangle = 0. \tag{2.2}$$

де $|0\rangle$, $|1\rangle$ – базисні квантові стани; $\langle\psi \mid \phi\rangle$ – скалярний добуток станів.

Загальний стан системи має вигляд суперпозиції (1.75). Основна особливість полягає в тому, що система може перебувати не лише в одному із станів, а в їхній когерентній суперпозиції. Будь-який чистий стан дворівневої системи можна записати у вигляді:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \tag{2.3}$$

де θ – полярний кут; φ – азимутальний кут.

Кожній парі (θ, φ) відповідає одна точка на поверхні сфери.

Це означає, що стан можна зобразити як точку на одиничній сфері – сфері Блоха (рис. 2.2).

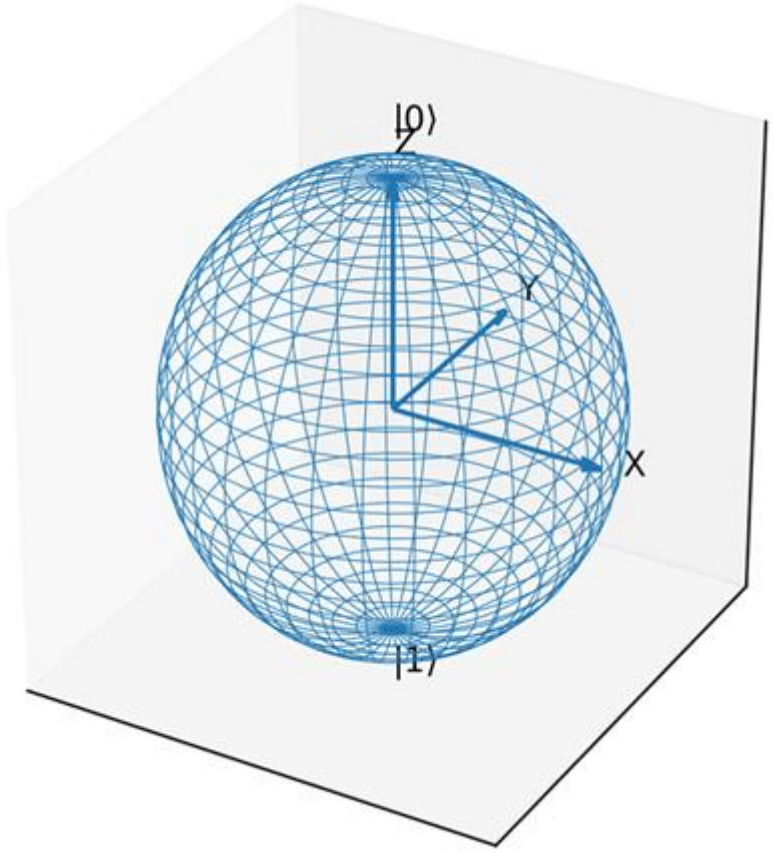


Рис. 2.2. Геометрична інтерпретація чистого стану кубіта на сфері Блоха

На рис. 2.2 вісь **Z** відповідає базису |0⟩, |1⟩; північний полюс – стан |0⟩; південний полюс – стан |1⟩; вісь **X –** суперпозиції типу $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$; вісь **Y –** суперпозиції з фазовим зсувом ± i; екватор – рівноймовірні суперпозиції.

Точка на поверхні сфери – чистий стан. Вектор від центра до точки – вектор Блоха. Довжина вектора дорівнює 1 для чистого стану. Для змішаних станів вектор лежить всередині сфери. Відносна фаза φ визначає положення на екваторі, але не впливає на класичні ймовірності. Саме фаза робить систему квантовою.У найпростішому випадку гамільтоніан дворівневої системи можна записати як:

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \tag{2.4}$$

де ω_0 – частота переходу між рівнями; σ_z – матриця Паулі:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Фізично це означає, що між рівнями існує енергетичний розрив:

$$\Delta E = \hbar\omega_0. \quad (2.6)$$

Еволюція стану визначається рівнянням Шредінгера:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\,\psi(t)\rangle. \quad (2.7)$$

Для вільної дворівневої системи це призводить до зміни відносної фази:

$$|\,\psi(t)\rangle = \alpha\,|\,0\rangle + \beta\,e^{-i\omega_0 t}\,|\,1\rangle. \quad (2.8)$$

Тобто відбувається зміна відносної фази між компонентами стану

Фізично це означає обертання вектора стану навколо осі z на сфері Блоха (рис. 2.3).

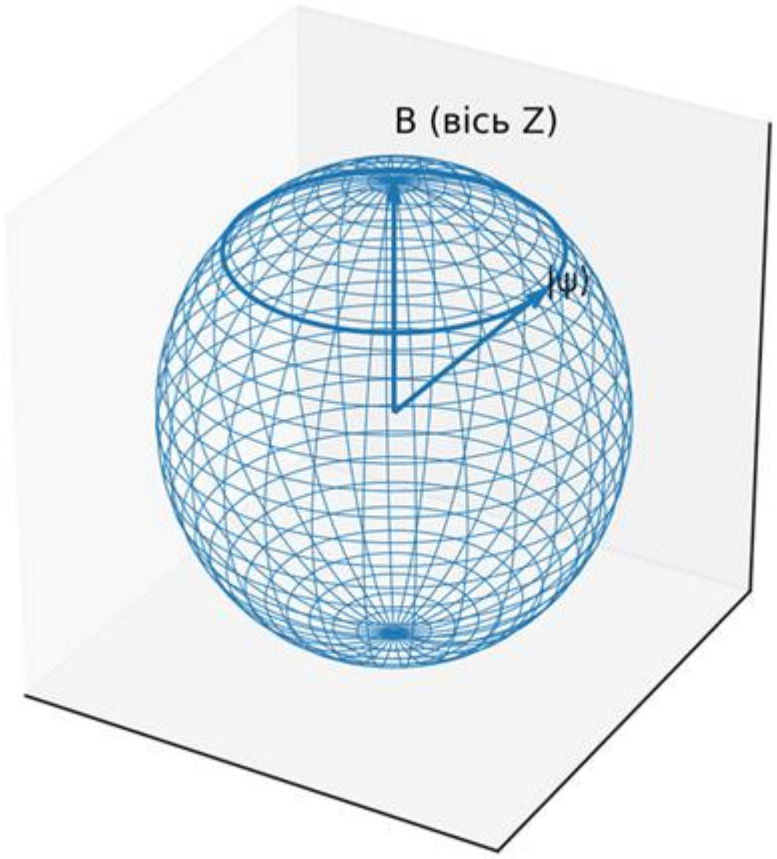


Рис. 2.3. Квантова прецесія навколо вісі Z:
вертикальна стрілка – напрям зовнішнього поля B (вісь Z); нахилений вектор – початковий стан |ψ⟩; коло навколо осі Z – траєкторія прецесії

Це явище називають ***квантовою прецесією***. Квантова прецесія виникає тоді, коли кубіт перебуває в зовнішньому полі (наприклад, магнітному полі B), яке визначає виділену вісь, зазвичай вісь Z.

Гамільтоніан має вигляд

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\,\omega_0}{2}\sigma_z\,, \tag{2.9}$$

де ω_0– власна (резонансна) кутова частота переходу між рівнями кубіта; σ_z – матриця Паулі.

Якщо стан не є власним станом оператора σ_z то його амплітуди залишаються незмінними, але відносна фаза між компонентами змінюється з часом. Геометрично це виглядає як обертання (прецесія) вектора Блоха навколо осі Z. Якщо прикласти зовнішнє резонансне електромагнітне поле, гамільтоніан набуває вигляду:

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\,\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\Omega cos(\omega t)\sigma_x, \tag{2.10}$$

де Ω – частота Рабі (інтенсивність взаємоді); σ_x – матриця Паулі:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

У резонансному випадку система починає періодично переходити між рівнями з ймовірністю:

$$P_{0\to1}(t) = sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{2.12}$$

де Ω – частота Рабі (визначається амплітудою керуючого поля); t – час взаємодії. Це явище називається ***Рабі-осциляції*** (рис. 2.4). По осі Y відкладено ймовірність перебування в стані $|1\rangle$. Крива осцилює між 0 і 1. Це означає, що система періодично переходить $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Рабі-осциляції виникають тоді, коли дворівнева система (кубіт) перебуває під дією резонансного зовнішнього поля з частотою, близькою до власної частоти переходу ω_0. Зовнішнє поле «перекидає» квантовий вектор стану на сфері Блоха. Геометрично це відповідає обертанню вектора Блоха навколо осі, перпендикулярної до осі Z. Це фізична реалізація квантового логічного елемента.

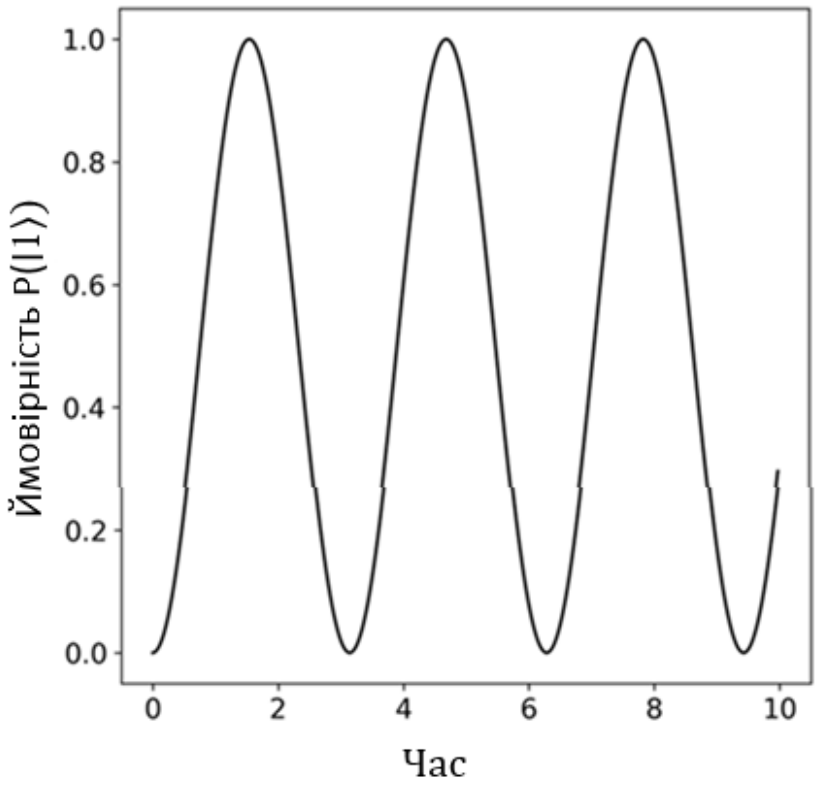


Рис. 2.4. Рабі-осциляції ймовірності переходу між рівнями під дією резонансного поля

Приклади фізичних реалізацій:

1. Спін – 1/2 електрона. У магнітному полі виникає розщеплення рівнів (ефект Зеємана):

$$\Delta E = g\,\mu_B B, \tag{2.13}$$

де g – g–фактор; μ_B) – магнетон Бора; B – магнітна індукція.

2. Два рівні атома. Обираються два енергетичних рівні атома, між якими можливий оптичний перехід.

3. Поляризація фотона. Базис:

$$|\,\mathrm{H}\rangle, \quad |\,\mathrm{V}\rangle.$$

Суперпозиції відповідають круговій або діагональній поляризації.

Отже, дворівнева система є універсальною та фундаментальною моделлю квантової фізики. Її значущість полягає в тому, що вона є найпростішою нетривіальною квантовою системою; містить усі ключові квантові явища: суперпозицію, фазу, когерентність; має зручну геометричну інтерпретацію

(сфера Блоха); реалізується в широкому спектрі фізичних систем; є фізичною основою кубіта – носія квантової інформації. Саме через простоту й універсальність дворівнева система стала фундаментальною мовою квантової теорії та квантових інформаційних технологій.

Проте в реальних квантових технологіях нас цікавить не абстрактний двовимірний простір станів, а конкретна фізична система, що може виконувати функцію носія інформації. Кубіт у прикладному сенсі – це не лише математичний стан, а матеріальний об'єкт, який можна: підготувати у заданому стані, керовано еволюціонувати, ізолювати від шуму, зчитати без повного руйнування обчислювального процесу. Таким чином, фізика кубіта виходить за межі формалізму дворівневої моделі і переходить у площину експериментальної реалізації та інженерних обмежень.

2.2. Геометричне представлення станів та сфера Блоха

У попередньому параграфі було показано, що кубіт як фізичний об'єкт реалізується у різних фізичних системах – надпровідних контурах, іонних пастках, фотонних полях або спінових системах. Незважаючи на відмінність фізичної природи цих систем, їхній квантовий стан описується однаковою математичною моделлю – дворівневою квантовою системою. Квантовий стан кубіта математично описується вектором у двовимірному гільбертовому просторі. Такий опис є повністю коректним з точки зору квантової механіки, однак він не завжди дає достатньо наочне фізичне уявлення про еволюцію квантового стану. Для фізичного аналізу квантових процесів, особливо тих, що пов'язані з керуванням кубітами, часто використовують геометричне представлення станів кубіта у вигляді сфери Блоха.

Сфера Блоха дозволяє інтерпретувати квантовий стан як напрямок у тривимірному просторі, а квантові операції – як обертання цього напрямку. Завдяки цьому складні квантові процеси набувають наочної геометричної інтерпретації. Сфера Блоха є геометричним представленням стану одного кубіта у вигляді точки на поверхні одиничної сфери. Вона дозволяє

інтерпретувати квантові стани, еволюцію та квантові операції як геометричні перетворення. Завдяки цьому складні квантові процеси можна розглядати як обертання вектора стану в тривимірному просторі. Використання сфери Блоха відіграє важливу роль у квантовій оптиці, фізиці атомних систем, надпровідних кубітах та квантових обчисленнях. Вона дозволяє не лише інтерпретувати математичні формули, а і наочно пояснювати механізми квантового керування та декогеренції. Раніше було показано, що кубіт описується суперпозицією базисних станів (1.77), де комплексні коефіцієнти α та β задовольняють умову нормування (1.60). Такий запис містить чотири дійсні параметри (дійсні та уявні частини двох комплексних чисел). Проте глобальна фаза стану не має фізичного значення. Тому фактично квантовий стан кубіта описується лише двома незалежними параметрами. Саме це дозволяє представити стан геометрично на поверхні сфери. Використовуючи сферичні координати, стан кубіта можна записати у вигляді (2.3). Кожній парі кутів (θ, φ) відповідає точка на поверхні сфери одиничного радіуса. У геометричному представленні стан кубіта описується ***вектором Блоха***, що виходить з центра сфери (рис. 2.5). Північний полюс сфери відповідає стану $|0\rangle$, а південний полюс – стану $|1\rangle$. Будь-яка інша точка на поверхні відповідає квантовій суперпозиції цих двох станів. Координати вектора Блоха визначаються як $x = sin\theta cos\varphi$, $y = sin\theta sin\varphi$, $z = cos\theta$. Таким чином, квантовий стан кубіта можна інтерпретувати як напрямок у тривимірному просторі.

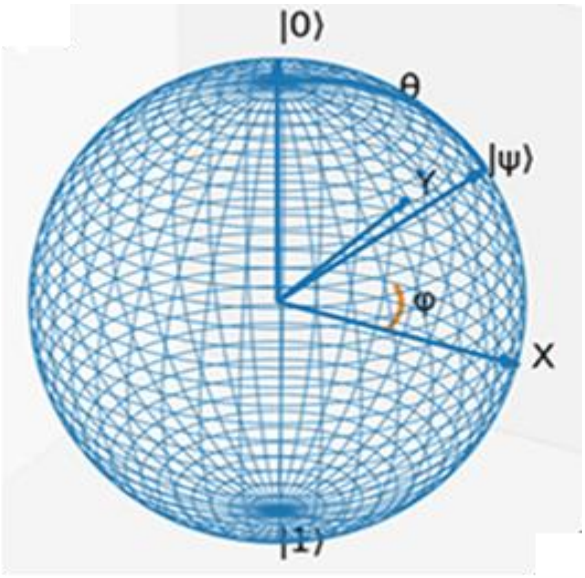


Рис. 2.5. Геометричне представлення стану кубіта на сфері Блоха. Вектор $|\psi\rangle$ задається полярним кутом θ та азимутальним кутом φ

Осі сфери Блоха мають безпосередній фізичний зміст. Вони пов'язані з матрицями Паулі

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ці матриці є фундаментальними операторами для опису дворівневих квантових систем і відповідають вимірюванням у різних базисах. Вісь Z відповідає стандартному обчислювальному базису $|0\rangle, |1\rangle$. Вісь X відповідає суперпозиціям

$$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}, \qquad \frac{|0\rangle-|1\rangle}{2}. \qquad (2.15)$$

Вісь Y відповідає суперпозиціям

$$\frac{|0\rangle + i\,|1\rangle}{2}, \qquad \frac{|0\rangle - i\,|1\rangle}{2}. \qquad (2.16)$$

Таким чином, різні напрямки на сфері Блоха відповідають різним квантовим базисам вимірювання (рис. 2.6).

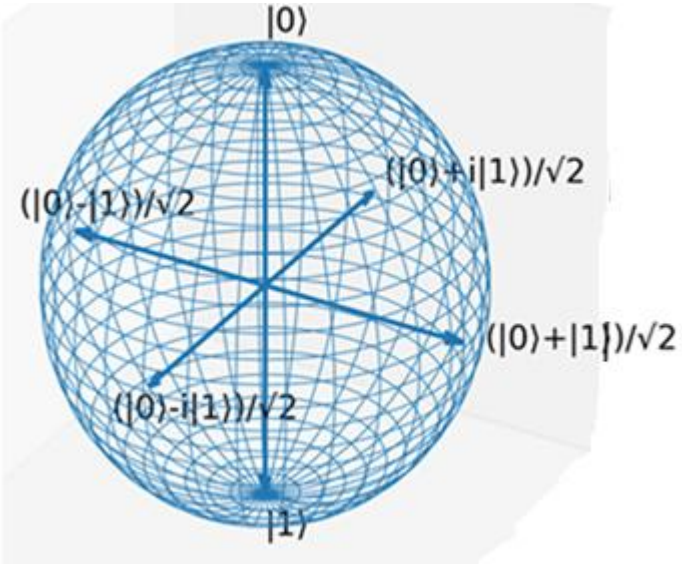


Рис. 2.6. Розташування основних квантових базисів на сфері Блоха

Важливою особливістю сфери Блоха є те, що вона дозволяє геометрично відрізнити чисті та змішані стани. Чисті стани розташовані на поверхні сфери, тоді як змішані стани знаходяться всередині сфери. Густинна матриця кубіта може бути записана у вигляді

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \tag{2.17}$$

де I – одиничний оператор (одинична матриця) у просторі станів кубіта; $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – вектор матриць Паулі; $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ – вектор Блоха.

Член $\frac{1}{2} I$ відповідає повністю змішаному стану, у якому

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

У цьому стані система має однакову ймовірність бути в |0⟩ і |1⟩ і відсутня квантова когерентність. На сфері Блоха $\frac{1}{2} I$ відповідає центру сфери. Вектор $\vec{r}$ визначає відхилення стану від центру. Тоді для чистого стану $|\vec{r}| = 1$ (поверхня сфери), для змішаного $|\vec{r}| < 1$ (всередині сфери). Тобто довжина вектора Блоха характеризує ступінь когерентності квантового стану (рис. 2.7).

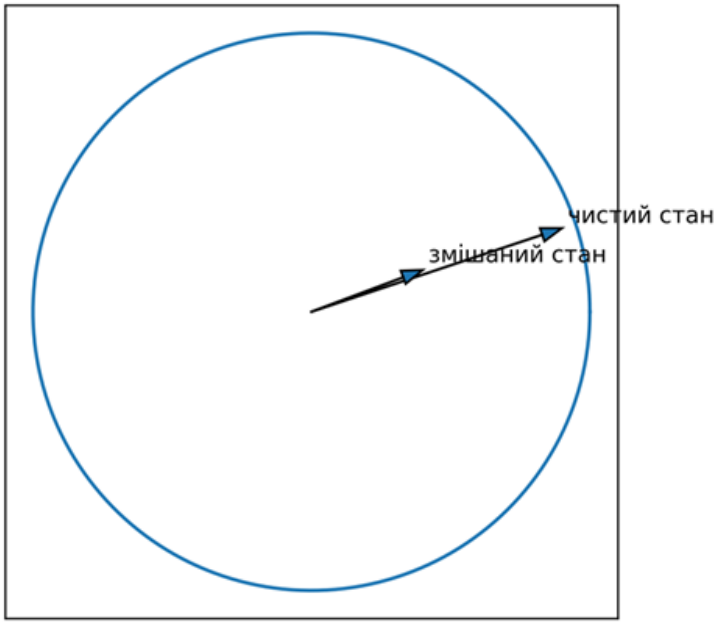


Рис. 2.7. Геометрична інтерпретація чистих і змішаних станів кубіта

Однією з найважливіших властивостей сфери Блоха є те, що квантова еволюція кубіта відповідає обертанню вектора Блоха. Наприклад, якщо гамільтоніан системи має вигляд

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \tag{2.19}$$

то вектор стану здійснює прецесію навколо осі Z (рис.2.3). У цьому випадку змінюється лише фаза стану, тоді як ймовірності залишаються сталими. У квантових обчисленнях однокубітні операції реалізуються як обертання сфери Блоха.

Загальна унітарна операція може бути записана як

$$U = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2}, \tag{2.20}$$

де $\vec{n}$ – вісь обертання, θ – кут обертання, $\vec{\sigma}$ – вектор операторів Паулі $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, які генерують обертання квантового стану кубіта на сфері Блоха. Наведений вираз описує унітарне обертання стану кубіта навколо осі $\vec{n}$ на кут θ на сфері Блоха (рис.2.8). У геометрії сфери Блоха ця формула означає, що квантові операції – це обертання вектора Блоха у просторі.

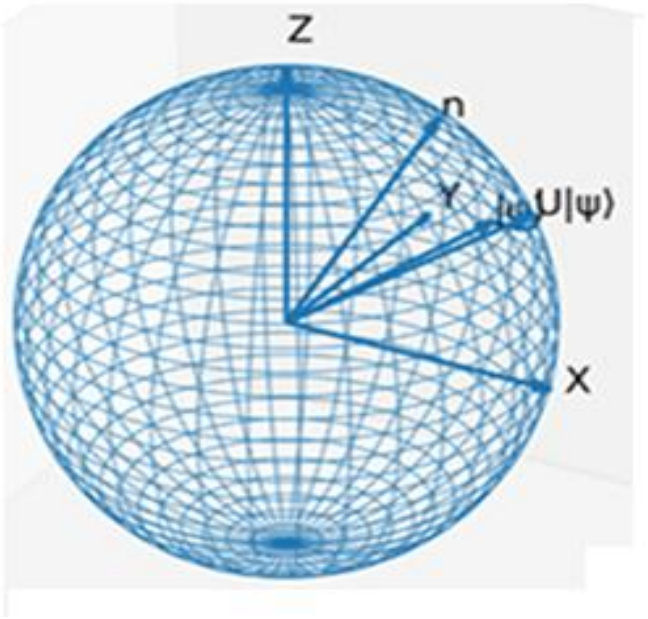


Рис. 2.8. Геометрична інтерпретація квантового гейта як обертання вектора стану кубіта |ψ⟩| навколо осі $\vec{n}$ на кут θ на сфері Блоха

Тобто квантовий гейт просто повертає вектор стану кубіта навколо певної осі.

Наприклад:

Гейт	Геометрична інтерпретація
X	обертання навколо осі X
Y	обертання навколо осі Y
Z	обертання навколо осі Z

На рисунку 2.8 $|\psi\rangle$ – це початковий вектор стану кубіта; $\vec{n}$ – напрям, навколо якого відбувається обертання (вісь обертання); $U|\psi\rangle$ – новий стан після дії гейта. Крива на сфері, що показує траєкторію обертання на кут θ.

Квантовий гейт – це унітарна операція над кубітом або системою кубітів, що реалізує кероване перетворення їхнього квантового стану. Інакше кажучи, гейт – це елементарна логічна операція квантового комп'ютера, аналог логічних елементів (AND, OR, NOT) у класичній обчислювальній техніці. Фізично

квантовий гейт – це керована взаємодія кубіта із зовнішнім полем, наприклад, мікрохвильовий імпульс у надпровідному кубіті; лазерний імпульс у іонній пастці; оптичний елемент у фотонному кубіті.

Розглянемо приклади:

1. Створення суперпозиції. Початковий стан $|0\rangle$ розташований у північному полюсі сфери. Після дії операції Адамара система переходить у стан

$$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}. \qquad (2.21)$$

На сфері Блоха це відповідає точці на екваторі сфери.

2. Рабі-осциляції. При дії резонансного електромагнітного поля відбувається періодичне обертання вектора Блоха між полюсами сфери – Рабі-осциляції (рис.2.4). Це відповідає періодичним переходам $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$.

3. Декогеренція. Взаємодія кубіта із середовищем призводить до зменшення довжини вектора Блоха. У геометричному представленні це виглядає як поступове переміщення точки стану (вектора) від поверхні сфери до її центра (рис.2.9). Фізично це означає:

$$\langle\sigma_x(t)\rangle = e^{-t/T_2}\cos(\omega_0 t), \qquad (2.22)$$

де T_2 – час фазової когерентності, ω_0 – власна частота кубіта.

Отже, через взаємодію із середовищем фаза суперпозиції поступово втрачає когерентність. Амплітуда осциляцій експоненційно зменшується. Геометрично на сфері Блоха це означає: вектор Блоха поступово скорочується та прямує до центру сфери.

Сфера Блоха є фундаментальним інструментом геометричної інтерпретації станів кубіта. Вона дозволяє представити квантовий стан напрямок у тривимірному просторі (у вигляді вектора на поверхні сфери) та наочно описувати квантову еволюцію. Головні переваги цього представлення полягають у тому, що чисті стани відповідають точкам на поверхні сфери; змішані стани знаходяться всередині сфери; квантові гейти інтерпретуються як обертання; декогеренція проявляється як зменшення довжини вектора стану. Завдяки цій геометричній інтерпретації складні процеси квантової динаміки

стають інтуїтивно зрозумілими. Сфера Блоха широко використовується при аналізі квантових алгоритмів, розробці систем керування кубітами та дослідженні фізичних механізмів квантової декогеренції.

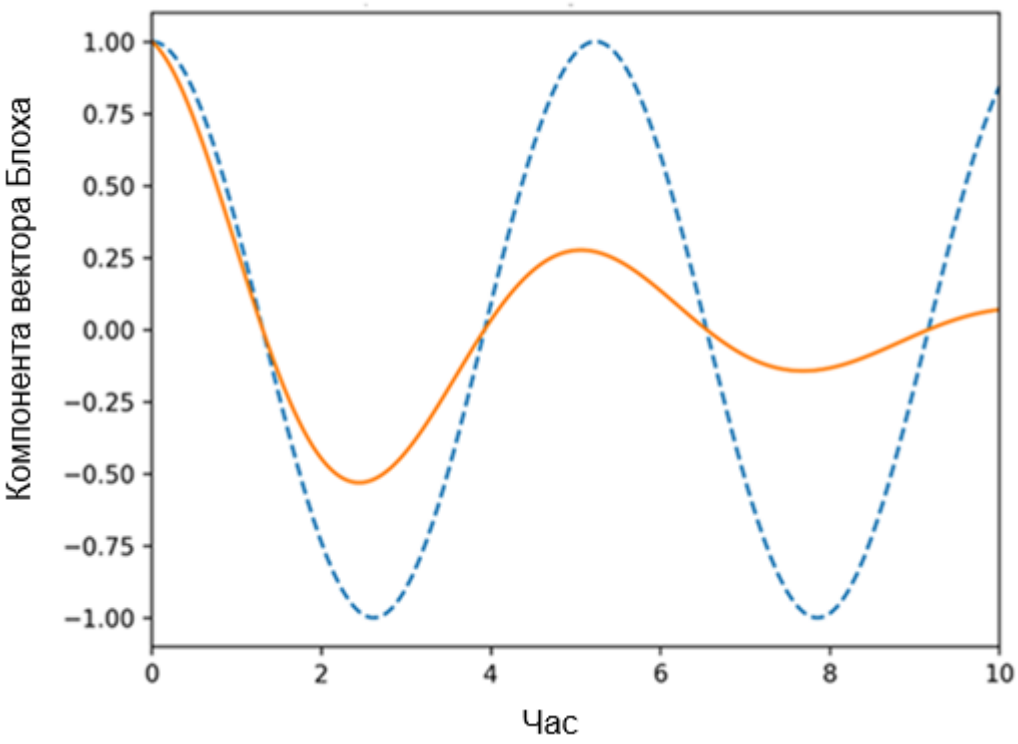


Рис. 2.9. Декогеренція T_2 як затухання когерентної еволюції кубіта: пунктирна крива – ідеальна когерентна еволюція кубіта; суцільна крива – реальна еволюція з декогеренцією.

2.3. Кубіт як носій квантової інформації

У класичній теорії інформації основною одиницею є біт, який може перебувати лише в одному з двох можливих станів – 0 або 1. Класичні інформаційні системи оперують саме такими дискретними станами, що реалізуються у фізичних носіях у вигляді електричних сигналів, магнітних доменів або інших макроскопічних параметрів. У квантових системах фундаментальною одиницею інформації є кубіт (quantum bit). На відміну від класичного біта, кубіт не обмежується двома фіксованими станами (рис.2.10).



Рис. 2.10. Порівняння класичної та квантової інформації

Квантова система може перебувати у суперпозиції базисних станів, що означає можливість одночасного існування кількох альтернативних конфігурацій. Ця властивість змінює саму природу інформації. У квантових системах інформація визначається не лише ймовірностями результатів вимірювання, а й фазовими співвідношеннями між компонентами квантового стану. Саме ця додаткова структура робить квантову інформацію більш багатою та відкриває нові можливості для обробки і передавання даних.

У попередніх параграфах кубіт розглядався як фізична реалізація дворівневої квантової системи. Було показано, що квантові стани можуть еволюціонувати під дією зовнішніх полів, а також втрачати когерентність унаслідок взаємодії з навколишнім середовищем. Проте для розуміння ролі кубітів у квантових технологіях необхідно перейти від фізичного опису до інформаційного змісту квантових станів. Основне питання полягає в тому, яким чином квантовий стан може кодувати інформацію. У квантовій механіці стан системи описується вектором у гільбертовому просторі, і саме параметри цього вектора містять інформацію про систему. У випадку кубіта така інформація визначається амплітудами квантового стану та їхньою відносною фазою. Таким чином, кубіт можна розглядати як фізичний носій квантової інформації, властивості якого визначають можливості квантових інформаційних технологій.

Як згадувалося раніше, квантовий стан кубіта можна записати у вигляді суперпозиції двох базисних станів (1.77). Схематичне зображення квантового стану кубіта, який визначається амплітудами та фазовими співвідношеннями між базисними станами, наведено на рис. 2.11.

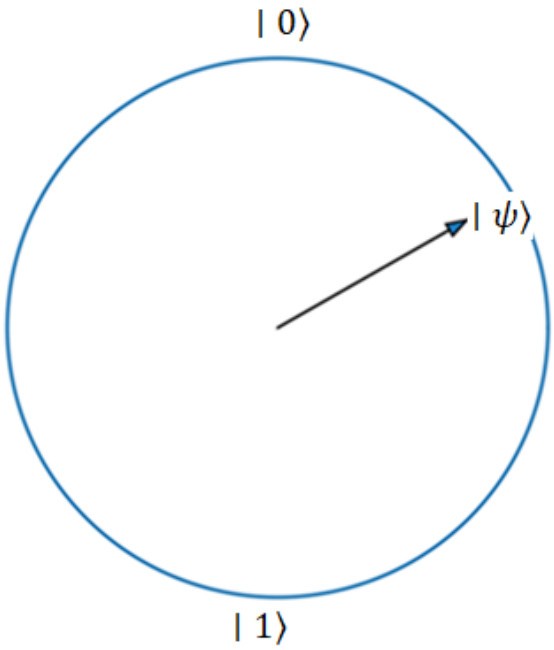


Рис. 2.11. Квантовий стан кубіта як носій інформації

На рисунку показано, що різні значення амплітуд та фаз відповідають різним квантовим станам кубіта. Саме ці параметри визначають інформаційний зміст квантового стану.

Ймовірності отримання відповідних результатів вимірювання визначаються співвідношеннями

$$P_0 = |\alpha|^2, \qquad P_1 = |\beta|^2. \tag{2.23}$$

При цьому виконується умова нормування (1.60).

На рис. 2.12 наведено ймовірності результатів вимірювання кубіта. Фізично це означає, що квантовий стан містить дві різні складові інформації: ймовірнісну інформацію, пов’язану з результатами вимірювання; фазову інформацію, яка визначає інтерференційні властивості системи.

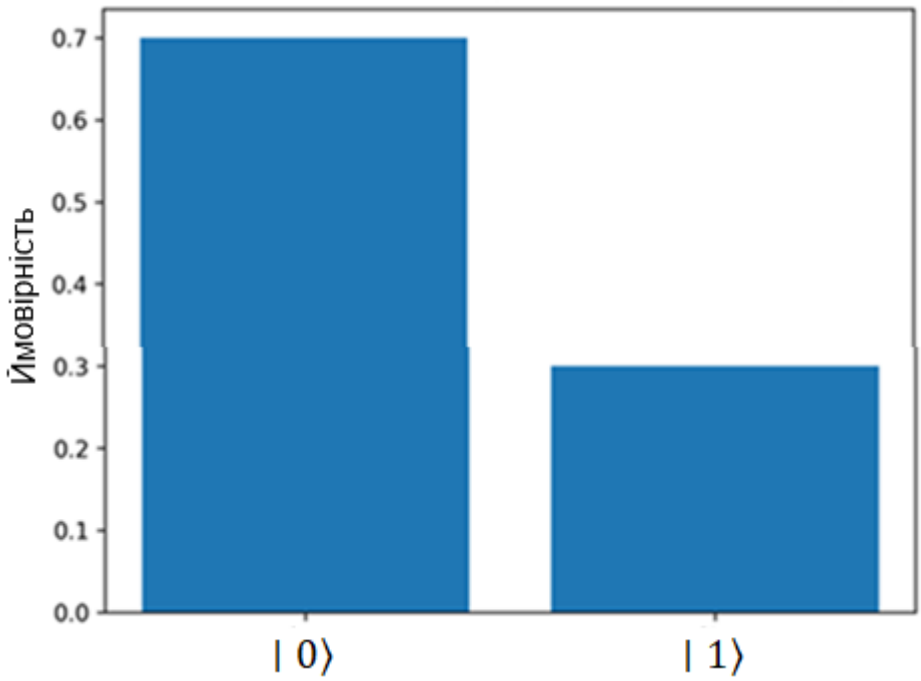


Рис. 2.12. Ймовірності результатів вимірювання кубіта

Саме фазова інформація не має прямого аналога у класичній теорії інформації. У квантових системах відносна фаза між компонентами суперпозиції може впливати на результати подальших операцій над системою. Два квантові стани можуть мати однакові ймовірності вимірювання, але різні фазові співвідношення, що призводить до різної поведінки під час інтерференційних процесів. Слід зазначити, що фаза – це не просто математичний параметр стану, а носій інформації, а отже інформацію можна фізично кодувати у квантових системах. Таким чином, відносна фаза між компонентами квантової суперпозиції має безпосередній фізичний зміст. Вона визначає інтерференційні властивості квантового стану і впливає на результати подальших квантових операцій. Це означає, що квантовий стан містить інформацію не лише у значеннях ймовірностей, але й у фазових співвідношеннях між амплітудами стану.

У квантових інформаційних системах ця властивість використовується для кодування інформації у фізичних параметрах квантових систем. Залежно від типу фізичної реалізації кубіта інформація може бути закодована у різних ступенях свободи квантових об’єктів. Це означає, що інформація в квантовій

системі не обмежується статистичними характеристиками. Вона містить також когерентну структуру квантового стану, яка проявляється під час еволюції системи. Саме ця властивість лежить в основі більшості квантових алгоритмів. У квантових інформаційних системах інформація може кодуватися різними фізичними параметрами квантових систем (рис. 2.13):



Рис. 2.13. Кодування інформації у квантових станах

На рисунку показано три типові фізичні способи кодування кубіта:

1. Поляризаційні стани фотона: $|0\rangle = |H\rangle$, $|1\rangle = |V\rangle$, де H – горизонтальна поляризація; V – вертикальна поляризація.

2. Спін частинки: $|0\rangle = |\uparrow\rangle$, $|1\rangle = |\downarrow\rangle$, де стани відповідають різним орієнтаціям спіну.

3. Енергетичні рівні атома: $|0\rangle$ = основний стан, $|1\rangle$ = збуджений стан.

Проте з інформаційної точки зору всі ці реалізації еквівалентні.

Таким чином, кубіт не прив'язаний до конкретної фізичної системи. Він є універсальною інформаційною одиницею, яку можна реалізувати різними способами. Коли декілька кубітів об'єднуються у спільну систему (багатокубітні системи), кількість можливих квантових станів N швидко зростає як $N = 2^n$, де n – кількість кубітів (рис.2.14).

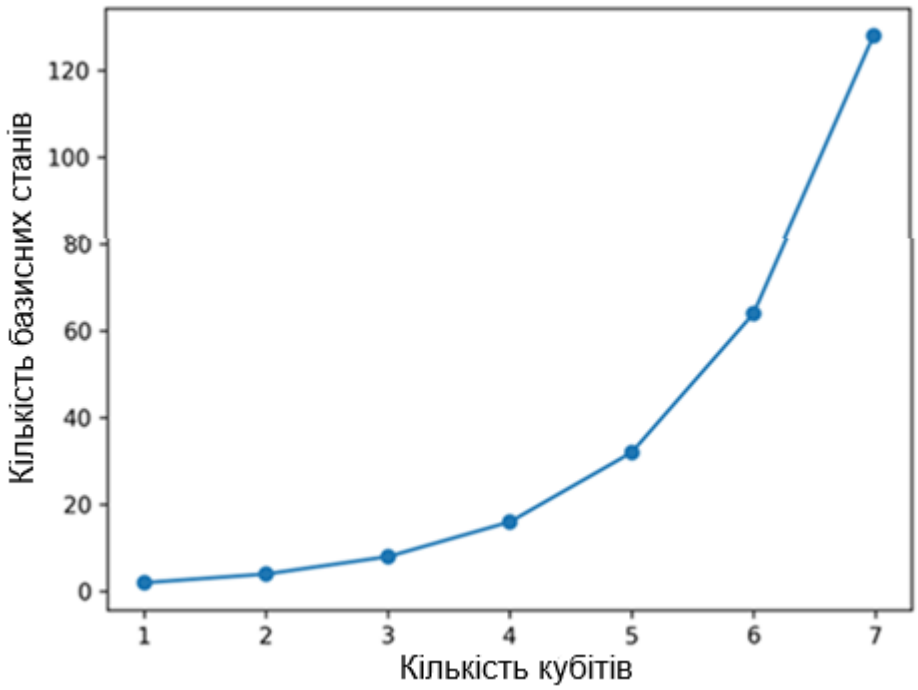


Рис. 2.14. Зростання розмірності простору станів

Стан двох кубітів можна записати у вигляді

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle. \qquad (2.24)$$

У такій системі інформація розподіляється між усіма компонентами квантового стану. Це створює можливість формування складних кореляцій між кубітами.

Приклади використання кубітів:

1. Квантова криптографія. У протоколах квантового розподілу ключів інформація кодується у квантових станах фотонів. Будь-яка спроба вимірювання змінює квантовий стан, що дозволяє виявити перехоплення інформації.

2. Квантові обчислення. Квантові комп'ютери використовують кубіти для виконання обчислень. Завдяки суперпозиції та інтерференції квантові алгоритми можуть ефективно вирішувати деякі задачі, які є надзвичайно складними для класичних комп'ютерів.

3. Квантова телепортація. У квантовій телепортації передається не фізична частинка, а квантовий стан, тобто інформація, яку вона несе.

Фазова структура квантових станів і можливість формування кореляцій між кубітами відкривають нові принципи обробки інформації. Отже, кубіт є фундаментальною одиницею квантової інформації, у якій поєднуються фізичні властивості квантових систем та інформаційна структура їхніх станів. На відміну від класичного біта, кубіт може перебувати у суперпозиції станів, що дозволяє кодувати інформацію не лише у значеннях ймовірностей, але й у фазових співвідношеннях квантового стану. Керована еволюція кубітів під дією зовнішніх полів дозволяє реалізувати квантові операції, тоді як взаємодія з середовищем обмежує час збереження когерентності. Саме баланс між керованою квантовою динамікою та процесами декогеренції, а також здатність квантових систем зберігати та керовано змінювати когерентні суперпозиції визначають фізичні можливості квантових інформаційних систем і є фундаментом сучасних квантових технологій – квантових обчислень, квантової комунікації та квантової сенсорики.

2.4. Базиси вимірювання та принцип взаємно-незміщених базисів

У квантовій теорії інформації процес вимірювання відіграє фундаментальну роль, оскільки саме через нього відбувається перехід від квантового опису до класичних результатів. На відміну від класичних систем, де вимірювання не змінює стан об’єкта, у квантових системах вимірювання є активною операцією, що визначає результат і водночас впливає на сам стан. У межах квантової механіки квантовий стан описується вектором у гільбертовому просторі, а результати вимірювання визначаються вибором базису в цьому просторі. Таким чином, поняття базису вимірювання є ключовим для розуміння квантових обчислень, комунікацій і криптографії. Особливе значення мають взаємно-незміщені базиси (mutually unbiased bases, MUB), які забезпечують максимальну невизначеність між результатами вимірювань у різних базисах і лежать в основі протоколів квантового розподілу ключів.

Квантовий стан системи описується нормованим вектором стану $|\psi\rangle$ у гільбертовому просторі Ĥ:

$$| \psi\rangle \in Ĥ, \qquad \langle \psi | \psi\rangle = 1, \tag{2.25}$$

де Ĥ – гільбертів простір; $\langle \cdot|\cdot \rangle$ – скалярний добуток. Нормування стану, тобто умова $\langle \psi | \psi\rangle = 1$, має ймовірнісну інтерпретацію і забезпечує коректність статистичного опису результатів вимірювання. Будь-який стан можна представити у вигляді розкладу за ортонормованим базисом $\{| e_i\rangle\}$:

$$| \psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i | e_i\rangle, \tag{2.26}$$

де $d = dim Ĥ$; c_i – коефіцієнти, які є комплексними амплітудами; $c_i \in C$; $\sum_i | c_i |^2 = 1$; C – поле комплексних чисел.

Ймовірність отримати результат i при вимірюванні визначається як

$$P(i) =| c_i |^2. \tag{2.27}$$

Опис квантового стану як вектора у гільбертовому просторі дозволяє визначити його структуру та ймовірнісні характеристики. Проте сам по собі стан не є безпосередньо спостережуваною величиною. Для отримання фізично вимірюваних результатів необхідно перейти від абстрактного опису стану до фізичних результатів. Для цього вводиться формальний апарат квантового вимірювання, який встановлює зв'язок між математичним описом стану та результатами експерименту. Вимірювання описується набором операторів проєкції $\{P_i =| e_i\rangle\langle e_i |\}$. У найпростішому випадку кожному можливому результату відповідає проєктор $P_i =| e_i\rangle\langle e_i |$. Ймовірність отримання результату i визначається як

$$P(i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle =| \langle e_i | \psi \rangle |^2, \tag{2.28}$$

а після вимірювання система переходить у стан

$$| \psi_i\rangle = \frac{P_i | \psi\rangle}{\sqrt{P(i)}}. \tag{2.29}$$

Цей процес називається редукцією або колапсом хвильової функції. Важливо підкреслити, що він є незворотним і супроводжується втратою інформації про початкову суперпозицію. Викладені постулати квантового вимірювання показують, що результати спостереження визначаються

операторами проєкції, пов’язаними з певним базисом. Таким чином, структура результатів вимірювання безпосередньо визначається вибором базису $\{| e_i\rangle\}$. Це обумовлює необхідність детального аналізу властивостей ортонормованих базисів.

Ортонормованість базису означає виконання умов

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_i | e_i\rangle\langle e_i | = I\,, \tag{2.30}$$

де I – одиничний оператор. Перша умова гарантує незалежність базисних векторів, а друга – повноту опису. Це означає, що будь-який стан можна повністю описати у цьому базисі. Ортонормовані базиси забезпечують повний опис квантових станів, однак у практичних задачах часто виникає необхідність порівнювати результати вимірювань у різних базисах, оскільки різні базиси дають різні результати вимірювання. Тому у квантовій теорії інформації основну роль відіграє не лише окремий базис, а й співвідношення між різними базисами. Це приводить до розгляду унітарних перетворень, які здійснюють перехід між різними базисними представленнями стану.

Нехай задано два базиси $\{| e_i\rangle\}$ і $\{| f_j\rangle\}$. Тоді існує унітарне перетворення U, таке що

$$| f_j\rangle = \sum_i U_{ij} | e_i\rangle, \tag{2.31}$$

де матриця U задовольняє умову унітарності $U^\dagger U = I$. Це означає, що перехід між базисами зберігає норму стану і, відповідно, повну ймовірність. Ймовірність того, що система, підготовлена у стані $| f_j\rangle$, при вимірюванні у базисі $\{| e_i\rangle\}$ дасть результат i, дорівнює

$$P(\, i \mid j\,) = | \langle e_i \mid f_j \rangle |^2. \tag{2.32}$$

Ця величина виражає зв’язок між вимірюваннями у різних базисах, вона характеризує «перекриття» базисів. Якщо перекриття є нерівномірним, то один базис частково «знає» інформацію про інший.

Загальний перехід між базисами дозволяє описати довільні зміни представлення квантового стану. Особливий інтерес становить випадок, коли результати вимірювань у двох базисах є максимально невизначеними відносно один одного. Така ситуація реалізується для взаємно-незміщених базисів, які мають фундаментальне значення у квантовій теорії інформації. Два базиси $\{|\, e_i\rangle\}$ і $\{|\, f_j\rangle\}$ називаються взаємно-незміщеними, якщо

$$|\, \langle e_i \,|\, f_j \rangle \,|^2 = \frac{1}{d}, \tag{2.33}$$

де d – розмірність простору. Це означає наступне: якщо система підготовлена у стані одного базису, то вимірювання в іншому базисі дає абсолютно випадковий результат. Іншими словами, знання стану у одному базисі не дає жодної інформації про результати в іншому. Це означає максимальну невизначеність. Геометрично це можна інтерпретувати як рівномірне розташування векторів різних базисів у гільбертовому просторі: всі кути між векторами різних базисів є однаковими. У випадку кубіта це означає, що відповідні вектори на сфері Блоха розташовані взаємно ортогонально як осі X, Y та Z.

Формальне визначення взаємно-незміщених базисів набуває наочності при розгляді найпростішого випадку – двовимірного гільбертового простору, що відповідає кубіту. У цьому випадку властивості таких базисів можна явно продемонструвати на конкретних прикладах.

У двовимірному просторі (d = 2) базис $|\, 0\rangle,\ |\, 1\rangle$ можна інтерпретувати як вимірювання вздовж осі Z. Базис

$$|\, +\rangle = \frac{|\, 0\rangle + |\, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\, -\rangle = \frac{|\, 0\rangle - |\, 1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.34}$$

відповідає вимірюванню вздовж осі X. Аналогічно, базис

$$|\, i+\rangle = \frac{|\, 0\rangle \,+\, i\,|\, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\, i-\rangle = \frac{|\, 0\rangle - \, i\,|\, 1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.35}$$

відповідає осі Y. Усі ці базиси попарно є взаємно-незміщеними.

Аналіз взаємно-незміщених базисів у двовимірному просторі дозволяє зрозуміти їх основні властивості, проте для повного теоретичного опису

необхідно розглянути загальний випадок довільної розмірності. Це приводить до питання про максимальну кількість таких базисів у гільбертовому просторі. У загальному випадку кількість взаємно-незміщених базисів обмежена. Доведено, що для простору розмірності $d = p^n$, де p – просте число, максимальна кількість таких базисів дорівнює (d+1). Питання про існування максимальної кількості MUB для довільних d (наприклад, (d = 6)) залишається відкритим і є предметом сучасних досліджень. Отримані результати щодо кількості взаємно-незміщених базисів мають важливе математичне значення, однак для повного розуміння їх ролі необхідно проаналізувати фізичний зміст цього поняття та його зв'язок із фундаментальними принципами квантової механіки.

Фізично принцип взаємної незміщеності пов'язаний із фундаментальною властивістю квантових систем – неможливістю одночасного точного визначення результатів у різних базисах. Це узагальнює принцип невизначеності і формалізує його у термінах базисів вимірювання. Ця властивість знаходить практичне застосування у квантових інформаційних технологіях, зокрема у задачах забезпечення інформаційної безпеки, що приводить до розгляду квантової криптографії. У протоколі BB84 використовуються два взаємно-незміщені базиси (наприклад, Z і X). Зловмисник не знає, у якому базисі проводиться вимірювання. Якщо він намагається виміряти стан у неправильному базисі, він неминуче вносить помилки з імовірністю 50%. Це дозволяє виявити факт перехоплення інформації і забезпечує безпеку. Розглянуті протоколи квантової криптографії базуються на проєктивних вимірюваннях у вибраних базисах. Проте у більш загальному випадку квантові вимірювання можуть виходити за межі проєктивної моделі. У реальних фізичних системах використовуються узагальнені вимірювання, які описуються позитивно-операторними мірами (POVM):

$$\sum_i E_i = I\,, \qquad E_i \geq 0, \tag{2.36}$$

де E_i – позитивні оператори.

Ймовірність результату визначається як

$$P(i) = Tr(\rho E_i), \tag{2.37}$$

де ρ —матриця густини, що описує як чисті, так і змішані стани.; Tr – слід оператора. Такий підхід дозволяє описувати реальні вимірювальні процеси, включаючи шум, втрати та недосконаліть детекторів. Отже, базиси вимірювання визначають спосіб отримання інформації з квантової системи, а взаємно-незміщені базиси забезпечують максимально можливу невизначеність між різними способами вимірювання. Це робить їх основним інструментом як у фундаментальних дослідженнях, так і у практичних застосуваннях квантових технологій.

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо такі приклади.

1. Стан: $|\psi\rangle = |0\rangle$. У базисі X:

$$P(+) = P(-) = \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

2. Стан $|+\rangle$ *у базисі Z:*

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}. \tag{2.39}$$

3. У просторі d = 3:

$$|\langle e_i | f_j \rangle|^2 = \frac{1}{3}. \tag{2.40}$$

Базиси вимірювання визначають спосіб отримання інформації з квантової системи та безпосередньо впливають на результати спостережень. Різні базиси можуть давати різні статистичні розподіли результатів, а вибір базису є фундаментальним елементом квантових алгоритмів і комунікацій. Особливе значення мають взаємно-незміщені базиси, які забезпечують максимальну невизначеність між вимірюваннями та лежать в основі квантової криптографії. Їх математична структура пов’язана з унітарними перетвореннями, теорією матриць і властивостями гільбертових просторів.

2.5. Апаратні реалізації кубітів та принципи керування ними

Квантові інформаційні технології базуються на використанні квантових систем для збереження, передачі та обробки інформації. Основною

елементарною одиницею квантової інформації є кубіт – двовимірна квантова система, яка, на відміну від класичного біта, може перебувати у довільній суперпозиції базисних станів. Завдяки властивостям суперпозиції та заплутаності кубіти забезпечують принципово нові можливості для обчислень і комунікацій. Зокрема, квантові алгоритми дозволяють досягати експоненціального прискорення у розв'язанні окремих задач, а квантові комунікаційні протоколи забезпечують теоретично гарантовану криптографічну безпеку. Разом з тим, реалізація кубітів у вигляді фізичних систем є складною задачею. Основною проблемою є те, що квантові стани є надзвичайно чутливими до зовнішніх впливів. Взаємодія з навколишнім середовищем призводить до декогеренції – процесу, внаслідок якого система втрачає квантові властивості і переходить у статистичну суміш станів. Тому при створенні кубітів необхідно забезпечити компроміс між ізоляцією від середовища (для збереження когерентності), можливістю керування (для виконання операцій), можливістю вимірювання (для зчитування інформації). Саме цей компроміс визначає різноманіття апаратних реалізацій кубітів, які розвиваються у сучасній науці. На даний час сформувалося кілька основних фізичних платформ для реалізації кубітів. До них належать надпровідні системи, іонні пастки, фотонні системи, спінові кубіти та квантові точки. Кожна з цих платформ реалізує кубіт за допомогою різних фізичних механізмів і має свої переваги та обмеження. Розглянувши загальні принципи функціонування кубітів, доцільно перейти до детального аналізу вимог, яким повинні відповідати їх фізичні реалізації. Це дозволить зрозуміти критерії вибору тієї чи іншої платформи, а також визначити фактори, що впливають на ефективність квантових систем. Для того щоб фізична система могла виконувати роль кубіта, вона повинна відповідати ряду фундаментальних вимог. Ці вимоги визначаються як теоретичними принципами квантової механіки, так і практичними аспектами реалізації квантових обчислень.

Першою необхідною умовою є можливість підготовки системи у визначеному початковому стані. Зазвичай таким станом є базисний стан $|0\rangle$,

який відповідає мінімальній енергії системи. Формально це означає, що початкова матриця густини має вигляд

$$\rho_0 = |0\rangle\langle 0|. \tag{2.41}$$

Ініціалізація є критично важливою, оскільки результати квантових обчислень залежать від початкового стану системи. У різних фізичних платформах використовуються різні методи ініціалізації. Наприклад, у надпровідних кубітах застосовується кріогенне охолодження до температур, близьких до абсолютного нуля, що дозволяє перевести систему в основний стан. В іонних пастках використовується лазерне охолодження та оптична накачка, які забезпечують ефективну підготовку квантового стану.

Другою ключовою вимогою є наявність достатньо великого часу когерентності. Когерентність характеризує здатність квантової системи зберігати фазові співвідношення між компонентами суперпозиції. Саме вона забезпечує існування квантової суперпозиції та інтерференції. Однак у реальних фізичних системах когерентність руйнується через взаємодію із середовищем. Це призводить до двох процесів:

1 Релаксація енергії. Ймовірність перебування у збудженому стані спадає експоненційно:

$$P_1(t) = P_1(0)e^{-\frac{t}{T_1}}, \tag{2.41}$$

де T_1 – час енергетичної релаксації. Цей процес пов'язаний з передачею енергії середовищу і характеризує втрату енергії системою

2. Декогеренція фази. Когерентність спадає як

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\frac{t}{T_2}}. \tag{2.42}$$

де T_2 – час фазової когерентності; ρ_{01} – недіагональний елемент матриці густини стану квантової системи. Отже, час декогеренції T_2, визначає втрату фазової інформації. Фізично T_2 характеризує втрату фазової пам'яті внаслідок флуктуацій електромагнітних полів, зарядових шумів або спінового оточення. Таким чином, час T_1 пов'язаний з обміном енергією, а T_2 – з флуктуаціями поля

або середовища. Чим більші T_1 і T_2, тим кращий кубіт. На рис. 2.15 показано типовий експоненціальний спад когерентності.

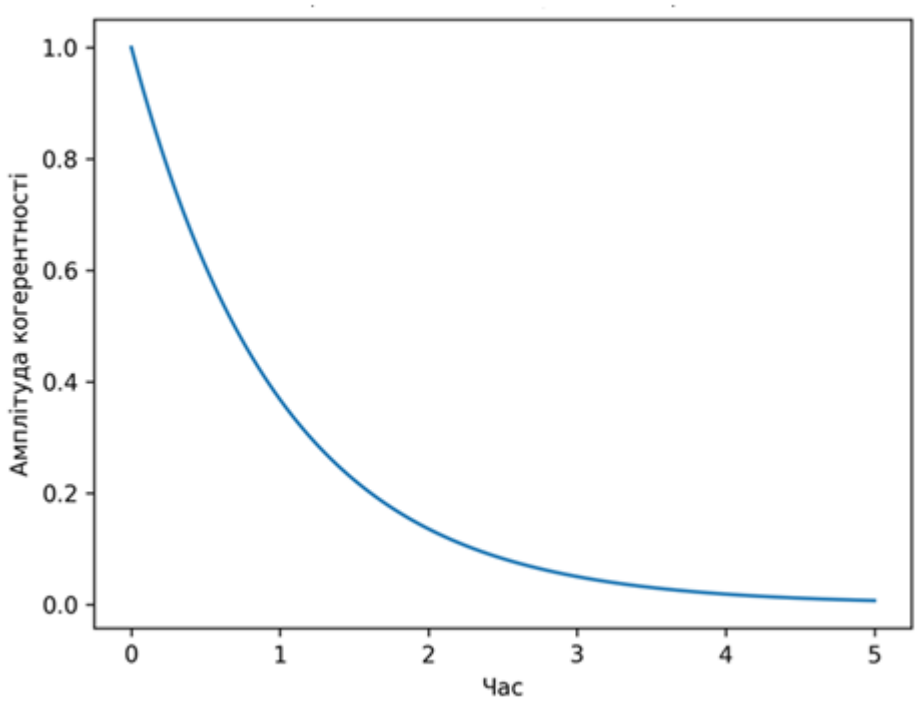


Рис. 2.15. Експоненціальна релаксація когерентності кубіта

Графік демонструє, що когерентність неперервно зменшується з часом. При $t = T_2$ вона зменшується приблизно у e разів. Після цього система поступово переходить до поведінки, еквівалентної класичній статистичній суміші. Кубіт зберігає квантову інформацію лише протягом часу T_2. Якщо операції виконуються повільніше, ніж відбувається декогеренція, квантовий алгоритм руйнується. Таким чином, T_2 визначає максимальний час, впродовж якого можлива квантова обробка інформації.

Матриця густини стану квантової системи ρ – це матричне представлення оператора густини, який повністю описує статистичний (чистий або змішаний) квантовий стан системи. Фізично чистий стан – це квантовий стан, у якому система має повністю визначену хвильову функцію (або вектор стану) і не містить класичної статистичної невизначеності. Чистий стан означає, що система знаходиться у строго визначеному квантовому стані, усі квантові фази збережені, можлива повна інтерференція. Фізично змішаний стан – це стан, у якому

квантова система описується статистичною сумішшю кількох можливих чистих станів, а не одним визначеним вектором стану. Інакше кажучи, система не перебуває у когерентній суперпозиції і ми маємо лише статистичний розподіл можливих станів. Матриця густини стану квантової системи містить ймовірності (діагональні елементи) і когерентності (недіагональні елементи). Вона визначається як

$$\rho = \sum_i \rho_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid , \tag{2.43}$$

де $\mid \psi_i\rangle$ – можливі чисті стани системи; ρ_i – імовірності їх реалізації:

$$\sum_i \rho_i = 1. \tag{2.44}$$

Тобто це оператор, який враховує як квантову суперпозицію, так і класичну статистичну невизначеність. Тут відсутній фазовий зв'язок між різними $|\psi_i\rangle$.

Для чистого стану матриця густини квантового стану має вигляд

$$\rho = \mid \psi\rangle\langle\psi \mid . \tag{2.45}$$

У базисі $|0\rangle$, $|1\rangle|$ це дає

$$\rho = \begin{pmatrix} \mid \alpha \mid^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & \mid \beta \mid^2 \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Для кубіта:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

де ρ_{00}, ρ_{11} – ймовірності перебування в станах $|0\rangle$ та $|1\rangle$; ρ_{01}, ρ_{10} – когерентності, які відповідають за квантову інтерференцію.

Фізично це означає, що система не «перебуває інколи в $|0\rangle$, інколи в $|1\rangle$. Вона одночасно перебуває в когерентній суперпозиції. Саме зникнення недіагональних елементів означає втрату квантових властивостей. Матрицю густини стану квантової системи не слід плутати з матрицею густини ймовірностей. Матриця стану квантової системи містить інформацію про ймовірності, але вона також містить інформацію про квантову когерентність. Якщо всі недіагональні елементи дорівнюють нулю:

$$\rho_{01} = \rho_{10} = 0, \tag{2.48}$$

тоді вона справді поводиться як класична матриця ймовірностей. Це випадок повної декогеренції. Таким чином, матриця густини стану квантової системи – це матриця густини ймовірності в гільбертовому просторі (просторі станів). Вона необхідна, коли система взаємодіє з середовищем; стан є змішаним; розглядається підсистема заплутаної системи і потрібно описати декогеренцію. Збереження когерентності є однією з головних проблем квантових технологій. Воно потребує мінімізації взаємодії із середовищем, використання екранування та застосування методів квантової корекції помилок.

Третьою важливою вимогою є можливість точного керування квантовим станом. Щоб система стала функціональним кубітом, необхідно реалізувати контрольовану взаємодію із зовнішнім полем. На практиці керування здійснюється шляхом впливу зовнішніх полів – електромагнітних, оптичних або мікрохвильових. Ці поля викликають переходи між квантовими станами, що дозволяє реалізовувати логічні операції. Типовий керуючий гамільтоніан має вигляд

$$\widehat{H}_{\text{кер.}} = \hbar\Omega(t)cos(\omega t + \phi)\,\hat{O}\,, \tag{2.49}$$

де $\Omega(t)$ – амплітуда імпульсу; ω – частота; ϕ – фаза; $\hat{O}$ – оператор взаємодії. Фізично це означає наступне: тривалість імпульсу визначає кут повороту стану; фаза імпульсу визначає напрям керування; інтенсивність визначає швидкість операції. Кубіт повинен дозволяти реалізацію довільної однокубітної операції за час, значно менший за T_2. На практиці часто використовуються імпульси з гаусовою огинаючою (рис. 2.16):

$$\Omega(t) = \Omega_0 exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\,\sigma^2}\right), \tag{2.50}$$

де $\Omega(t)$ – миттєва амплітуда керуючого поля; Ω_0 – максимальна амплітуда; t_0 – центр імпульсу; σ – тривалість імпульсу.

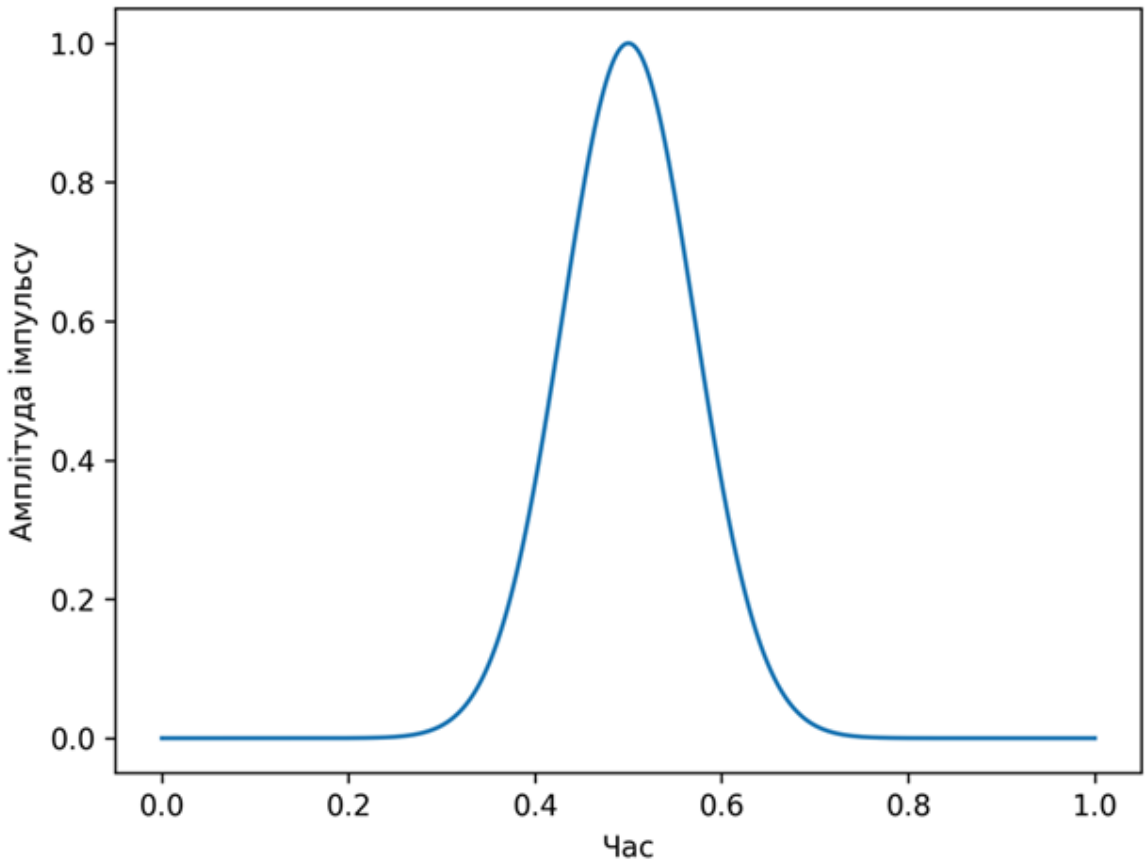


Рис. 2.16. Гаусовий керуючий імпульс для реалізації квантового гейта

Такий імпульс збуджує перехід між станами |0⟩| і |1⟩, реалізує поворот стану кубіта на сфері Блоха, забезпечує плавне вмикання і вимикання взаємодії, що мінімізує збудження небажаних переходів та зменшує спектральні викривлення. Важливо, щоб тривалість операції була значно меншою за T_2. Особливе значення має точність керування, оскільки навіть незначні відхилення можуть призвести до накопичення помилок у квантових алгоритмах.

Наступною вимогою є наявність механізму вимірювання стану кубіта, який перетворює квантову інформацію на класичний сигнал. Вимірювання описується проєктивними операторами:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|. \tag{2.51}$$

Ймовірності отримання результатів:

$$P(0) = |\alpha|^2, P(1) = |\beta|^2. \tag{2.52}$$

Важливою особливістю квантового вимірювання є його незворотність, тобто після вимірювання система переходить в один із базисних станів. Це накладає обмеження на способи обробки квантової інформації. Основні фізичні методи вимірювання такі: флуоресцентна реєстрація (іонні кубіти); дисперсійне зчитування через резонатор (надпровідні кубіти); фотонна детекція (оптичні системи); тунельне вимірювання струму; магнітооптична реєстрація (NV-центри). Фізична складність полягає в тому, що вимірювання руйнує суперпозицію і може додатково збурювати систему. Тому воно повинно бути достатньо швидким і мати високу достовірність.

Останньою, але не менш важливою вимогою є масштабованість. Одиночний кубіт – це лабораторний об’єкт. Для практичного використання квантових технологій необхідно створювати системи з великою кількістю кубітів. Квантовий процесор потребує сотень і тисяч кубітів. Це потребує можливості інтеграції кубітів у єдину систему, контролю взаємодії між ними, мінімізації крос-токів та шумів. Масштабування вимагає інтегрованих мікроструктур, кріогенних систем, квантової корекції помилок.

Таким чином, фізична реалізація кубітів визначається необхідністю задоволення складного комплексу вимог. Фізичні платформи кубітів – це конкретні фізичні системи, у яких реалізується дворівнева квантова система, що використовується як кубіт. Тобто це матеріальні носії квантової інформації. Кубіт як абстрактний об’єкт – це вектор стану в двовимірному гільбертовому просторі. Фізична платформа – це реальна система, де ці два стани можна підготувати, керовано змінювати, вимірювати, зберігати достатньо довго. Різні фізичні системи реалізують ці вимоги по-різному, що зумовлює існування кількох альтернативних платформ. Розрізняють такі основні фізичні платформи кубітів:

1. Надпровідні кубіти. Надпровідні кубіти є однією з найбільш розвинених, технологічно перспективних та активно досліджуваних платформ квантових обчислень. Вони базуються на використанні макроскопічних квантових ефектів у надпровідниках, зокрема на ефекті Джозефсона. Джозефсонівський перехід – це структура, що складається з двох надпровідників, розділених тонким

ізоляційним шаром. Через цей бар'єр можуть тунелювати куперівські пари, що призводить до появи струму без прикладеної напруги.

Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H = 4E_C(n - n_g)^2 - E_J cos\varphi, \qquad (2.53)$$

де E_C – енергія зарядження, E_J – джозефсонівська енергія, φ – різниця фаз хвильових функцій надпровідників. Нелінійність цього гамільтоніана дозволяє виділити два нижчі енергетичні рівні, які використовуються як $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Нелінійність джозефсонівського переходу є ключовою умовою формування двох ізольованих енергетичних рівнів, які використовуються як базисні стани кубіта. На відміну від гармонічного осцилятора, де енергетичні рівні рівновіддалені, у надпровідних системах спектр є ангармонічним, що дозволяє селективно адресувати переходи між рівнями. Залежно від домінуючого фізичного параметра виділяють кілька типів надпровідних кубітів:

а. Зарядові кубіти (charge qubits): базуються на контролі числа куперівських пар;

б. Потокові кубіти (flux qubits): визначаються квантованим магнітним потоком;

в. Фазові кубіти (phase qubits): використовують фазу хвильової функції;

г. Трансмони (transmon qubits) – це оптимізована версія зарядових кубітів зі зменшеною чутливістю до шуму заряду.

Найбільш поширеними у сучасних квантових процесорах є саме трансмон-кубіти. Схематична структура такого кубіта представлена на рис. 2.17.

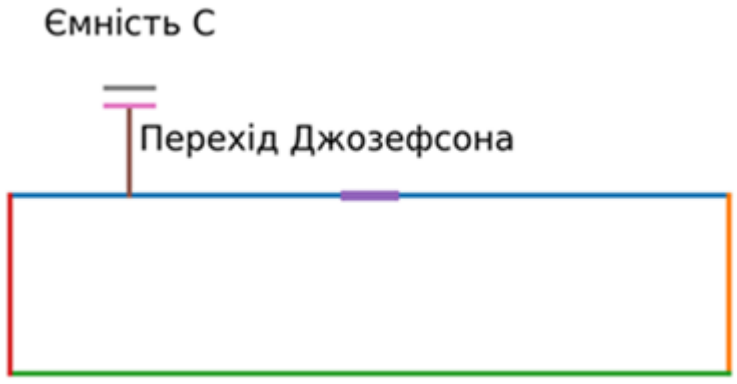


Рис. 2.17. Схема трансмон-кубіта

Основними елементами є надпровідний контур, ємність C, перехід Джозефсона. Трансмон-кубіт – це різновид надпровідного кубіта, у якому квантова інформація кодується в енергетичних рівнях нелінійного осцилятора на основі переходу Джозефсона. Він є модифікацією зарядового кубіта з підвищеною стійкістю до шумів заряду. Назва походить від TRANSmission-line shunted plasMON – плазмонний резонатор, шунтований лінією передачі. Основний елемент – перехід Джозефсона, тобто тонкий ізолюючий шар між двома надпровідниками. Трансмон – це квантовий маятник фази надпровідника. Квантова інформація зберігається не в положенні частинки, а в коливаннях фази, квантах збудження нелінійного осцилятора.

Керування надпровідними кубітами здійснюється за допомогою мікрохвильових імпульсів, частота яких відповідає різниці енергій між рівнями:

$$\hbar\omega = E_1 - E_0.$$

Взаємодія з полем описується гамільтоніаном:

$$H_{\text{кер.}} = \hbar\Omega cos(\omega t)\sigma_x, \qquad (2.54)$$

де Ω – частота Рабі.

Ймовірність переходу між станами визначається

$$P(t) = sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \qquad (2.55)$$

Надпровідні кубіти характеризуються високою швидкістю операцій (наносекундний масштаб), можливістю інтеграції у складні схеми, відносною технологічною зрілістю. Водночас їх обмеження включають необхідність роботи при температурах порядку мілікельвінів, наявність шумів (зарядових, магнітних), обмежений час когерентності (зазвичай десятки–сотні мікросекунд). Попри технологічну зрілість надпровідних систем, альтернативні платформи можуть забезпечувати значно довші часи когерентності. Однією з таких платформ є іонні пастки, які базуються на ізольованих атомних системах.

2. Іонні пастки. Іонні пастки реалізують кубіти на основі внутрішніх електронних станів іонів, які утримуються у вакуумі за допомогою

електромагнітних полів. Найбільш поширеними є пастки типу Пауля та Пенінга. Схема наведена на рис. 2.18.



Рис. 2.18. Іонний кубіт у пастці

Іон локалізується у потенціальній ямі, створеній змінними електричними полями. Кубітними станами є два внутрішні електронні рівні іона. Лазерне випромінювання забезпечує підготовку стану, реалізацію одно- та двокубітних операцій і зчитування інформації через флуоресценцію. Керування здійснюється за допомогою лазерного випромінювання, яке викликає переходи між станами. Фізична сутність керування полягає у когерентній взаємодії світла з атомним переходом. Частота лазера налаштовується таким чином, щоб відповідати резонансній частоті переходу. Крім внутрішніх станів, використовуються також колективні коливальні моди іонів, що дозволяє реалізовувати двокубітні операції. Переваги: надзвичайно довгий час когерентності T_2; висока точність квантових операцій; добре контрольовані квантові системи. Недоліки: складність масштабування; повільніша швидкість операцій порівняно з надпровідними системами; складна експериментальна реалізація.

На відміну від стаціонарних квантових систем, таких як надпровідні кубіти та іонні пастки, у квантових комунікаціях особливу роль відіграють фотони як рухомі носії інформації. Це зумовлює необхідність розгляду фотонних кубітів.

3. Фотонні кубіти. Фотонні кубіти реалізуються у квантових станах електромагнітного поля. Найчастіше використовуються такі способи кодування:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|H\rangle + \beta\,|V\rangle, \qquad (2.56)$$

де $|H\rangle$ і $|V\rangle$ – стани горизонтальної та вертикальної поляризації (рис. 2.19).

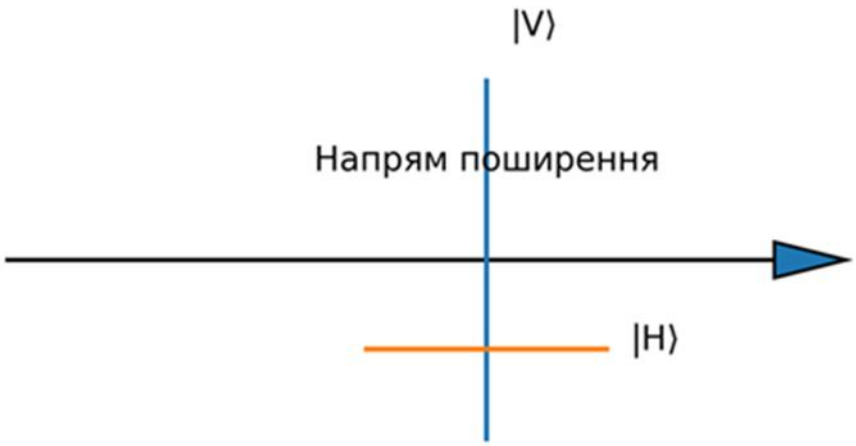


Рис. 2.19. Фотонний кубіт: стрілка – напрям поширення фотона; |V⟩ і |H⟩ – вертикальна та горизонтальна поляризації відповідно

У фотонних реалізаціях інформація кодується в поляризації або часових станах світла. Фотон рухається вперед, а його електричне поле коливається в певному напрямку. Два можливі напрямки коливання (горизонтальний |H⟩ та вертикальний |V⟩) утворюють базис кубіта. Тобто кубіт закодований не в енергії, а в напрямку поляризації світла. Головна перевага фотонів – слабка взаємодія з довкіллям, що забезпечує збереження когерентності на великих відстанях(мінімальна декогеренція). Саме тому фотони є природними носіями квантової інформації у каналах зв’язку. Фотони характеризуються слабкою взаємодією з середовищем, високою швидкістю передачі, можливістю використання у квантових мережах. Основною проблемою є складність реалізації детермінованих двокубітних операцій через слабку фотон-фотонну взаємодію, що ускладнює створення квантових логічних елементів. Керування фотонними кубітами здійснюється за допомогою фазових пластин, поляризаційних елементів, інтерферометрів.

Альтернативними способами кодування є: time-bin кодування – інформація закладена у часі приходу фотона; dual-rail кодування – використання двох

просторових мод; частотне кодування – використання різних спектральних компонент.

Поряд із фотонними системами значний інтерес становлять твердотільні реалізації кубітів, зокрема спінові системи, які поєднують компактність і потенційну інтеграцію з існуючими технологіями.

4. Спінові кубіти в твердому тілі. У твердотільних системах кубіт може реалізовуватися через спін електрона або дефектні центри в кристалі. Кубіт реалізується на спінових станах дефекту в кристалі. У найпростішому випадку кубіт визначається двома орієнтаціями спіну: $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$. У магнітному полі енергія системи визначається ефектом Зеємана:

$$H = -\gamma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}, \qquad (2.57)$$

де H – гамільтоніан взаємодії спіну з магнітним полем, γ – гіромагнітне відношення, **B –** вектор зовнішнього магнітного поля, **S** – оператор спіну частинки, а скалярний добуток **B·S** визначає залежність енергії від орієнтації спіну відносно поля. Це призводить до розщеплення енергетичних рівнів, що дозволяє реалізувати кубіт. На рис. 2.20 показано спіновий кубіт у магнітному полі.

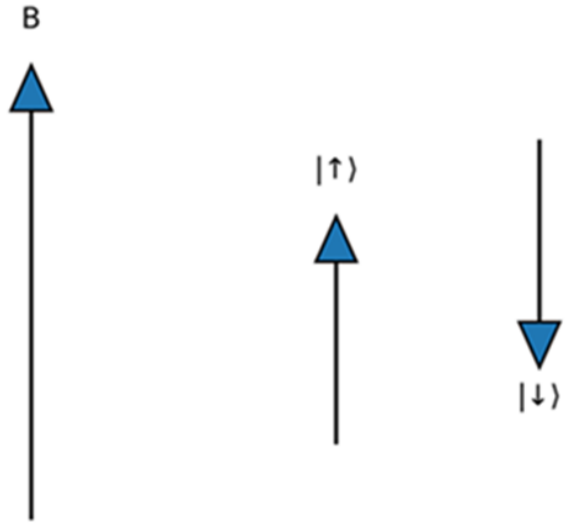


Рис. 2.20. Спіновий кубіт у магнітному полі

Магнітне поле B спричиняє розщеплення енергетичних рівнів (ефект Зеємана). Стани $|\uparrow\rangle$ та $|\downarrow\rangle$ утворюють кубітний базис. Керування спіновими

кубітами здійснюється радіочастотними або мікрохвильовими імпульсами, що викликають магнітний резонанс. Переваги: можливість роботи при кімнатній температурі; довгий час когерентності; можливість мініатюризації; сумісність із напівпровідниковими технологіями, висока сенсорна чутливість. Недоліки: складність зчитування стану; чутливість до магнітного шуму, декогеренція через взаємодію з ядерним середовищем.

Наведемо приклади фізичного використання кубітів:

*1. Квантова передача інформації.*Фотонні кубіти використовуються в протоколах квантової криптографії.

2. Квантові процесори. Надпровідні кубіти формують багатокубітні схеми з контрольованими взаємодіями.

3. Квантова сенсорика. NV-центри дозволяють вимірювати магнітні поля з нанометричною роздільною здатністю.

Фізично кубіт – це контрольована квантова дворівнева система, де інформація закодована у фазі та амплітуді хвильової функції. Різні платформи відрізняються механізмом керування, природою взаємодії, масштабованістю, стабільністю проти шумів. Будь-яка фізична реалізація кубіта повинна забезпечувати такі вимоги: два добре визначені квантові стани; можливість створення суперпозиції; керована еволюція (квантові гейти); вимірювання; час когерентності, достатній для обчислень. Це відомі критерії ДіВінченцо. Таким чином, фізичні платформи кубітів – це матеріальні реалізації квантових дворівневих систем, що дозволяють зберігати та обробляти квантову інформацію.

2.6. Динаміка станів кубіта під впливом зовнішніх полів

Геометричне представлення стану кубіта на сфері Блоха дозволяє наочно описати структуру квантових станів і дію квантових гейтів як обертання вектора Блоха. Проте реальні квантові системи не є статичними: їхній стан безперервно змінюється з часом під дією власного гамільтоніана та зовнішніх полів. З одного боку, керовані електромагнітні поля використовуються для підготовки,

керування та вимірювання квантових станів. Саме завдяки такій взаємодії реалізуються квантові операції та логічні гейти. З іншого боку, неконтрольована взаємодія із середовищем призводить до поступової втрати когерентності квантових станів. Цей процес називається декогеренцією і є одним з головних фізичних обмежень у квантових технологіях. Декогеренція призводить до переходу квантової системи від когерентної суперпозиції станів до статистичної суміші, у якій квантові інтерференційні ефекти зникають.

Тому необхідно з'ясувати як квантові стани кубітів змінюються з часом під дією фізичних взаємодій. Саме ця динаміка вона визначає, як квантові стани реагують на зовнішні поля, як відбуваються переходи між рівнями та як формується керована еволюція кубітів. У контексті квантових технологій це питання має особливе значення, оскільки будь-яка квантова операція фактично реалізується як керована динаміка квантової системи. Дослідження динаміки дозволяє встановити зв'язок між математичним описом квантових станів і реальними фізичними процесами – взаємодією атомів з електромагнітним полем, лазерним керуванням іонів, мікрохвильовим збудженням надпровідних кубітів або маніпуляціями зі спіновими системами. Розуміння механізмів взаємодії квантових систем із зовнішніми полями та середовищем має фундаментальне значення для квантових обчислень, квантової комунікації та квантової сенсорики. Саме тому аналіз цих процесів є важливою складовою фізичних основ квантової інформації.

У квантовій механіці еволюція замкненої системи визначається рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t)\rangle = \widehat{H} | \psi(t)\rangle. \tag{2.58}$$

де $| \psi(t)\rangle$ – квантовий стан системи, $\widehat{H}$ – гамільтоніан, що описує енергію та взаємодії системи. Для дворівневої системи гамільтоніан має вигляд

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\, \sigma_z, \tag{2.59}$$

де ω_0 – власна частота переходу між рівнями, σ_z – матриця Паулі. Цей гамільтоніан задає внутрішню динаміку системи, пов'язану з різницею енергій між двома квантовими рівнями. Розв'язок рівняння Шредінгера можна записати через оператор еволюції

$$| \psi(t)\rangle = U(t) | \psi(0)\rangle, \tag{2.60}$$

де

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}. \tag{2.61}$$

Цей оператор є унітарним і забезпечує збереження нормування квантового стану. Фізично це означає, що квантова система з часом змінює свою фазу і структуру суперпозиції, але при цьому повна ймовірність залишається сталою.

Розглянемо два власні стани системи $| 0\rangle$ і $| 1\rangle$. Часова еволюція цих станів має вигляд

$$| 0(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar} | 0\rangle, \tag{2.62}$$

$$| 1(t)\rangle = e^{-iE_1t/\hbar} | 1\rangle. \tag{2.63}$$

Якщо система перебуває у суперпозиції, то з часом її стан набуває вигляду

$$| \psi(t)\rangle = \alpha e^{-iE_0t/\hbar} | 0\rangle + \beta e^{-iE_1t/\hbar} | 1\rangle. \tag{2.64}$$

Виділимо спільний фазовий множник $e^{-iE_0t/\hbar}$. Тоді

$$| \psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar} \left((\alpha | 0\rangle + \beta e^{-\frac{i(E_1-E_0)t}{\hbar}} | 1\rangle \right). \tag{2.65}$$

Оскільки глобальна фаза $e^{-iE_0t/\hbar}$ не має фізичного значення, динаміка системи визначається відносною фазою між компонентами суперпозиції

$$\phi(t) = \frac{(E_1 - E_0)t}{\hbar}. \tag{2.66}$$

Саме накопичення цієї фази є фундаментальним механізмом квантової динаміки. У присутності зовнішнього поля воно призводить до інтерференції амплітуд переходів, що і проявляється у вигляді Рабі-осциляцій. Для дворівневої системи $\phi(t) = \omega_0 t$, де $\omega_0 = (E_1 - E_0)/\hbar$.

Таким чином, навіть за відсутності зовнішнього поля компоненти квантової суперпозиції накопичують різну фазу. Саме ця відносна фазова еволюція визначає інтерференційні властивості квантового стану і лежить в основі багатьох явищ квантової динаміки, зокрема когерентних осциляцій та квантових гейтів (рис.2.21).

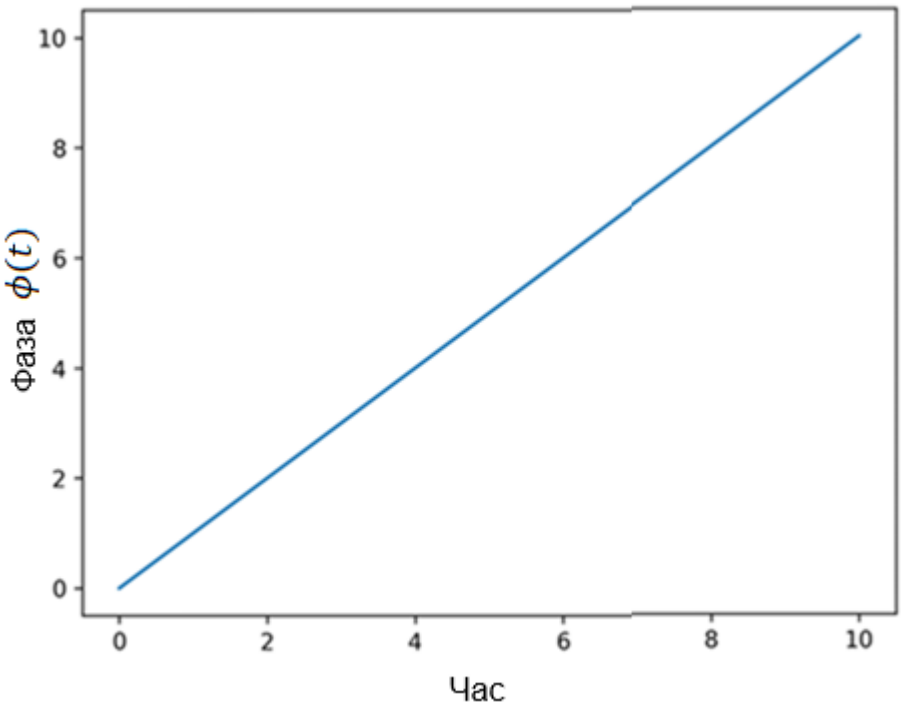


Рис. 2.21. Накопичення відносної фази між квантовими рівнями

Реальні квантові системи рідко є ізольованими. Найчастіше ними керують за допомогою зовнішніх електромагнітних полів. Взаємодія квантової системи з електромагнітним полем описується додатковим членом у гамільтоніані. Повний гамільтоніан системи можна записати у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{взаєм.}} \tag{2.67}$$

де $\hat{H}_0$ – гамільтоніан ізольованої системи, $\hat{H}_{\text{взаєм.}}$ – гамільтоніан взаємодії з полем.

Для атомних і багатьох твердотільних систем взаємодія з електромагнітним полем описується дипольним наближенням

$$\hat{H}_{\text{взаєм.}} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(t), \tag{2.68}$$

де $\overrightarrow{d}$ – дипольний момент системи, $\overrightarrow{E}(t)$ – електричне поле.

Цей вираз показує, що електромагнітне поле може змінювати квантовий стан системи, викликаючи переходи між енергетичними рівнями системи. Якщо система перебуває під дією резонансного поля, виникає періодичний обмін енергією між полем і квантовою системою. У квантовій теорії такий процес описується як поглинання або випромінювання кванта поля. Якщо система перебуває під дією резонансного поля, виникає періодичний обмін енергією між полем і квантовою системою. У результаті ймовірність перебування у збудженому стані змінюється як $P(t) = sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$, де P(t) – імовірність знайти систему у стані $|1\rangle$; Ω – частота Рабі; t – час. Тобто під дією резонансного зовнішнього поля відбуваються періодичні переходи між квантовими станами двохрівневої системи. При цьому, якщо частота поля близька до частоти переходу між рівнями системи, виникає ефективна взаємодія, яка дозволяє керувати станом кубіта, що дозволяє реалізовувати керовані квантові операції. Саме цей принцип лежить в основі більшості експериментальних методів керування квантовими системами.

У реальних системах частота зовнішнього поля може не збігатися з власною частотою переходу. Тому вводять параметр

$$\Delta = \omega - \omega_0 , \qquad (2.69)$$

який називають детюнінгом (рис. 2.22).

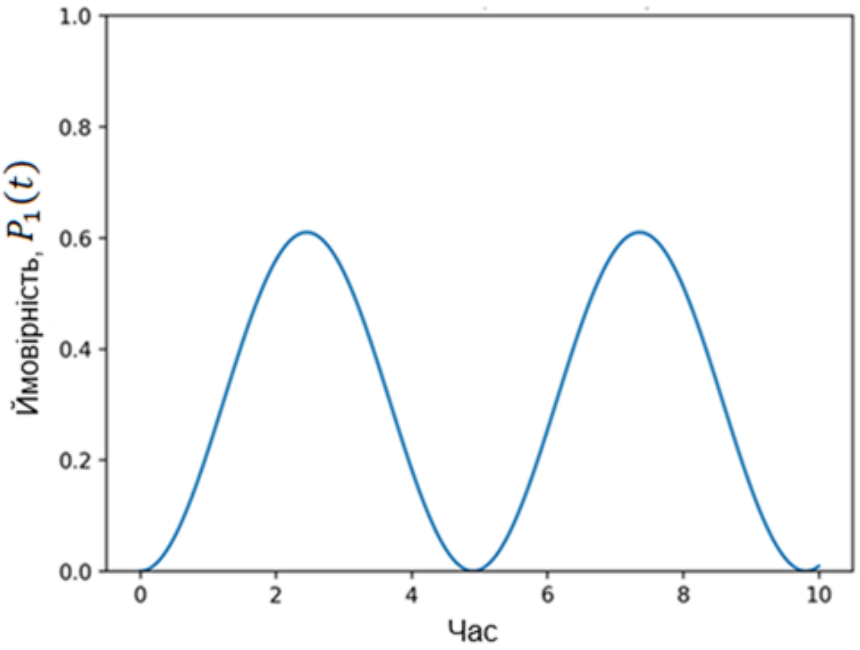


Рис. 2.22. Осциляції дворівневої системи при ненульовому детюнінгу

За наявності детюнінгу частота осциляцій змінюється як

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}. \tag{2.70}$$

Це призводить до зміни амплітуди переходів і ефективності керування кубітом.

До цього моменту розглядалася динаміка ідеалізованої дворівневої квантової системи, для якої передбачається повна ізоляція від навколишнього середовища. У такій моделі еволюція системи описується рівнянням Шредінгера і має повністю когерентний характер. Когерентна взаємодія означає, що зберігається фазовий зв’язок між компонентами суперпозиції, квантова система може виконувати керовані операції, можливі інтерференційні ефекти. У цьому режимі квантова система поводиться як добре керований квантовий об’єкт (рис.2.23).

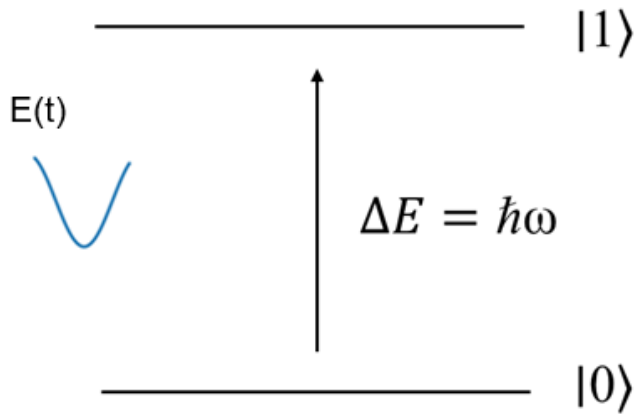


Рис. 2.23. Взаємодія дворівневої системи з електромагнітним полем: електромагнітне поле E(t)) може викликати переходи між енергетичними рівнями |0⟩ та |1⟩, що супроводжуються поглинанням або випромінюванням фотона з енергією E = ħω

Однак реальні фізичні системи ніколи не є абсолютно ізольованими. Будь-який кубіт неминуче взаємодіє з навколишнім середовищем, яке може включати електромагнітні поля, фонони кристалічної решітки, флуктуації заряду або магнітні шуми. Така взаємодія призводить до поступового руйнування квантових властивостей системи. У результаті еволюція квантового стану перестає бути ідеально когерентною. Фазові співвідношення між компонентами суперпозиції порушуються, а енергія системи може передаватися середовищу. Ці процеси визначають реальний час існування квантової інформації у фізичному кубіті. Динаміка відкритої дворівневої системи характеризується двома фундаментальними процесами: релаксацією енергії та декогеренцією фази.

Релаксація характеризується часом T_1 і пов’язана з передачею енергії від квантової системи до навколишнього середовища. Якщо система перебуває у збудженому стані або у суперпозиції енергетичних рівнів, з часом вона переходить до стану з меншою енергією. На сфері Блоха цей процес проявляється як поступове переміщення вектора Блоха у напрямку основного стану |0⟩ (рис. 2.19).

Декогеренція характеризується часом T_2 і пов'язана з руйнуванням фазових співвідношень між компонентами квантової суперпозиції. У цьому випадку система може не втрачати енергію, але інтерференційні властивості квантового стану зникають. На сфері Блоха декогеренція проявляється як **зменшення довжини вектора Блоха**, тобто рух стану від поверхні сфери до її центра (рис. 2.24).

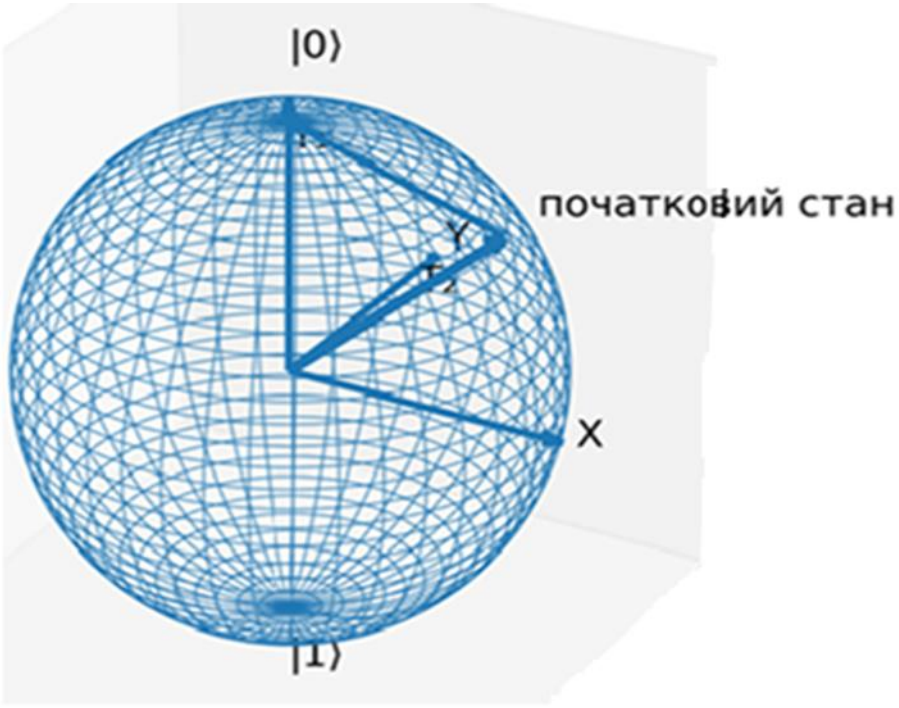


Рис. 2.24. Релаксація T_1 та декогеренція T_2 на сфері Блоха

На рисунку показано два основні механізми втрати квантових властивостей. Релаксація T_1 змінює населеності енергетичних рівнів системи, тоді як декогеренція T_2 призводить до зникнення фазової когерентності. На рисунку зображено сферу Блоха, яка використовується для геометричного представлення станів кубіта. Будь-який чистий стан дворівневої системи відповідає точці на поверхні цієї сфери, а сам стан можна подати у вигляді вектора Блоха, що виходить з центра сфери. Показано початковий стан кубіта, який відповідає суперпозиції базисних станів. Такий стан розташований на поверхні сфери Блоха і характеризується максимальною квантовою когерентністю. Перший процес, показаний на рисунку, – це нергетична релаксація, що характеризується часом T_1. Фізично релаксація означає обмін

енергією між квантовою системою та навколишнім середовищем. Якщо система перебуває у збудженому стані або у суперпозиції станів, то з часом вона прагне перейти до стану з найменшою енергією, тобто до основного стану. На сфері Блоха цей процес проявляється як поступове переміщення вектора Блоха у напрямку північного полюса, який відповідає основному стану $|0\rangle$. При цьому система втрачає енергію, випромінюючи її у вигляді фотонів або передаючи її середовищу. Таким чином, релаксація T_1 змінює населеності квантових рівнів, тобто ймовірності перебування системи у станах $|0\rangle$ та $|1\rangle$.

Другий процес, показаний на рисунку, – декогеренція, що характеризується часом T_2. Декогеренція пов'язана не з передачею енергії, а з втратою фазового зв'язку між компонентами квантової суперпозиції. У результаті взаємодії із середовищем фази квантових амплітуд починають флуктуювати, і інтерференційні властивості системи поступово зникають. На сфері Блоха декогеренція проявляється як зменшення довжини вектора Блоха, тобто рух стану від поверхні сфери до її центра. Центр сфери відповідає повністю змішаному стану, у якому квантова когерентність повністю втрачена. Геометрично цей процес відповідає переходу системи від когерентного квантового стану $|\psi\rangle$ до статистичної суміші. Спочатку стан кубіта описується вектором Блоха, що лежить на поверхні сфери і відповідає когерентній суперпозиції базисних станів. Унаслідок взаємодії з середовищем довжина цього вектора поступово зменшується, що відображає втрату квантової когерентності. У граничному випадку стан переходить у повністю змішаний стан, який відповідає центру сфери Блоха (рис. 2.25).



Рис. 2.25. Схематичне зображення переходу від когерентного квантового стану до класичного статистичного стану внаслідок декогеренції: зменшення довжини вектора Блоха відображає втрату квантової когерентності

На відміну від релаксації, декогеренція не обов'язково змінює енергію системи, але вона руйнує квантову суперпозицію. У більшості фізичних систем час декогеренції пов'язаний з часом релаксації співвідношенням

$$T_2 \leq 2T_1. \tag{2.71}$$

Це означає, що **втрата когерентності відбувається швидше або з тією ж швидкістю, що і релаксація енергії**. У реальних квантових пристроях саме декогеренція часто є основним фактором, який обмежує час збереження квантової інформації. У математичному описі це проявляється як зменшення недіагональних елементів матриці густини

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{2.72}$$

Елементи ρ_{01} та ρ_{10} відповідають за квантову когерентність. При декогеренції вони поступово зменшуються (рис. 2.26):

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\frac{t}{T_2}}, \tag{2.73}$$

де ρ_{01} – недіагональний елемент матриці густини (квантова когерентність), T_2 – час декогеренції.

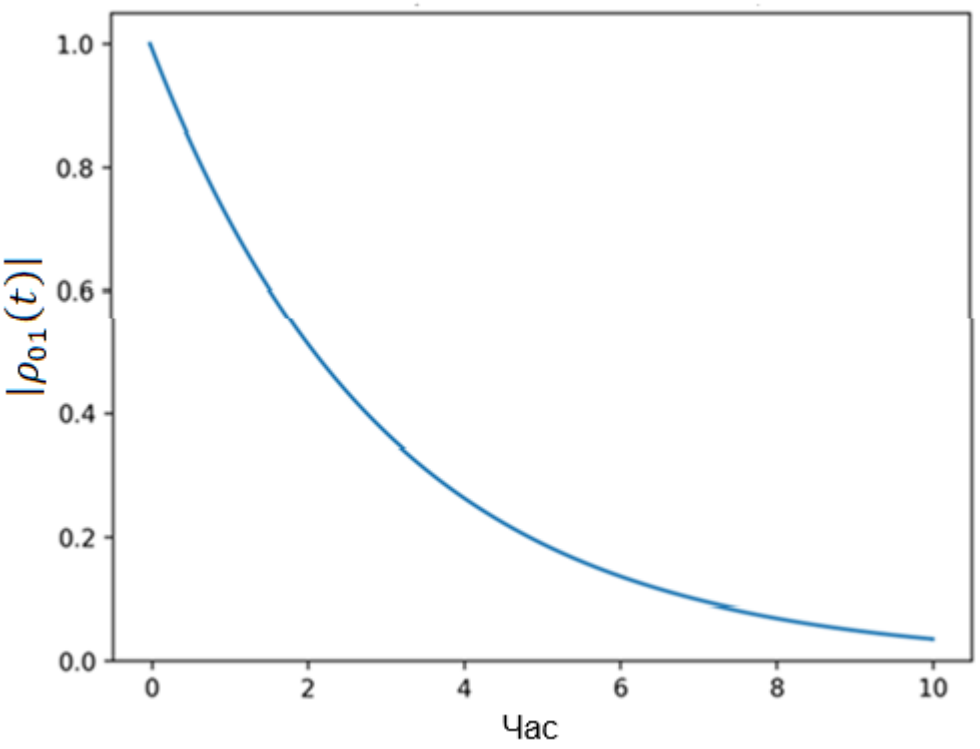


Рис. 2.26. Затухання квантової когерентності

Рисунок ілюструє експоненційне затухання квантової когерентності. При $t = 0$ когерентність максимальна. З часом взаємодія з середовищем руйнує фазовий зв'язок і система поступово переходить у змішаний стан. Релаксація T_1 і декогеренція T_2 є фундаментальними характеристиками будь-якого кубіта. Вони визначають час когерентності квантової системи, тобто інтервал часу, протягом якого система здатна зберігати квантову інформацію та виконувати квантові операції. Тому збільшення часу T_1 і T_2 є однією з ключових задач при створенні квантових комп’ютерів і квантових сенсорів.

У реальних фізичних системах існує багато джерел декогеренції. Середовище може містити велику кількість ступенів свободи, таких як фонони, фотони, електронні збудження або дефекти кристалічної решітки. Взаємодія квантової системи з цими ступенями свободи призводить до поступової втрати квантової когерентності (рис**.** 2.27**)**.

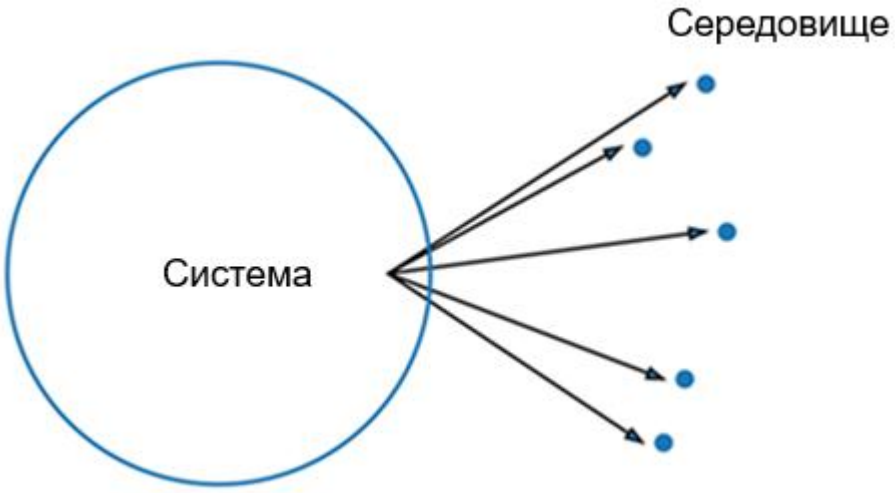


Рис. 2.27. Схематичне зображення взаємодії квантової системи з навколишнім середовищем, що призводить до декогеренції квантового стану: коло зліва – квантова система (кубіт); точки справа – ступені свободи середовища (фонони, фотони, дефекти, шуми); стрілки – канали взаємодії між системою і середовищем

Рисунок ілюструє взаємодію квантової системи з навколишнім середовищем, що призводить до декогеренції. Фізично це означає, що квантова система обмінюється енергією та інформацією з середовищем, у результаті чого руйнується фазова когерентність, зменшуються недіагональні елементи матриці густини, система переходить від чистого стану до змішаного. У реальних фізичних системах ці взаємодії можуть мати різну природу і пов’язані з різними типами флуктуацій та шумів. Найбільш поширеними фізичними механізмами, що призводять до втрати когерентності квантового стану, є такі:

1. Теплові флуктуації. Теплові збудження середовища можуть викликати випадкові переходи між енергетичними рівнями квантової системи.

2. Електромагнітні шуми. Флуктуації електромагнітного поля призводять до випадкових змін енергії та фази квантового стану.

3. Матеріальні дефекти. У твердотільних системах дефекти кристалічної решітки можуть взаємодіяти з кубітом і викликати додаткові флуктуації.

Приклади фізичних систем:

1. Надпровідні кубіти. У надпровідних квантових схемах основними джерелами декогеренції є флуктуації заряду, флуктуації магнітного потоку, втрати у мікрохвильових резонаторах.

2. Іонні пастки. Для іонних кубітів основні джерела шуму – це флуктуації лазерного поля, нагрівання пастки, магнітні шуми.

3. Спінові кубіти. У твердотільних системах декогеренція часто пов'язана з взаємодією електронного спіну з ядерними спінами середовища.

Таким чином, реальна динаміка кубітів у квантових пристроях визначається балансом між керованою взаємодією з електромагнітними полями та неконтрольованою взаємодією із середовищем. Керована взаємодія з електромагнітним полем дозволяє реалізувати квантові операції, тоді як неконтрольована взаємодія із середовищем призводить до релаксації та декогеренції, які обмежують час збереження квантової інформації. Саме ці процеси обмежують час існування когерентних квантових станів і визначають максимальний час виконання квантових алгоритмів. Тому одним із головних завдань сучасної квантової інженерії є збільшення часів T_1 і T_2 шляхом зменшення впливу шумів та ізоляції квантових систем від середовища. Фізичне розуміння цих процесів є ключовим для розвитку квантових технологій. Саме контроль взаємодії з полем та мінімізація декогеренції дозволяють створювати більш стабільні квантові системи та наближатися до реалізації масштабованих квантових комп'ютерів.

РОЗДІЛ 3. КВАНТОВА ЗАПЛУТАНІСТЬ ЯК ФІЗИЧНИЙ РЕСУРС

3.1. Концептуальні засади нелокальності та парадокс Ейнштейна-Подольського-Розена

У квантовій механіці значна частина фізичних систем, що досліджуються, складається не з однієї частинки або підсистеми, а з кількох взаємопов'язаних компонентів. Це можуть бути, наприклад, атом і фотон, два електрони, декілька квантових бітів у квантовому процесорі або фотонні пари, що використовуються у квантових комунікаціях. У таких випадках фізичний стан системи визначається не лише властивостями кожної окремої частини, але й характером їхнього взаємозв'язку. Саме цей взаємозв'язок відіграє визначальну роль у квантовій теорії інформації. Такі системи називаються складеними, і аналіз таких систем є фундаментальним для розуміння процесів взаємодії, квантових кореляцій та механізмів передачі інформації на квантовому рівні.

У класичній фізиці опис складеної системи зазвичай зводиться до опису її складових частин. Якщо відомі параметри кожного елемента системи, то стан усієї системи визначається повністю. Квантова механіка демонструє принципово іншу ситуацію. Для багатьох квантових систем повний стан системи не може бути відновлений лише на основі станів її окремих частин. У таких системах виникають специфічні квантові кореляції, що не мають класичного аналога. Саме вивчення таких систем приводить до одного з найважливіших понять сучасної квантової фізики – квантової заплутаності. Розуміння структури складених квантових систем є необхідною передумовою для аналізу квантових інформаційних процесів, таких як квантова телепортація, квантова криптографія, надщільне кодування та функціонування квантових мереж.

У попередніх розділах розглядалися фундаментальні принципи квантового опису окремих систем, зокрема поняття квантового стану, операторів спостережуваних величин і результатів вимірювання. Проте реальні фізичні процеси майже завжди пов'язані з взаємодією кількох квантових об'єктів. Тому для подальшого аналізу квантової передачі інформації необхідно розглянути,

яким чином формується квантовий опис систем, що складаються з кількох підсистем. Складена квантова система формується шляхом об'єднання двох або більше квантових підсистем, кожна з яких описується власним гільбертовим простором станів. Однак при об'єднанні цих підсистем виникає новий простір станів, який описує всі можливі конфігурації всієї системи. Саме структура цього простору визначає появу нових фізичних явищ, що не спостерігаються для ізольованих частинок. Формування математичного опису такої системи вимагає введення спеціальної структури простору станів, що дозволяє врахувати всі можливі комбінації квантових станів підсистем. У квантовій механіці ця структура реалізується за допомогою операції тензорного добутку гільбертових просторів. Такий формалізм забезпечує узгоджений опис багаточастинкових систем і дозволяє аналізувати квантові кореляції між їхніми компонентами.

Розглянемо систему, що складається з двох підсистем A та B. Нехай кожна з них описується відповідним гільбертовим простором станів H_{A} та $\mathrm{H_B}$. Простір станів складеної системи формується як тензорний добуток цих просторів

$$H = H_{\mathrm{A}} \otimes H_{\mathrm{B}}. \qquad (3.1)$$

Будь-який квантовий стан складеної системи належить цьому простору. Якщо підсистеми перебувають у станах $|\psi_A\rangle$ та $|\psi_{\mathrm{B}}\rangle$, то стан всієї системи може бути записаний у вигляді

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{B}}\rangle. \qquad (3.2)$$

Фізичний зміст цього формалізму полягає в тому, що стан складеної системи може включати не лише інформацію про окремі підсистеми, але й про їхню взаємну кореляцію. У деяких випадках стан усієї системи може бути представлений як комбінація незалежних станів підсистем. Такі стани називають сепарабельними або незаплутаними, оскільки вони допускають представлення у вигляді добутку станів окремих підсистем

Проте загальний квантовий стан складеної системи не обмежується такими конфігураціями. У більш загальному випадку стан системи може бути представлений як суперпозиція базисних станів тензорного простору

$$| \Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} | i\rangle_A \otimes | i\rangle_B . \quad (3.3)$$

Тобто існують стани, у яких поведінку підсистем неможливо описати незалежно одна від одної. У таких випадках квантовий стан системи характеризується особливими кореляціями, що виникають внаслідок взаємодії між підсистемами. Ці кореляції можуть проявлятися навіть тоді, коли підсистеми просторово розділені. Саме такі стани лежать в основі явища квантової заплутаності. Якщо коефіцієнти суперпозиції не допускають факторизації стану у вигляді добутку станів підсистем, такий стан називається заплутаним. Фізичний зміст цієї властивості полягає в тому, що результати вимірювань, виконаних над підсистемами, можуть демонструвати кореляції, які неможливо пояснити класичними статистичними моделями. Таким чином, у складених квантових системах частина інформації про систему зосереджена не в окремих підсистемах, а в структурі їхніх взаємних кореляцій.

Для дослідження стану окремої підсистеми використовується поняття редукованої матриці густини. Воно дозволяє отримати опис підсистеми шляхом усунення інформації про інші компоненти системи. Такий підхід є важливим інструментом при дослідженні квантових каналів, процесів декогеренції та передачі квантової інформації. Якщо стан складеної системи описується матрицею густини ρ_{AB}, то стан підсистеми А визначається операцією часткового сліду

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}), \quad (3.4)$$

де Tr_B – частковий слід по підсистемі В. Це математична операція в квантовій механіці, яка використовується для отримання стану однієї підсистеми складеної квантової системи шляхом «усунення» ступенів свободи іншої підсистеми. Аналогічно визначається стан підсистеми В. Ця процедура дозволяє описати статистичні властивості підсистеми без урахування ступенів свободи інших компонентів системи.

Для наочності розглянемо систему з двох кубітів. Кожен кубіт може перебувати у двох базових станах. Складена система може перебувати у різних

комбінаціях цих станів. У найпростішому випадку система може перебувати у стані, де кожен кубіт має визначений стан незалежно від іншого. У такій ситуації вимірювання одного кубіта не впливає на результати вимірювання іншого. Проте існують і інші стани, у яких результати вимірювання двох кубітів виявляються пов'язаними між собою. Якщо провести вимірювання одного з кубітів, результат другого визначається миттєво, незалежно від відстані між ними. Така поведінка є проявом квантових кореляцій і є принципово відмінною від класичних статистичних залежностей. Подібні стани широко використовуються в експериментах з квантової оптики, де створюються пари фотонів зі спільними квантовими властивостями. У таких експериментах вимірювання поляризації одного фотона дозволяє передбачити результат вимірювання другого.

Повертаючись до розгляду системи з двох кубітів, зазначимо, що базис тензорного простору цієї системи складається з чотирьох ортонормованих станів $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Сепарабельний стан системи може мати вигляд

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle. \tag{3.5}$$

У цьому випадку результати вимірювання кожного кубіта визначаються незалежно. Однак існують також суперпозиційні стани, наприклад,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \tag{3.6}$$

Такий стан не може бути представлений у вигляді добутку станів підсистем і демонструє максимальні квантові кореляції між кубітами. У реальних фізичних системах складені квантові стани виникають у різноманітних експериментальних конфігураціях. Складені квантові системи реалізуються у багатьох сучасних експериментах. Одним з найпоширеніших прикладів є пари фотонів, що утворюються під час процесу спонтанного параметричного перетворення частоти у нелінійних кристалах. У цьому процесі один фотон розщеплюється на два фотони зі строго корельованими властивостями. Іншим прикладом є системи з двох електронів у квантових точках або іонних пастках, де взаємодія між частинками дозволяє формувати складені квантові стани з

керованими кореляційними властивостями. У таких системах можна точно контролювати квантові стани частинок і досліджувати їхню взаємодію.

Також складені квантові системи лежать в основі квантових комп'ютерів. У квантових обчислювальних пристроях багатокубітні стани використовуються для реалізації квантових алгоритмів, у яких інформація кодується у колективних станах системи. Саме ця особливість дозволяє квантовим комп'ютерам демонструвати обчислювальні можливості, що перевищують можливості класичних обчислювальних систем для певних задач.

У квантових комунікаційних системах складені квантові стани застосовуються для передачі інформації між віддаленими вузлами квантової мережі. Зокрема, використання корельованих фотонних пар дозволяє реалізувати протоколи безпечного розподілу криптографічних ключів. Складені квантові системи формують фундаментальний клас фізичних об'єктів у квантовій механіці та квантовій теорії інформації. Їхній математичний опис базується на тензорній структурі гільбертових просторів, що дозволяє враховувати всі можливі конфігурації станів підсистем.

Основною особливістю таких систем є можливість існування квантових кореляцій, які не зводяться до властивостей окремих компонентів системи. Саме ці кореляції лежать в основі явища квантової заплутаності, яке відіграє центральну роль у сучасних квантових технологіях. Дослідження складених квантових систем створює теоретичну основу для аналізу квантових інформаційних протоколів, включаючи квантову телепортацію, квантову криптографію та функціонування квантових мереж. Розуміння структури таких систем є необхідним етапом у подальшому вивченні ресурсних властивостей квантової заплутаності.

Однією з найбільш фундаментальних і водночас незвичних властивостей квантової механіки є явище квантової нелокальності, яке проявляється у вигляді кореляцій між результатами вимірювань просторово розділених підсистем складеної квантової системи. У класичних фізичних теоріях вважається, що будь-який фізичний вплив передається через локальні взаємодії та поширюється

у просторі зі скінченною швидкістю. Такий принцип локальності є фундаментальним для більшості фізичних моделей. Проте квантова механіка передбачає існування кореляцій між віддаленими системами, які не можуть бути пояснені в межах класичних локальних теорій. Ці кореляції виникають у складених квантових системах і пов'язані з особливою структурою їхнього спільного квантового стану.

Проблема нелокальності стала предметом глибокого аналізу після формулювання парадоксу Ейнштейна–Подольського–Розена. Подальший розвиток цих ідей, зокрема робота Джона Белла, дозволив сформулювати експериментальні критерії, які дають змогу відрізнити квантові кореляції від класичних статистичних залежностей. Розгляд квантової нелокальності безпосередньо пов'язаний із дослідженням заплутаних станів складених систем. У таких станах підсистеми описуються єдиною хвильовою функцією, що не може бути представлена як добуток станів окремих частин. У цьому стані результати вимірювань двох підсистем виявляються статистично корельованими. Важливою особливістю таких кореляцій є те, що вони залежать від вибору параметрів вимірювання і можуть перевищувати межі, встановлені класичними локальними моделями. Саме аналіз цих кореляцій лежить в основі сучасного розуміння квантової нелокальності.

У класичних статистичних моделях передбачається, що результати вимірювань визначаються деякими внутрішніми параметрами системи, які існують незалежно від акту спостереження. Такі моделі отримали назву локальних теорій прихованих параметрів. У цих теоріях кореляції між результатами вимірювань можуть виникати лише через спільну підготовку системи. Результат вимірювання кожної підсистеми повинен залежати тільки від локальних параметрів і налаштувань вимірювального приладу. Для аналізу статистичних кореляцій між результатами вимірювань вводиться кореляційна функція

$$E(a,b) = \langle A(a)B(b) \rangle, \qquad (3.7)$$

де $A(a)$ – результат вимірювання першої підсистеми при налаштуванні приладу (a); $B(b)$ – результат вимірювання другої підсистеми при налаштуванні приладу (b); $E(a,b)$ – середнє значення добутку результатів вимірювань. Результати вимірювань зазвичай приймають значення +1або −1. Кореляційна функція показує, наскільки результати вимірювань пов'язані між собою. Наприклад: E = 1 – результати завжди однакові; E = −1 – результати завжди протилежні; E = 0 – результати некорельовані.

На основі таких кореляцій Джон Белл сформулював нерівності, які повинні виконуватися для будь-якої локальної теорії прихованих параметрів. Найбільш поширеною є форма ***нерівності CHSH*** (Clauser–Horne–Shimony–Holt), у якій вводиться параметр

$$S = E(a,b) + E(a,b') + E(a',b) - E(a',b'). \qquad (3.8)$$

де S – це комбінація кореляційних функцій, що характеризує силу статистичного зв'язку між результатами вимірювань двох просторово розділених підсистем; $E(a,b)$ – кореляційна функція, яка визначає середнє значення добутку результатів вимірювань; a, a' і b, b' позначають різні налаштування вимірювальних приладів для першої та другої підсистем відповідно; штрих ($'$) означає інший вибір параметра вимірювання. У реальному експерименті ці параметри відповідають різним орієнтаціям вимірювального приладу. Наведена формула об'єднує чотири різні кореляційні вимірювання, що відповідають різним комбінаціям налаштувань вимірювальних приладів. Тобто експеримент включає чотири конфігурації: вимірювання з налаштуваннями a та b; a та b'; a' та b; a' та b'. Комбінація цих кореляцій і дає параметр S. Параметр S називається ***параметром Белла – CHSH***. Він використовується для перевірки нерівностей Белла, які дозволяють відрізнити квантові кореляції від кореляцій, що можуть бути пояснені локальними теоріями прихованих параметрів. Саме величина S використовується для перевірки виконання або порушення нерівності Белла. Для будь-якої локальної теорії повинно виконуватися обмеження

$$| S | \leq 2. \qquad (3.9)$$

Це і є нерівність Белла (CHSH). Ця нерівність встановлює максимальну величину кореляцій, яка може бути отримана у межах локальних моделей. Проте квантова механіка передбачає, що для деяких заплутаних станів ця межа може бути перевищена. Максимальне значення параметра S, допустиме у квантовій теорії, визначається так званою ***межею Цірельсона***

$$| S | \leq 2\sqrt{2}. \qquad (3.10)$$

Нерівності Белла перевіряють дві фундаментальні ідеї класичної фізики:

1. локальність – фізичний вплив не може поширюватися швидше за світло;

2. реалізм – властивості системи існують незалежно від вимірювання. Порушення нерівностей Белла показує, що квантові системи не можуть одночасно задовольняти обидва ці принципи і є прямим свідченням того, що поведінка системи не може бути пояснена локальною теорією з прихованими параметрами. Експериментальна перевірка нерівностей Белла стала одним із найважливіших етапів у дослідженні квантової нелокальності. Для цього використовується пара частинок, підготовлених у заплутаному стані, результати вимірювань яких порівнюються при різних налаштуваннях вимірювальних приладів. У типовому експерименті джерело генерує пару фотонів у заплутаному поляризаційному стані. Після генерації фотони розповсюджуються у протилежних напрямках до двох незалежних вимірювальних станцій. Кожна станція оснащена поляризаційним аналізатором, орієнтацію якого можна змінювати відповідно до параметрів вимірювання a, a′ та b, b′ (рис.3.1).

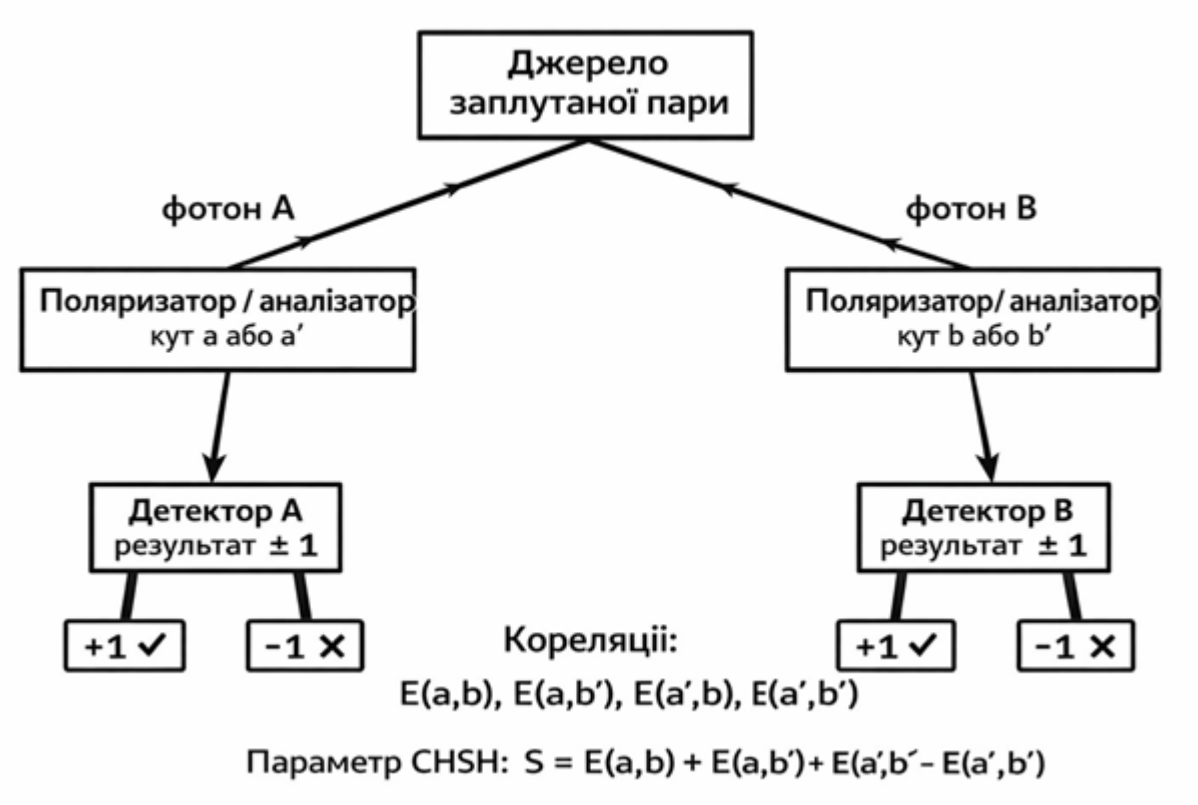


Рис. 3.1. Схема експерименту для перевірки нерівностей Белла у формі CHSH.

У кожному вимірюванні реєструється один із двох можливих результатів, які умовно позначаються значеннями +1 або −1. На основі статистики великої кількості вимірювань визначаються кореляційні функції $E(a, b), E(a, b'), E(a', b)E$ та $E(a', b')$ після чого обчислюється параметр Белла S. Якщо отримане значення задовольняє умову

$$| S |> 2, \qquad (3.11)$$

то експериментальний результат суперечить будь-якій локальній теорії прихованих параметрів.

Перші експериментальні перевірки нерівностей Белла були проведені у 1970-х роках. Найвідомішими є експерименти Алена Аспе, у яких використовувалися заплутані фотони. Отримані результати показали значення параметра S, що перевищує класичну межу 2 і наближається до квантової межі Цірельсона $2\sqrt{2}$. Подальші експерименти з використанням різних фізичних

систем – фотонів, іонів у пастках, атомних ансамблів та надпровідних кубітів також підтвердили порушення нерівностей Белла. Ці результати є одним із найважливіших експериментальних підтверджень фундаментальних передбачень квантової механіки.

Квантова нелокальність є фундаментальною властивістю складених квантових систем і відображає специфічну природу квантових кореляцій між підсистемами. На відміну від класичних фізичних моделей, у квантовій механіці результати вимірювань можуть демонструвати статистичні залежності, які перевищують межі, встановлені локальними теоріями прихованих параметрів. Формалізм нерівностей Белла забезпечує фундаментальний критерій для експериментального дослідження таких кореляцій. Порушення цих нерівностей, підтверджене численними експериментами, свідчить про фундаментальну відмінність квантових та класичних моделей опису фізичних систем. Квантова нелокальність розглядається не лише як концептуальна особливість квантової механіки, але й як важливий ресурс для реалізації квантових інформаційних технологій. Саме нелокальні квантові кореляції лежать в основі таких процесів, як квантова телепортація, квантова криптографія та функціонування квантових мереж.

Однією з центральних концептуальних проблем квантової механіки є питання про те, наскільки повним є квантово-механічний опис фізичної реальності. З часу формування квантової теорії у першій половині XX століття серед фізиків точилися активні дискусії щодо того, чи може хвильова функція повністю описувати стан фізичної системи, чи вона лише відображає статистичну інформацію про результати можливих вимірювань. Особливе місце у цих дискусіях посідає робота Альберта Ейнштейна, Бориса Подольського та Натана Розена, опублікована у 1935 році. У цій роботі було сформульовано аргумент, який отримав *назву* ***парадокс Ейнштейна–Подольського–Розена (EPR-парадокс)***. Метою авторів було з’ясувати, чи можна вважати квантову механіку повною теорією фізичної реальності.

Ейнштейн та його співавтори прагнули показати, що квантова механіка не забезпечує повного опису фізичних систем і що існують певні фізичні величини, значення яких повинні бути визначені незалежно від процесу вимірювання. Хоча їхній аргумент був спрямований на критику квантової теорії, у подальшому він відіграв надзвичайно важливу роль у розвитку сучасної квантової фізики. Саме аналіз парадоксу ЕПР привів до глибшого розуміння квантових кореляцій та явища квантової заплутаності. Для аналізу проблеми Ейнштейн, Подольський і Розен розглянули систему, що складається з двох частинок, які взаємодіяли між собою в минулому, а після цього розлітаються у протилежних напрямках. Після завершення взаємодії частинки більше не взаємодіють одна з одною, однак їхній спільний квантовий стан зберігає інформацію про попередню взаємодію.

У квантовій механіці така система описується єдиною хвильовою функцією, що належить тензорному добутку гільбертових просторів двох підсистем. Особливість такого опису полягає в тому, що вимірювання, виконане над однією підсистемою, може змінювати статистичний опис іншої підсистеми навіть за відсутності прямої фізичної взаємодії між ними. Це означає, що стан всієї системи може містити кореляції між підсистемами, які не зводяться до властивостей окремих частинок. Саме наявність таких кореляцій і стала основою для формулювання аргументації ЕПР.

У своїй роботі Ейнштейн, Подольський і Розен розглянули ідеалізовану систему з двох частинок, які після взаємодії розлітаються у протилежних напрямках. Завдяки законам збереження певні фізичні величини цих частинок виявляються строго корельованими. Наприклад, якщо сумарний імпульс системи дорівнює нулю, то імпульси частинок повинні бути рівними за модулем і протилежними за напрямком. У цій системі координати та імпульси частинок виявляються взаємопов’язаними. У результаті попередньої взаємодії для цих частинок виконуються співвідношення

$$x1 - x2 = const, \tag{3.12}$$

$$p1 + p2 = const. \tag{3.13}$$

Це означає, що різниця координат частинок та їхній сумарний імпульс мають визначені значення. Якщо провести вимірювання координати першої частинки, то координата другої частинки може бути визначена миттєво. Аналогічно, вимірювання імпульсу однієї частинки дозволяє визначити імпульс іншої. У квантовій механіці стан такої системи описується спільною хвильовою функцією, що не допускає факторизації на незалежні стани окремих частинок. Це означає, що фізичні властивості підсистем не можуть бути визначені незалежно одна від одної. Якщо провести вимірювання певної спостережуваної величини для однієї частинки, то квантова механіка передбачає миттєве уточнення статистичного опису другої частинки. З формальної точки зору це пов’язано з редукцією хвильової функції складеної системи після акту вимірювання.

Щоб проаналізувати наслідки такого опису, автори сформулювали критерій елемента фізичної реальності: якщо значення певної фізичної величини можна передбачити з імовірністю одиниця без безпосереднього впливу на систему, то така величина повинна відповідати елементу фізичної реальності. Застосування цього критерію до розглянутої системи приводило до висновку, що координата і імпульс другої частинки мають визначені значення незалежно від акту вимірювання. Проте стандартна квантова механіка не допускає одночасного точного визначення координати і імпульсу через принцип невизначеності. На основі цього Ейнштейн, Подольський і Розен дійшли висновку, що квантова механіка, ймовірно, є неповною теорією, і що повніший опис фізичних систем може вимагати введення додаткових параметрів, які отримали назву прихованих змінних.

Ідею парадоксу ЕПР можна проілюструвати на прикладі сучасної квантової системи з двох кубітів. Один із можливих спільних станів такої системи має вигляд

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \tag{3.14}$$

Цей стан описує систему, у якій два кубіти перебувають у суперпозиції двох можливих конфігурацій. Важливою особливістю такого стану є те, що він не може бути представлений у вигляді добутку станів окремих кубітів. Якщо провести вимірювання першого кубіта і отримати результат 0, то другий кубіт також опиниться у стані 0. Якщо ж результатом вимірювання буде 1, то другий кубіт також перебуватиме у стані 1. Таким чином, результати вимірювань двох підсистем виявляються строго корельованими. При цьому підсистеми можуть перебувати на значній відстані одна від одної. Подібна поведінка створює враження миттєвого встановлення властивостей віддаленої системи. Ейнштейн підкреслював, що миттєва кореляція між просторово розділеними системами суперечить принципу локальності. Він назвав цю особливість квантової механіки «моторошною дією на відстані».

Ідеї, закладені у парадоксі ЕПР, сьогодні знаходять експериментальне підтвердження у численних дослідженнях квантових кореляцій. Одним із найбільш поширених прикладів є експерименти з парами фотонів, що генеруються у процесі ***спонтанного параметричного перетворення частоти*** у нелінійних кристалах. У таких експериментах один фотон високої енергії перетворюється на пару фотонів меншої енергії. Ці фотони можуть перебувати у спільному квантовому стані, у якому їхні поляризаційні характеристики виявляються взаємопов’язаними. Після генерації фотони розповсюджуються у різних напрямках і реєструються детекторами, розташованими на значній відстані один від одного. Вимірювання поляризації одного фотона дозволяє передбачити результат вимірювання другого фотона з високою точністю. Такі експерименти стали основою для дослідження квантових кореляцій та перевірки фундаментальних передбачень квантової механіки. Крім того, подібні системи використовуються у сучасних квантових інформаційних технологіях, зокрема у протоколах квантової телепортації та квантового розподілу криптографічних ключів.

Парадокс Ейнштейна–Подольського–Розена є одним із найважливіших концептуальних результатів у розвитку квантової фізики. Він поставив

фундаментальні питання щодо природи квантового опису реальності, ролі вимірювання та принципу локальності у квантових системах. Хоча початково цей парадокс був сформульований як аргумент проти повноти квантової механіки, подальші дослідження показали, що квантова теорія передбачає існування особливих типів кореляцій між підсистемами, які не можуть бути пояснені у рамках класичних локальних моделей. Сьогодні парадокс ЕПР розглядається як концептуальна основа для розуміння явища квантової заплутаності та квантової нелокальності. Саме ці явища лежать в основі сучасних квантових технологій, включаючи квантову передачу інформації, квантові обчислення та квантові мережі.

3.2. Математичний апарат опису та класифікація заплутаних станів

Квантова заплутаність є одним із найважливіших явищ сучасної квантової фізики, яке відіграє ключову роль у квантовій теорії інформації. Вона характеризує особливий тип кореляцій між частинами складеної квантової системи, що не може бути пояснений у межах класичної фізики. На відміну від класичних статистичних кореляцій, які можуть бути пояснені у рамках теорії ймовірностей, квантова заплутаність має суттєво іншу природу і пов’язана з особливостями структури простору станів складених квантових систем.

Для дослідження квантової заплутаності необхідний строгий математичний апарат, який дозволяє описувати квантові стани складених систем, визначати наявність заплутаності та аналізувати її властивості. У квантовій теорії інформації математичний опис заплутаності базується на використанні гільбертових просторів, матриць густини та операцій над ними. Саме ці математичні інструменти дозволяють формалізувати поняття квантових кореляцій і визначити, чи є стан складеної системи заплутаним, а також кількісно оцінити ступінь заплутаності між її підсистемами. Математичний опис заплутаності має не лише фундаментальне значення для квантової механіки, але й важливе практичне застосування. Він дозволяє формалізувати поняття квантових кореляцій і відрізнити заплутані стани від сепарабельних. Крім того,

математичний опис заплутаності використовується при аналізі квантових інформаційних процесів, зокрема під час дослідження квантових каналів зв'язку, протоколів квантової передачі інформації та квантових обчислювальних систем.

Для формального опису квантової заплутаності необхідно розглянути математичну структуру станів складених квантових систем. У таких системах кожна підсистема характеризується власним простором станів, а повний простір станів системи формується шляхом їх об'єднання. У квантовій механіці цей процес описується за допомогою операції тензорного добутку гільбертових просторів. Така побудова дозволяє врахувати всі можливі конфігурації станів підсистем та їхні взаємні кореляції. Саме в цьому розширеному просторі виникають стани, що демонструють явище квантової заплутаності. У такому просторі можуть існувати стани різної природи: від повністю незалежних до сильно корельованих. Математичний опис таких станів може здійснюватися як через хвильові функції чистих станів, так і через матриці густини, які дозволяють описувати також статистичні суміші квантових станів. Саме використання матриці густини є найбільш універсальним підходом у сучасній квантовій теорії інформації.

Розглянемо складену квантову систему, що складається з двох підсистем A та B. Нехай кожна з них описується власним гільбертовим простором станів H_A та H_B. Простір станів всієї системи визначається як тензорний добуток цих просторів

$$H = H_A \otimes H_B. \tag{3.15}$$

Будь-який стан складеної системи належить цьому простору і може бути описаний вектором стану у цьому просторі. У найбільш загальному вигляді чистий стан двочастинкової системи може бути представлений як суперпозиція базисних станів підсистем

$$| \Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \, | i\rangle_A \otimes | i\rangle_B. \tag{3.16}$$

Коефіцієнти c_{ij} є комплексними числами і визначають амплітуди ймовірності відповідних конфігурацій підсистем. Якщо ці коефіцієнти можна

подати у вигляді добутку двох незалежних наборів коефіцієнтів (тобто допускають факторизацію), стан системи можна записати як добуток станів підсистем (сепарабельний стан). Проте у більш загальному випадку така факторизація неможлива. Саме тоді виникає явище квантової заплутаності, і стан є заплутаним. Якщо система перебуває у чистому стані |Ψ⟩, її матриця густини визначається як

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \tag{3.17}$$

Матриця густини дозволяє описувати не лише чисті стани, але й статистичні суміші різних квантових станів. Для складеної системи матриця густини позначається як ρ_{AB}. Щоб описати стан однієї з підсистем, використовується операція часткового сліду. Наприклад, редукований стан підсистеми А визначається як $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$. Аналогічно визначається редукована матриця густини підсистеми В – $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$. Редуковані матриці густини відіграють важливу роль у дослідженні квантової заплутаності. Важливою особливістю заплутаних станів є те, що якщо система перебуває у заплутаному стані, то редуковані стани підсистем є змішаними навіть тоді, коли стан всієї системи є чистим. Це означає, що частина інформації про систему міститься не у підсистемах окремо, а у кореляціях між ними.

У математичному формалізмі квантової теорії інформації стан складеної системи називається сепарабельним, якщо його матриця густини може бути представлена у вигляді

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \, {\rho_A}^{(k)} \otimes \, {\rho_B}^{(k)}, \tag{3.18}$$

де p_k – класичні ймовірності, що задовольняють умові нормування, а ${\rho_A}^{(k)}$ і ${\rho_B}^{(k)}$ – матриці густини відповідних підсистем. Якщо матриця густини не допускає такого розкладу, то стан системи є заплутаним.

Для ілюстрації математичної структури заплутаності розглянемо систему з двох кубітів в одному з максимально заплутаних станів Белла

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Матриця густини такої системи має вигляд

$$\rho = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|.$$

Якщо виконати операцію часткового сліду по одній з підсистем, можна отримати редуковану матрицю густини для іншої підсистеми. У цьому випадку вона має вигляд

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця відповідає максимально змішаному стану. Це означає, що окремий кубіт (окрема підсистема) не містить інформації про повний стан системи. Уся інформація про систему зосереджена у квантових кореляціях двома кубітами.

Математичний формалізм заплутаності широко використовується у задачах квантової теорії інформації. Він дозволяє аналізувати процеси передачі квантових станів між віддаленими системами та досліджувати властивості квантових комунікаційних каналів. Зокрема, він дозволяє аналізувати ефективність протоколів квантової передачі інформації. Наприклад, у протоколі квантової телепортації використовується пара частинок, підготовлених у максимально заплутаному стані. Математичний опис такого стану дозволяє показати, що інформація про квантовий стан може бути передана між віддаленими системами за допомогою локальних операцій і класичної комунікації. У квантових комунікаційних мережах математичний аналіз заплутаності використовується для дослідження процесів розподілу заплутаності між різними вузлами мережі та оцінки стійкості квантових кореляцій до шуму і декогеренції. Такі дослідження є важливими для розвитку квантових комунікацій та побудови глобальних квантових мереж.

Математичний опис квантової заплутаності є важливою складовою сучасної квантової теорії інформації. Використання гільбертових просторів, матриць густини та операції часткового сліду дозволяє формально описувати структуру складених квантових систем та аналізувати кореляції між їхніми підсистемами. Використання цього апарату дозволяє строго визначити умови

виникнення заплутаних станів та дослідити їхні властивості. Визначальними елементами такого опису є поняття редукованої матриці густини, операції часткового сліду та критерії сепарабельності. Ці інструменти дозволяють відрізнити заплутані стани від незаплутаних і аналізувати структуру квантових кореляцій між підсистемами.

Основною особливістю заплутаних станів є те, що інформація про систему не може бути повністю віднесена до окремих підсистем. Вона розподіляється між ними у вигляді квантових кореляцій, які визначають поведінку всієї системи. Розробка математичних методів аналізу заплутаності має важливе значення як для фундаментальних досліджень квантової механіки, так і для практичного розвитку квантових інформаційних технологій. Саме ці методи створюють теоретичну основу для дослідження квантових комунікацій, квантових обчислень та інших напрямів сучасної квантової науки.

Заплутаність є однією з фундаментальних властивостей квантових систем, що не має аналогів у класичній фізиці. Вона проявляється у виникненні сильних кореляцій між частинами системи, які неможливо описати незалежно одна від одної. Формально квантовий стан вважається заплутаним, якщо його неможливо подати у вигляді тензорного добутку станів підсистем:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \qquad (3.19)$$

Заплутаність лежить в основі таких квантових явищ і технологій, як квантова телепортація, квантова криптографія та квантові обчислення. У зв’язку з цим виникає потреба у систематизації різних типів заплутаних станів, що дозволяє краще зрозуміти їхні властивості та ефективно використовувати у практичних застосуваннях. З огляду на складність квантових систем, класифікація заплутаних станів здійснюється за кількома взаємопов’язаними ознаками, серед яких найважливішими є кількість частинок, структура кореляцій, ступінь заплутаності, а також можливість перетворення станів.

Першим природним критерієм класифікації є ***кількість підсистем, між якими виникає заплутаність***. Такий підхід дозволяє розділити всі квантові стани на двочастинкові та багаточастинкові. У найпростішому випадку

розглядається складена квантова система, що складається з двох кубітів. Саме для таких систем вперше було сформульовано поняття заплутаності, і вони залишаються найбільш дослідженими. Класичним прикладом є стани Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.20)$$

Ці стани є максимально заплутаними і характеризуються повною кореляцією між результатами вимірювань. Максимально заплутані стани характеризуються тим, що квантова інформація системи повністю розподілена між підсистемами, і жодна з них не може бути описана незалежним чистим станом. На відміну від класичних кореляцій, що можуть бути інтерпретовані через спільну підготовку системи або приховані параметри, максимально заплутані стани характеризуються тим, що інформація про всю систему розподіляється між підсистемами таким чином, що окремі підсистеми не мають повного опису свого стану. Іншими словами, стан кожної окремої частини системи виглядає статистично невизначеним, тоді як стан всієї системи визначений повністю. Саме ця особливість робить максимально заплутані стани надзвичайно важливими для задач квантової передачі інформації, квантових обчислень та квантових комунікацій. Вони використовуються у протоколах квантової телепортації, надщільного кодування та розподілу криптографічних ключів.

З точки зору формалізму квантової механіки максимально заплутані стани представляють особливий клас векторів у тензорному добутку гільбертових просторів підсистем, для яких редуковані стани окремих підсистем мають максимально змішаний характер. У загальному випадку стан складеної квантової системи може демонструвати різні рівні квантових кореляцій між підсистемами. Деякі стани містять лише слабкі квантові кореляції, тоді як інші характеризуються максимально можливою взаємозалежністю між результатами вимірювань підсистем, тобто максимально можливим ступенем квантової заплутаності.

Для двокубітних систем існує спеціальний набір станів, у яких квантова заплутаність досягає максимального значення. Саме ці стани отримали назву максимально заплутаних. Ці стани утворюють ортонормований базис у просторі станів двочастинкової системи і широко використовуються у квантових інформаційних задачах. Розгляд властивостей таких станів дозволяє глибше зрозуміти структуру квантових кореляцій і їхню роль у процесах передачі та обробки квантової інформації. Разом з тим, у реальних квантових системах часто доводиться мати справу з багаточастинковими станами, які мають значно складнішу структуру. У таких системах виникають нові типи заплутаності, що не зводяться до парних кореляцій. Найбільш відомими прикладами є стани GHZ (Greenberger–Horne–Zeilinger) та W для трьох кубітів:

$$
\begin{aligned}
|\,GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,000\rangle + |\,111\rangle), \\
|\,W\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\,001\rangle + |\,010\rangle + |\,100\rangle).
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Ці стани відрізняються не лише математично, але й фізично: GHZ-стан – це стан, у якому: усі частинки знаходяться одночасно у двох колективних станах; система не має визначеного стану, поки не відбудеться вимірювання. Іншими словами, або всі кубіти = 0 або всі кубіти = 1. Для таких станів характерні максимальна глобальна заплутаність і сильні квантові кореляції. GHZ-стани є більш чутливими до втрат частинок. Якщо втратити один кубіт, то GHZ-стан переходить в незаплутаний стан, тобто заплутаність повністю руйнується. W-стан – це стан, у якому: одна «квантова одиниця» (збудження) розподілена між частинками і невідомо, в якому саме кубіті вона знаходиться. У W-стані кореляції існують між усіма частинами системи і він більш стійкий до втрат. W-стани зберігають заплутаність навіть при частковій втраті системи. Якщо втратити один кубіт, то W-стан зберігає заплутаність, тобто система залишається частково заплутаною. Таким чином, уже на цьому рівні класифікації проявляється різноманіття властивостей квантових кореляцій.

Однак кількість частинок не повністю визначає характер заплутаності. Для більш глибокого аналізу необхідно враховувати ***структуру кореляцій між підсистемами***. У цьому контексті виділяють повністю заплутані стани, у яких усі підсистеми нерозривно пов'язані між собою. Такі стани не допускають розбиття на незалежні частини без втрати квантових кореляцій. Вони є важливим ресурсом у задачах квантових обчислень і розподілених квантових протоколів. На противагу цьому існують частково заплутані стани, в яких заплутаність присутня лише між окремими підсистемами. У цьому випадку система може бути розділена на групи, де деякі з них залишаються незалежними. Особливим випадком є бі-сепарабельні стани, які можна подати у вигляді добутку заплутаної та незаплутаної підсистем:

$$|\psi\rangle = |\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_C\rangle. \qquad (3.22)$$

Така класифікація дозволяє точніше описати топологію квантових кореляцій і визначити, які саме підсистеми беруть участь у заплутаності.

Наступним важливим аспектом є ***кількісна оцінка заплутаності***. Навіть у межах однієї і тієї ж структури стани можуть відрізнятися за ступенем кореляції. Для чистих станів двокубітної системи зручно використовувати ентропію фон Неймана редукованої матриці густини:

$$S = -Tr(\rho_A log \rho_A). \qquad (3.23)$$

Якщо ентропія дорівнює одиниці, стан є максимально заплутаним. Якщо вона дорівнює нулю, стан є сепарабельним, тобто не містить квантових кореляцій. Проміжні значення відповідають частково заплутаним станам. Таким чином, ступінь заплутаності дозволяє кількісно порівнювати різні стани і визначати їхню ефективність як ресурсу.

До цього моменту розглядалися переважно чисті квантові стани. Проте у реальних умовах квантові системи взаємодіють із середовищем, що призводить до виникнення ***змішаних станів***. Чистий стан описується матрицею густини:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \qquad (3.24)$$

тоді як змішаний стан має вигляд:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid. \tag{3.25}$$

Заплутаність у змішаних станах є більш складною для аналізу, оскільки вона може бути «прихованою» у статистичній суміші. Це вимагає використання спеціальних критеріїв, таких як критерій Переса–Городецького. Таким чином, класифікація за змішаністю станів є необхідною для опису реалістичних квантових систем.

Ще одним важливим підходом є класифікація станів ***за можливістю їх взаємного перетворення***. У квантовій теорії інформації ключову роль відіграють локальні операції та класичний зв'язок (LOCC). Якщо один стан може бути отриманий з іншого за допомогою LOCC, то вони належать до одного класу ресурсів. Більш загальним є підхід SLOCC, який допускає імовірнісні перетворення. У цьому контексті важливим результатом є те, що, наприклад, стани GHZ і W не можуть бути перетворені один в один навіть за допомогою SLOCC. Це означає, що вони належать до різних фундаментальних класів заплутаності.

Завершуючи класифікацію, доцільно розглянути практичний аспект використання заплутаних станів. Залежно від задачі, різні типи заплутаності можуть бути більш або менш придатними. Зокрема, максимально заплутані стани використовуються як ресурс у квантових протоколах передачі інформації. У той же час стани, стійкі до втрат, є важливими для квантових мереж, де неминуче виникають втрати частинок і шум. Таким чином, прикладна класифікація доповнює теоретичну, дозволяючи вибирати оптимальні стани для конкретних задач.

Отже, класифікація заплутаних станів є багатовимірною задачею, яка охоплює різні аспекти квантових систем. Таке багаторівневе представлення дозволяє не лише глибше зрозуміти природу квантових кореляцій, але й ефективно використовувати їх у сучасних квантових технологіях. Особливу роль відіграють фундаментальні класи станів, такі як Белла, GHZ та W, які є базовими ресурсами квантової інформації. Подальші дослідження у цій галузі спрямовані

на розробку нових критеріїв класифікації та методів кількісної оцінки заплутаності, що є необхідним для розвитку квантових обчислень і квантового інтернету.

3.3. Нерівності Белла (CHSH, CH) як критерій нелокальності

Однією з основних концептуальних проблем сучасної фізики є питання про природу кореляцій між просторово розділеними квантовими системами. У класичній фізиці такі кореляції завжди можуть бути пояснені через спільну причину або передачу сигналу, що не перевищує швидкість світла. Однак у квантовій теорії ситуація суттєво ускладнюється: існують стани, для яких спостерігаються кореляції, що не можуть бути зведені до класичних механізмів. Ця проблема була вперше чітко сформульована у роботі, відомій як парадокс ЕПР, де було поставлено питання про повноту квантової теорії. У подальшому ці ідеї отримали строгий математичний розвиток у роботах Джона Белла, який показав, що будь-яка теорія, яка базується на принципах локальності та реалізму, повинна задовольняти певні нерівності. Нерівності Белла стали ключовим інструментом для експериментальної перевірки фундаментальних принципів Квантова механіка і дозволили чітко відокремити квантові кореляції від класичних. Особливе значення мають їх форми CHSH та CH, які широко використовуються як у теоретичних дослідженнях, так і в експериментальній практиці. Для глибокого розуміння сутності нерівностей Белла необхідно спочатку сформулювати припущення локального реалізму, після чого перейти до математичного виведення відповідних обмежень і порівняти їх із передбаченнями квантової теорії.

У класичному підході передбачається, що результати вимірювань визначаються наперед заданими параметрами системи, які не залежать від акту вимірювання (реалізм), а впливи не можуть поширюватися швидше за світло (локальність). Ці параметри позначаються через λ і називаються прихованими змінними. Вважається, що існує розподіл імовірностей $\rho(\lambda)$, який задовольняє умову нормування:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1. \tag{3.26}$$

Розглянемо систему з двох частинок, що розлітаються у протилежних напрямках, і вимірюються двома спостерігачами, яких традиційно позначають як A (Аліса) і B (Боб). Кожен із них може обирати параметр вимірювання (наприклад, напрямок спіну або поляризації), що позначається як a та b відповідно. У рамках локальної теорії прихованих параметрів результати вимірювань описуються функціями $A(a,\lambda)$, $B(b,\lambda)$, де a і b – параметри вимірювальних установок, а функції набувають значень ±1. Важливою умовою є локальність: результат A не залежить від параметра b, а результат B – від a. Кореляційна функція визначається як середнє значення добутку результатів:

$$E(a,b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a,\lambda) B(b,\lambda). \tag{3.27}$$

де $\rho(\lambda)$ – розподіл прихованих параметрів, що задовольняє умову нормування $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$. Цей вираз описує статистичні залежності між результатами вимірювань.

Основним результатом, який дозволяє перевірити справедливість локального реалізму, є нерівності Белла, вперше сформульовані Джоном Беллом. Ці нерівності накладають обмеження на можливі значення кореляцій у будь-якій локальній теорії. Найбільш відомою і зручною для експериментальної перевірки є форма нерівності CHSH (Clauser–Horne–Shimony–Holt). Доведення ґрунтується на тому, що для фіксованого значення λ параметр Белла S визначається як

$$S(\lambda) = A(a,\lambda)B(b,\lambda) + A(a,\lambda)B(b',\lambda) + A(a',\lambda)B(b,\lambda) - A(a',\lambda)B(b',\lambda). \tag{3.28}$$

Після перегрупування отримуємо

$$S(\lambda) = A(a,\lambda)(B(b,\lambda) + B(b',\lambda)) + A(a',\lambda)(B(b,\lambda) - B(b',\lambda)).$$

Оскільки $B(b,\lambda), B(b',\lambda) \in \{-1,+1\}$, то можливі лише два варіанти:

1. $B(b) = B(b')$, тоді $B(b) + B(b') = \pm 2$, а $B(b) - B(b') = 0$;

2. $B(b) = -B(b')$, тоді $B(b) + B(b') = 0$, а $B(b) - B(b') = \pm 2$.

Отже, у будь-якому випадку

$$| S(\lambda) | \leq 2.$$

Усереднення за λ не може збільшити цю межу, що і приводить до обмеження

$$| S | \leq 2.$$

Це і є нерівність CHSH, яка є універсальним обмеженням для всіх локальних теорій.

Проте квантова механіка передбачає можливість порушення цієї нерівності. Розглянемо заплутаний стан двох кубітів (наприклад, поляризацій фотонів)

$$| \Psi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| 01\rangle - | 10\rangle).$$

Нехай вимірювання описуються операторами:

$$\hat{A} = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \qquad \hat{B} = \vec{b} \cdot \vec{\sigma},$$

де $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – матриці Паулі; $\vec{a}$, $\vec{b}$ – одиничні вектори напрямків. Тоді кореляція:

$$E(a,b) = \langle \Psi^- | \hat{A} \otimes \hat{B} | \Psi^- \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Обираючи напрямки вимірювання:

$$\vec{a} = (0,0,1), \qquad \overrightarrow{a'} = (1,0,0),$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad \overrightarrow{b'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),$$

отримуємо

$$| S | = 2\sqrt{2},$$

Це перевищує класичну межу 2 (межу Цірельсона) і демонструє квантову нелокальність. Цей результат має глибокий фізичний зміст: він демонструє, що квантові кореляції не можуть бути пояснені жодною локальною теорією прихованих параметрів. Водночас вони не є довільно сильними, а обмежені внутрішньою структурою квантової теорії.

Поряд із формою CHSH існує також інша важлива форма нерівностей Белла – нерівність CH (Clauser–Horne), яка формулюється без використання кореляційних функцій, а безпосередньо через ймовірності. Це особливо важливо

для реальних експериментів, де детектори можуть бути неідеальними. Нерівність CH має вигляд

$$-1 \leq P(a,b) - P(a,b') + P(a',b) + P(a',b') - P(a') - P(b) \leq 0, \qquad (3.29)$$

де $P(a,b)$ – спільна ймовірність отримання певних результатів при налаштуваннях a і b; $P(a')$, $P(b)$ – маргінальні ймовірності. Ця форма є більш придатною для реальних експериментів, оскільки враховує неідеальні детектори.

Порушення нерівностей Белла було експериментально підтверджено у низці робіт, починаючи з експериментів Ален Аспе, які використали заплутані фотонні пари. Ці експерименти продемонстрували, що природа не задовольняє принципам локального реалізму, а отже, квантова механіка є фундаментально нелокальною теорією. Фізично нелокальність означає, що результати вимірювань на одній частинці можуть бути корельовані з результатами на іншій незалежно від відстані між ними, але при цьому сигнал не передається швидше за світло. Це узгоджується з релятивістським принципом причинності, оскільки статистика вимірювань на одній стороні не залежить від вибору вимірювання на іншій. Таке поєднання нелокальних кореляцій і відсутності надсвітлової передачі інформації є однією з найглибших властивостей квантової теорії.

У сучасній квантовій інформації нерівності Белла розглядаються не лише як фундаментальний тест, але і як ресурс. Порушення нерівностей Белла використовується для сертифікації квантової заплутаності, перевірки квантових пристроїв, побудови протоколів device-independent криптографії. Таким чином, нерівності Белла виконують роль критерію, який дозволяє відрізнити класичні кореляції від квантових. Вони встановлюють чітку межу між локальними та нелокальними теоріями і демонструють, що квантова механіка виходить за межі класичної інтуїції. Підсумовуючи, можна зазначити, що нерівності Белла, зокрема у формах CHSH і CH, є основним інструментом аналізу фундаментальних властивостей квантових систем. Вони не лише спростовують можливість локального реалізму, але й відкривають шлях до практичного використання квантової нелокальності у сучасних технологіях квантового зв’язку та обчислень.

3.4. Критерії ідентифікації та кількісні міри квантової заплутаності

Квантова заплутаність є фундаментальною характеристикою складених квантових систем, яка відображає наявність специфічних квантових кореляцій між їхніми підсистемами. У сучасній квантовій теорії інформації заплутаність розглядається не лише як концептуальна особливість квантової механіки, але й як важливий фізичний ресурс, що використовується у квантових інформаційних протоколах. Саме тому надзвичайно важливим завданням є розробка формальних методів, які дозволяють визначити, чи є певний квантовий стан заплутаним.

З математичної точки зору встановлення наявності заплутаності є нетривіальною задачею. Для чистих станів критерій заплутаності формулюється відносно просто: стан є заплутаним, якщо він не допускає факторизації на незалежні стани підсистем. Однак для змішаних квантових станів ситуація є значно складнішою. У таких випадках необхідно використовувати спеціальні математичні критерії, які дозволяють виявити заплутаність у структурі матриці густини.

У квантовій теорії інформації було запропоновано декілька підходів до розв’язання цієї задачі. Найбільш відомими серед них є критерій часткового транспонування, критерії на основі позитивних відображень, а також методи використання свідків заплутаності. Ці підходи забезпечують формальні інструменти для аналізу квантових кореляцій та дозволяють відрізнити заплутані стани від сепарабельних.

Для формального дослідження заплутаності необхідно розглянути структуру матриці густини складеної квантової системи. У загальному випадку стан системи, що складається з підсистем A та B, описується матрицею густини ρ_{AB}. Якщо цей стан може бути представлений у вигляді статистичної суміші добутків матриць густини підсистем, то такий стан називається сепарабельним. У протилежному випадку система перебуває у заплутаному стані. Безпосередня перевірка цієї умови часто є складною, тому для практичного аналізу

використовуються різні математичні критерії, які дозволяють визначити наявність заплутаності у структурі квантового стану.

Критерій часткового транспонування (критерій Переса). Одним із найбільш відомих критеріїв заплутаності є критерій часткового транспонування, запропонований Ашером Пересом. Він базується на властивостях операції транспонування матриці густини.

Нехай матриця густини складеної системи має вигляд

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,j} \rho_{ij,kl} \; |\, i\rangle\langle j \,| \otimes |\, k\rangle\langle l \,|, \tag{3.30}$$

де ρ_{AB} – матриця густини складеної квантової системи, що складається з підсистем A та B; $\sum_{i,j,k,j}$ – сумування за всіма значеннями індексів i, j, k, j, які відповідають базисним станам підсистем; $\rho_{ij,kl}$ – матричні елементи матриці густини у вибраному базисі: вони визначають ймовірнісні амплітуди переходів між базисними станами системи; $|\, i\rangle$ – базисний вектор гільбертового простору підсистеми A; $\langle j \,|$ – спряжений (бра) вектор до стану $|\, j\rangle$; $|\, i\rangle\langle j \,|$ – оператор проєкції у просторі станів підсистеми A; $|\, k\rangle\langle l \,|$ – аналогічний оператор у просторі станів підсистеми B; $\otimes$ – операція тензорного добутку, яка поєднує оператори підсистем у оператор складеної системи. Таким чином, цей вираз представляє матрицю густини складеної системи як суму операторів, побудованих із базисних станів підсистем. Часткове транспонування по підсистемі B визначається як операція

$$\rho_{AB}^{T_B} = \sum_{i,j,k,j} \rho_{ij,kl} \; |\, i\rangle\langle j \,| \otimes |\, l\rangle\langle k \,|, \tag{3.31}$$

де $\rho_{AB}^{T_B}$ – матриця густини після часткового транспонування по підсистемі B; T_B – операція транспонування, виконана тільки для підсистеми B. Це означає, що транспонується лише частина матриці густини, яка відповідає підсистемі B, тоді як підсистема A залишається незмінною. У результаті транспонування оператор $|\, k\rangle\langle l \,|$ перетворюється на $|\, l\rangle\langle k \,|$. Саме така операція використовується у ***критерії Переса*** для визначення заплутаності квантового стану. Згідно з

критерієм Переса, якщо після виконання операції часткового транспонування матриця густини має від'ємні власні значення, то стан системи є заплутаним. Фізичний зміст цього критерію полягає у тому, що сепарабельні стани зберігають позитивність при частковому транспонуванні, тоді як заплутані стани можуть порушувати цю властивість. Цей критерій є необхідною умовою для сепарабельності квантового стану. Для деяких класів систем він також є достатньою умовою.

Критерій Переса–Городецьких. Подальший розвиток цього підходу був запропонований дослідниками Міхалом та Павлом Городецькими., які показали, що для систем невеликої розмірності, зокрема розмірності 2×2 та 2× 3 критерій часткового транспонування є не лише необхідним, але й достатнім для визначення сепарабельності. Інакше кажучи, якщо частково транспонована матриця густини для таких систем є позитивною, то стан є сепарабельним. Якщо ж вона має від'ємні власні значення, то система обов'язково перебуває у заплутаному стані. Для систем більшої розмірності цей критерій залишається лише необхідною умовою. У таких системах можуть існувати так звані ***зв'язані заплутані стани,*** які мають позитивну частково транспоновану матрицю густини.

Свідки заплутаності. Іншим важливим підходом до виявлення заплутаності є використання так званих свідків заплутаності. Цей метод базується на геометричних властивостях простору квантових станів. Геометрично простір квантових станів можна уявити як опуклу множину, всередині якої знаходиться підмножина сепарабельних станів. Заплутані стани розташовуються поза цією підмножиною. У такій геометричній інтерпретації деякі математичні методи дозволяють «відокремити» заплутані стани від сепарабельних. Одним із таких методів є використання спеціальних операторів, які називають свідками заплутаності. ***Свідок заплутаності*** – це оператор W, для якого виконується умова

$$Tr(W\rho) < 0 \qquad (3.32)$$

для деяких заплутаних станів ρ, тоді як для всіх сепарабельних станів виконується

$$Tr(W\rho) \geq 0, \tag{3.33}$$

де ρ – матриця густини досліджуваного квантового стану; Tr – операція сліду матриці; $Tr(W\rho)$ – скалярна величина, що визначається як слід добутку операторів W та ρ. Таким чином, якщо для певного стану значення цього виразу є від'ємним, можна зробити висновок про наявність заплутаності. У геометричному представленні свідок заплутаності можна інтерпретувати як гіперплощину, що відокремлює певні заплутані стани від множини сепарабельних. Для матриці A слід визначається як сума її діагональних елементів:

$$Tr(A) = \sum_i A_{ii}. \tag{3.34}$$

Цей підхід є особливо корисним у експериментальних дослідженнях, оскільки дозволяє виявляти заплутаність без повної реконструкції матриці густини системи. Іншою ілюстрацією критеріїв заплутаності може бути аналіз власних значень частково транспонованої матриці густини. Наявність від'ємних власних значень є прямим індикатором квантової заплутаності.

Критерії заплутаності широко застосовуються у сучасних дослідженнях квантових інформаційних систем. Наприклад, у дослідженнях фотонних систем після проведення серії вимірювань можна реконструювати матрицю густини системи та перевірити її на відповідність критерію часткового транспонування. Подібні методи використовуються також у системах іонних пасток, надпровідних квантових схемах та інших платформах квантових технологій. У цих експериментах важливо переконатися, що підготовлений стан дійсно є заплутаним.

У квантових комунікаційних протоколах ці критерії дозволяють перевіряти, чи вдалося успішно створити заплутаний стан між віддаленими вузлами мережі. Це особливо важливо у задачах квантового розподілу ключів, де безпека протоколу безпосередньо залежить від наявності квантової

заплутаності. Крім того, критерії заплутаності використовуються при дослідженні процесів декогеренції та впливу шуму на квантові системи. Під час взаємодії з навколишнім середовищем квантові кореляції поступово зменшуються, і критерії заплутаності дозволяють визначити момент, коли система переходить із заплутаного стану у сепарабельний.

Критерії наявності квантової заплутаності є важливим інструментом сучасної квантової теорії інформації. Вони дозволяють формально визначити, чи містить певний квантовий стан нелокальні квантові кореляції між підсистемами. Серед найбільш важливих методів виявлення заплутаності можна виділити критерій часткового транспонування, критерій Переса–Городецьких та метод свідків заплутаності. Кожен з цих підходів базується на різних математичних властивостях квантових станів і має власні області застосування.

Розробка та застосування критеріїв заплутаності відіграє ключову роль як у фундаментальних дослідженнях квантової механіки, так і у практичних задачах квантових інформаційних технологій. Саме ці критерії дозволяють перевіряти наявність квантових кореляцій у реальних фізичних системах і забезпечують теоретичну основу для подальшого розвитку квантових комунікацій та квантових обчислень.

У сучасній квантовій теорії інформації заплутаність розглядається не лише як концептуальна особливість квантових систем, але і як кількісно вимірюваний фізичний ресурс. Вона визначає наявність специфічних квантових кореляцій між підсистемами, які не можуть бути пояснені за допомогою класичних фізичних моделей. Для практичного використання квантових кореляцій у задачах передачі та обробки інформації необхідно мати можливість не тільки визначити наявність заплутаності, але й оцінити її ступінь. Саме для цього у квантовій інформаційній теорії було введено поняття ***мір квантової заплутаності*** (entanglement measures).

Міри заплутаності дозволяють кількісно характеризувати рівень квантових кореляцій між підсистемами складеної квантової системи. Вони відіграють важливу роль при аналізі квантових інформаційних процесів, зокрема при

дослідженні ефективності квантових каналів зв’язку, протоколів телепортації та квантових обчислювальних алгоритмів. Крім того, такі міри дають змогу порівнювати різні квантові стани з точки зору їхньої придатності для використання у квантових технологіях. Розробка мір заплутаності є складною теоретичною задачею, оскільки квантові кореляції мають багатовимірну структуру, а їхня інтерпретація залежить від властивостей конкретної квантової системи. У зв’язку з цим було запропоновано декілька різних підходів до кількісного опису заплутаності, кожен з яких ґрунтується на певних математичних або інформаційно-теоретичних принципах.

У загальному випадку ступінь заплутаності може змінюватися у широких межах. Деякі квантові стани демонструють лише слабкі квантові кореляції між підсистемами, тоді як інші характеризуються максимально можливим рівнем заплутаності. Щоб кількісно описати ці відмінності, було запропоновано різні математичні функції, які отримали назву мір заплутаності. Такі функції повинні задовольняти певні фізичні вимоги. Зокрема, вони повинні дорівнювати нулю для всіх сепарабельних станів і набувати додатних значень для заплутаних станів. Крім того, міри заплутаності не повинні збільшуватися при виконанні локальних операцій над підсистемами та обміну класичною інформацією між ними. Такі властивості відображають ресурсну природу заплутаності. Якщо заплутаність розглядається як ресурс, то локальні операції не можуть створювати її з нічого, а лише перерозподіляти вже наявні квантові кореляції між підсистемами.

На основі цих принципів було введено різні математичні функції, що характеризують ступінь заплутаності квантових станів. Найбільш поширеними серед них є ентропія заплутаності, конкуренція (concurrence) та заплутаність формування (entanglement of formation).

Розглянемо ці міри квантової заплутаності.

1. Ентропія заплутаності. Для чистих станів складеної системи одним із найбільш природних способів кількісної оцінки заплутаності є використання

ентропії фон Неймана редукованої матриці густини. Ентропія фон Неймана визначається для матриці густини квантового стану як

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log\rho), \tag{3.35}$$

де $S(\rho)$ – ентропія квантового стану; ρ – матриця густини квантової системи; Tr – операція сліду матриці, тобто сума її діагональних елементів; $\log\rho$ – логарифм матриці. Якщо розглядати складену систему AB, то ступінь заплутаності можна визначити через ентропію редукованої матриці густини однієї з підсистем. Для цього спочатку обчислюється редукована матриця густини

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}), \tag{3.36}$$

де ρ_{AB} – матриця густини всієї системи; ρ_A – редукована матриця густини підсистеми A; Tr_B – операція часткового сліду по підсистемі B. Тоді міра заплутаності визначається як

$$E = S(\rho_A). \tag{3.37}$$

Для сепарабельних чистих станів ентропія редукованої матриці густини дорівнює нулю, тоді як для максимально заплутаних станів вона набуває максимального значення.

2. Конкуренція (Concurrence). Для двокубітних систем зручно використовувати іншу міру заплутаності, яка отримала назву **concurrence**. Вона дозволяє кількісно оцінити ступінь заплутаності навіть для змішаних квантових станів. Конкуренція визначається формулою

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \tag{3.38}$$

де C – величина concurrence; λ_i – власні значення спеціальної матриці, впорядковані у спадному порядку. Значення $C = 0$ відповідає відсутності заплутаності, тобто стан є сепарабельним. Якщо $C = 1$, стан є максимально заплутаним.

3. Заплутаність формування (Entanglement of Formation). Ще однією важливою мірою заплутаності є формування заплутаності, яке визначає мінімальну кількість заплутаності, необхідну для створення заданого квантового стану. Ця величина пов’язана з конкуренцією наступним співвідношенням

$$E_f(C) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right), \tag{3.39}$$

де функція

$$h(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x) \tag{3.40}$$

є бінарною ентропією Шеннона.

У цьому виразі E_f – заплутаність формування; C – конкуренція; $h(x)$ – ентропійна функція. Ця міра дозволяє кількісно оцінити мінімальний ресурс заплутаності, необхідний для підготовки заданого квантового стану. Геометрично простір квантових станів можна уявити як певну багатовимірну область, у якій різні стани розташовані залежно від ступеня їхньої заплутаності. Сепарабельні стани утворюють підмножину цього простору, тоді як заплутані стани розташовуються поза нею. Міри заплутаності можна інтерпретувати як величини, що визначають віддаленість певного квантового стану від множини сепарабельних станів. Чим більшим є значення такої міри, тим сильнішими є квантові кореляції між підсистемами. Таке геометричне уявлення дозволяє краще зрозуміти структуру простору квантових станів та роль заплутаності у квантових інформаційних процесах.

Міри квантової заплутаності широко використовуються у сучасних дослідженнях квантових інформаційних систем. Наприклад, при аналізі квантових каналів зв’язку вони дозволяють оцінити наскільки добре зберігається заплутаність під час передачі квантових станів, тобто ефективність передачі заплутаних станів між віддаленими вузлами мережі. У квантових обчислювальних системах міри заплутаності застосовуються для аналізу складності квантових алгоритмів. Багато квантових алгоритмів використовують заплутаність як ключовий ресурс для прискорення обчислень. Тому кількісна оцінка заплутаності дозволяє дослідити їхню ефективність. Крім того, міри заплутаності застосовуються при дослідженні процесів декогеренції. Під час взаємодії квантової системи з навколишнім середовищем ступінь заплутаності поступово зменшується, і міри заплутаності дозволяють кількісно описати цей процес.

Міри квантової заплутаності є важливим інструментом сучасної квантової теорії інформації. Вони дозволяють не лише встановити наявність квантових кореляцій між підсистемами, але й кількісно оцінити їхню силу. Серед найбільш поширених мір заплутаності можна виділити ентропію заплутаності, конкуренцію та заплутаність формування. Кожна з цих величин відображає різні аспекти структури квантових кореляцій і має власні області застосування. Використання мір заплутаності відіграє важливу роль у дослідженнях квантових комунікацій, квантових обчислень та інших напрямів квантових технологій. Саме ці інструменти дозволяють кількісно описувати ресурс заплутаності та аналізувати ефективність його використання у різних квантових інформаційних процесах.

У сучасній квантовій теорії інформації квантова заплутаність розглядається не лише як фундаментальна властивість складених квантових систем, але й як специфічний фізичний ресурс, що може бути використаний для реалізації різноманітних інформаційних процесів. Подібно до того, як енергія виступає ресурсом у термодинаміці, а інформація – у класичній теорії інформації, заплутаність відіграє роль ресурсу у квантових інформаційних протоколах. Такий підхід привів до формування спеціального теоретичного напряму, який отримав назву ***ресурсної теорії заплутаності***. У межах цього підходу квантова заплутаність розглядається як певний ресурс, який можна створювати, передавати, перетворювати та використовувати для виконання квантових інформаційних задач.

Ресурсна теорія заплутаності дозволяє формалізувати ці процеси і встановити, які перетворення квантових станів є можливими без використання додаткових квантових ресурсів, а які потребують наявності заплутаних станів. Вона також дає можливість кількісно оцінювати ефективність використання заплутаності у різних квантових інформаційних протоколах. Ця теорія відіграє важливу роль у дослідженнях квантових комунікацій, квантових обчислень та квантових мереж. Вона дозволяє зрозуміти, як заплутаність може бути розподілена між різними частинами системи, як її можна перетворювати з однієї

форми в іншу та які обмеження накладаються на ці процеси фундаментальними законами квантової механіки.

Основна ідея ресурсної теорії заплутаності полягає у поділі всіх можливих операцій над квантовими системами на два класи. До першого класу належать ***вільні стани***, які не містять заплутаності. Це операції, які можна виконувати без використання заплутаності як ресурсу. До другого класу належать ***ресурсні стани***, які характеризуються наявністю квантових кореляцій між підсистемами. Це операції, які потребують наявності заплутаних станів. Подібний поділ застосовується також до операцій, які можуть виконуватися над квантовими системами. У рамках ресурсної теорії розглядається складена квантова система, що складається з двох або більше підсистем, які можуть перебувати у різних просторових областях. У такій системі різні спостерігачі можуть виконувати операції над своїми підсистемами та обмінюватися між собою класичною інформацією. При цьому особливу роль відіграє клас операцій, які можна виконувати без створення нової заплутаності. Такі операції називають ***локальними операціями з класичною комунікацією (LOCC – Local Operations and Classical Communication)***. Вони визначають допустимі перетворення квантових станів у межах ресурсної теорії. Формально LOCC-операції можна представити як послідовність локальних квантових операцій, що виконуються над підсистемами, та передачу класичних повідомлень між ними.

Математично локальні операції можуть бути описані за допомогою операторів

$$A_i \otimes B_j, \tag{3.41}$$

де A_i – оператор, що діє на підсистему A; B_j – оператор, що діє на підсистему B; $\otimes$ – тензорний добуток операторів.

Якщо початковий стан системи описується матрицею густини складеної системи ρ, то після виконання локальних операцій система переходить у новий стан

$$\rho' = \sum_{i,j} (A_i \otimes B_j)\rho(\, A_i^\dagger \otimes B_j^\dagger). \tag{3.42}$$

Тут ρ – початкова матриця густини системи; ρ' – матриця густини після виконання операцій; $A_i^\dagger$, $B_j^\dagger$ – ермітово спряжені оператори.

Важливою властивістю LOCC-операцій є те, що вони не можуть створювати заплутаність, якщо вона була відсутня у початковому стані. Це означає, що заплутаність не може виникнути лише внаслідок локальних дій над підсистемами. Такі операції можуть лише змінювати або перерозподіляти вже наявну заплутаність між підсистемами. Це положення лежить в основі ресурсної інтерпретації заплутаності. У межах цієї теорії сепарабельні стани розглядаються як «вільні» ресурси, тоді як заплутані стани виступають як цінний ресурс, необхідний для реалізації певних квантових інформаційних процесів.

Геометрично ресурсну теорію заплутаності можна представити як простір квантових станів, у якому всі можливі стани розподіляються на дві великі області: сепарабельні та заплутані стани. Сепарабельні стани утворюють множину, всередині якої будь-яка комбінація таких станів також є сепарабельною. Заплутані стани розташовуються поза цією областю. LOCC-операції можуть переміщувати стани всередині простору станів, але вони не можуть переводити сепарабельні стани у заплутані. Іншим важливим аспектом ресурсної теорії є можливість ***перетворення заплутаних станів.*** Деякі заплутані стани можуть бути перетворені один в один за допомогою LOCC-операцій, тоді як інші потребують додаткових ресурсів. Таким чином, заплутаність виступає як особливий ресурс, який дозволяє реалізувати перетворення станів, недоступні за допомогою лише локальних операцій. Одним із найважливіших застосувань ресурсної теорії заплутаності є аналіз процесів ***дистиляції заплутаності***. У цьому процесі з великої кількості слабко заплутаних станів отримують меншу кількість станів із більш високим ступенем заплутаності. Іншим важливим прикладом є ***концентрація заплутаності***, коли

декілька частково заплутаних пар частинок перетворюються на одну максимально заплутану пару.

Ресурсна теорія також використовується для аналізу ефективності квантових комунікаційних протоколів. Наприклад, у протоколі квантової телепортації необхідна наявність максимально заплутаної пари частинок. Саме заплутаність у цьому випадку виступає ресурсом, який дозволяє передати квантовий стан між віддаленими системами. Крім того, ресурсна теорія заплутаності відіграє важливу роль у дослідженнях квантових мереж, де необхідно розподіляти заплутаність між різними вузлами системи. Вона є важливим концептуальним підходом у сучасній квантовій теорії інформації. Вона дозволяє формально визначити, які операції над квантовими системами є допустимими без використання додаткових ресурсів і які перетворення квантових станів є можливими. Центральним поняттям цієї теорії є клас операцій LOCC, який визначає допустимі локальні перетворення квантових станів. У межах цього підходу заплутаність розглядається як специфічний фізичний ресурс, що може бути використаний для реалізації квантових інформаційних протоколів. Розвиток ресурсної теорії заплутаності відіграє важливу роль у сучасних дослідженнях квантових технологій. Саме цей підхід дозволяє систематично досліджувати процеси створення, перетворення та використання квантових кореляцій у задачах квантової передачі інформації, квантових обчислень та квантових мереж.

3.5. Методи генерації та розподілу заплутаності в каналах зв'язку

Одним із ключових завдань сучасної квантової теорії інформації є практичне використання квантової заплутаності у процесах передачі та обробки інформації. У квантових інформаційних технологіях заплутаність розглядається як ключовий ресурс, що забезпечує реалізацію процесів, які не мають класичних аналогів. Однак для практичного використання квантових кореляцій недостатньо лише теоретично описати їхні властивості. Необхідно також розробити методи генерації заплутаних станів та механізми їх розподілення між

просторово віддаленими підсистемами. Генерація заплутаності пов’язана з фізичними процесами, у яких взаємодія між квантовими системами приводить до утворення корельованих квантових станів. Розподілення заплутаності, у свою чергу, передбачає передачу або поширення таких станів між різними частинами квантової системи або між вузлами квантової комунікаційної мережі.

Дослідження процесів генерації та розподілення заплутаності є важливим напрямом сучасної квантової фізики. Вони лежать в основі створення квантових каналів зв’язку, квантових мереж та систем квантового розподілу інформації. Формування заплутаних станів зазвичай відбувається у процесі взаємодії між квантовими системами. Коли дві або більше квантових систем взаємодіють між собою, їхній спільний стан може перестати описуватися як добуток станів окремих підсистем. У такому випадку виникає заплутаний стан, у якому результати вимірювань різних підсистем виявляються корельованими. Така взаємодія може виникати у різних фізичних середовищах – у фотонних системах, у системах іонів у пастках, у надпровідних квантових схемах та інших квантових платформах.

Після створення заплутаного стану важливо забезпечити його передачу між різними частинами системи. У квантових комунікаційних задачах це означає необхідність розподілити заплутані частинки між різними спостерігачами або вузлами мережі. Це завдання ускладнюється тим, що заплутаність є дуже чутливою до впливу навколишнього середовища і може руйнуватися у процесі взаємодії з ним. Це потребує спеціальних фізичних механізмів та технічних рішень, які дозволяють зберігати квантові кореляції протягом процесу передачі. У зв’язку з цим дослідження генерації та розподілення заплутаності охоплює як фізичні механізми створення заплутаних станів, так і методи їх стабільної передачі у квантових інформаційних системах.

Фізичні механізми генерації заплутаності можуть бути різними. Одним із важливих механізмів генерації заплутаності є взаємодія квантових систем через спільне фізичне поле або через прямий обмін квантовими частинками. Наприклад, у фотонних системах заплутані пари фотонів можуть виникати у

процесі ***спонтанного параметричного перетворення частоти*** у нелінійних оптичних кристалах. У цьому процесі один фотон з більшою енергією перетворюється на пару фотонів з меншою енергією, які перебувають у корельованому квантовому стані. Після генерації заплутаних станів важливим завданням є їх передача між різними частинами квантової системи. Для цього використовуються квантові канали, через які заплутані частинки можуть передаватися між вузлами квантової мережі. Такими каналами передачі можуть бути оптичні волокна, атмосферні оптичні лінії або інші фізичні середовища.

Якщо початковий стан системи описується матрицею густини ρ_{AB}, то процес передачі квантового стану через канал можна описати квантовим відображенням

$$\rho'_{AB} = \mathcal{E}(\rho_{AB}), \qquad (3.43)$$

де $\mathcal{E}$ – квантова операція, що описує дію каналу (супероператор квантового каналу); ρ'_{AB} – стан системи після передачі. У реальних фізичних умовах квантові канали піддаються впливу шуму та декогеренції, що може призводити до зменшення ступеня заплутаності. Тому важливим напрямом досліджень є розробка методів збереження заплутаності у процесі передачі. Для наочного розуміння розглянемо схему генерації заплутаної пари частинок. Джерело квантових частинок створює пару частинок, що перебувають у заплутаному стані. Після цього частинки передаються у різні просторові області, де з ними можуть виконуватися вимірювання або квантові операції.

У випадку квантових мереж заплутані стани можуть передаватися між різними вузлами системи. Кожен вузол може приймати заплутані частинки, виконувати над ними квантові операції та передавати їх далі через квантові канали, утворюючи складну структуру квантових кореляцій. Такі схеми дозволяють створювати глобальні квантові мережі, у яких заплутаність розподіляється між великою кількістю квантових систем. Генерація та розподілення заплутаності реалізуються у різних фізичних системах. Однією з найбільш поширених платформ є фотонні системи, у яких заплутані фотони можуть передаватися через оптичні волокна на значні відстані. Іншим прикладом

є системи іонів у електромагнітних пастках, де взаємодія між іонами дозволяє створювати заплутані стани з високим ступенем контролю.

У надпровідних квантових схемах генерація заплутаності здійснюється за допомогою взаємодії між квантовими бітами через мікрохвильові резонатори. Такі системи активно використовуються у сучасних квантових обчислювальних пристроях. Крім того, у квантових мережах застосовуються спеціальні пристрої – квантові повторювачі, які дозволяють відновлювати заплутаність під час передачі квантових станів на великі відстані.

Генерація та розподілення квантової заплутаності є фундаментальними процесами у квантових інформаційних технологіях. Саме вони забезпечують можливість створення квантових кореляцій між просторово віддаленими системами та реалізації квантових комунікаційних протоколів. Фізичні механізми генерації заплутаності пов’язані з взаємодією між квантовими системами, тоді як процеси розподілення заплутаності передбачають передачу корельованих квантових станів через квантові канали. У реальних умовах ці процеси супроводжуються впливом шуму та декогеренції, що ускладнює збереження квантових кореляцій. Розвиток методів генерації та розподілення заплутаності є важливим кроком на шляху створення глобальних квантових мереж, квантових комунікаційних систем та інших технологій, що базуються на використанні квантових кореляцій.

3.6. Протоколи дистиляції та очищення заплутаних станів

У реальних квантових інформаційних системах створення та передача заплутаних станів супроводжується неминучими втратами та впливом навколишнього середовища. Під час передачі квантових частинок через фізичні середовища, взаємодії з навколишнім середовищем або через обмеження експериментального обладнання квантові стани зазнають впливу шуму та декогеренції. У результаті таких процесів початково сильні квантові кореляції можуть послаблюватися або частково руйнуватися. Це призводить до того, що отримані заплутані стани часто мають нижчий ступінь заплутаності, ніж це

необхідно для ефективного використання у квантових інформаційних протоколах.

Для подолання цієї проблеми у квантовій теорії інформації були розроблені спеціальні методи, які дозволяють відновлювати або підсилювати квантову заплутаність. До таких методів належать ***дистиляція заплутаності*** (entanglement distillation) та ***очищення заплутаності*** (entanglement purification). Ці процедури дозволяють із набору слабко заплутаних або зашумлених квантових станів отримувати меншу кількість станів із більш високим ступенем заплутаності. Такі методи відіграють важливу роль у квантових комунікаційних системах, зокрема у задачах передачі заплутаності на великі відстані, побудові квантових мереж та забезпеченні надійності квантових інформаційних протоколів, де необхідно підтримувати високий рівень квантових кореляцій між віддаленими вузлами мережі.

У процесі передачі квантових станів через фізичні канали зв'язку виникають різноманітні джерела шуму, які можуть призводити до декогеренції квантових систем. У результаті цього ідеальні заплутані стани перетворюються на змішані стани з меншим ступенем заплутаності. Для відновлення квантових кореляцій необхідно застосовувати спеціальні процедури, які використовують декілька копій заплутаних станів та виконують над ними певні локальні операції. Такі процедури дозволяють концентрувати заплутаність у меншій кількості квантових систем. У рамках ресурсної теорії заплутаності ці процеси розглядаються як перетворення заплутаних станів за допомогою локальних операцій та класичної комунікації. Після проходження через шумовий канал система переходить у новий стан, що описується матрицею густини (3.43). У більшості випадків такий стан має нижчий рівень заплутаності, ніж початковий. Саме тому виникає потреба у спеціальних процедурах, які дозволяють відновити або підсилити квантові кореляції між підсистемами.

Дистиляція заплутаності – це процес, у якому з великої кількості слабко заплутаних квантових пар отримують меншу кількість пар із більш високим ступенем заплутаності. Цей процес можна розглядати як аналог очищення або

концентрування ресурсу заплутаності. Нехай дві віддалені сторони, умовно позначені як A та B, мають набір однакових змішаних квантових станів

$$\rho_{AB}^{\otimes n}. \tag{3.44}$$

де ρ_{AB} – матриця густини однієї заплутаної пари; n – кількість наявних копій цього стану; $\otimes$ – тензорний добуток, який описує сукупний стан усіх пар. Застосовуючи локальні операції та класичну комунікацію (LOCC), сторони можуть перетворити ці n копій стану у меншу кількість m майже максимально заплутаних станів

$$\rho_{AB}^{\otimes n} \longrightarrow |\Phi^+\rangle^{\otimes m}. \tag{3.45}$$

У цьому виразі $|\Phi^+\rangle$ – максимально заплутаний стан Белла; m < n. Отже, частина початкових станів використовується як «витратний матеріал» для отримання меншої кількості більш якісних заплутаних станів.

Процес дистиляції можна уявити як схему, у якій декілька зашумлених заплутаних пар об'єднуються у спеціальній процедурі, після чого частина з них відбраковується, а решта набуває більш високого ступеня заплутаності. Методи дистиляції заплутаності активно використовуються у квантових комунікаційних системах. Зокрема, вони застосовуються у квантових мережах для відновлення заплутаності після передачі квантових станів через шумові канали. У системах квантового розподілу ключів очищення заплутаності дозволяє підвищити надійність та безпеку передачі інформації. Крім того, ці методи використовуються у квантових повторювачах, які застосовуються для передачі заплутаних станів на великі відстані. Повторювачі виконують процедури очищення заплутаності на проміжних вузлах мережі для компенсації втрат і шуму, що дозволяє зберігати квантові кореляції на значних відстанях.

Процес очищення заплутаності є близьким до дистиляції, але має дещо іншу інтерпретацію. Він спрямований на відновлення початкового чистого заплутаного стану з набору зашумлених станів. Розглянемо систему, що складається з двох підсистем A та B, які перебувають у змішаному квантовому стані, описаному матрицею густини ρ_{AB}. Такий стан може бути результатом

передачі ідеального заплутаного стану через шумовий квантовий канал. Метою процедури очищення є перетворення кількох копій такого стану у стан з більш високим ступенем заплутаності. Формально це можна представити як перетворення

$$\rho_{AB}^{\otimes n} \to \sigma_{AB}, \tag{3.46}$$

де ρ_{AB} – початковий змішаний стан; n – кількість копій цього стану; σ_{AB} – отриманий стан з більш високим ступенем заплутаності; $\otimes$ – тензорний добуток. У цьому процесі використовується набір локальних квантових операцій, які виконуються над підсистемами A та B, а також обмін класичною інформацією між ними. Ідея процедури очищення полягає у тому, що певні результати вимірювань дозволяють відібрати ті пари частинок, які з більшою ймовірністю перебувають у більш заплутаному стані. Інші пари частинок при цьому відкидаються.

Одним із найвідоміших протоколів очищення заплутаності є ***протокол Беннетта–Брассара***, у якому використовуються локальні квантові операції та порівняння результатів вимірювань. У цьому протоколі дві сторони виконують локальні операції над своїми квантовими системами, після чого обмінюються результатами вимірювань через класичний канал. Якщо результати задовольняють певні умови, відповідні квантові пари зберігаються, інакше вони відкидаються. У результаті такої процедури частина початкових станів перетворюється на стани з більш високим ступенем заплутаності.

Процес очищення заплутаності можна уявити як послідовність операцій над набором заплутаних пар частинок. Спочатку система містить велику кількість слабко заплутаних станів. Після виконання локальних операцій та відбору частини результатів кількість станів зменшується, але їхня заплутаність збільшується. Геометрично цей процес можна інтерпретувати як переміщення квантового стану у просторі станів у напрямку області, що відповідає більш високому ступеню заплутаності. Такі процедури дозволяють компенсувати частину втрат, що виникають у квантових каналах зв’язку. Очищення

заплутаності застосовується в квантових криптографічних системах, де очищення заплутаності дозволяє підвищити надійність квантових ключів, що передаються між користувачами. У квантових обчислювальних системах процедури очищення можуть використовуватися для підвищення точності квантових операцій та зменшення впливу шуму.

Дистиляція та очищення заплутаності є важливими інструментами квантової теорії інформації, які дозволяють підвищувати якість квантових кореляцій у реальних фізичних системах. Основна ідея цих процедур полягає у використанні кількох копій слабко заплутаних станів для отримання меншої кількості станів з більш високим ступенем заплутаності. Застосування дистиляції заплутаності відіграє ключову роль у розвитку квантових комунікаційних систем, квантових мереж та інших квантових технологій. Саме ці методи дозволяють компенсувати вплив шуму та забезпечувати стабільну передачу квантових кореляцій на великі відстані. Подальші дослідження у цьому напрямі спрямовані на розробку більш ефективних протоколів очищення заплутаності та вдосконалення методів передачі квантових станів у складних фізичних середовищах.

3.7. Використання заплутаності у квантовій передачі інформації

Квантова заплутаність є одним із найважливіших ресурсів у сучасній квантовій теорії інформації. Її особливість полягає у виникненні сильних квантових кореляцій між підсистемами, які можуть зберігатися навіть тоді, коли ці підсистеми просторово розділені. У класичних системах зв’язку передача інформації здійснюється шляхом передавання фізичних носіїв інформації – сигналів або частинок. У квантових системах з’являється нова можливість: використовувати кореляції між квантовими станами для реалізації інформаційних процесів. Завдяки цьому можна здійснювати передачу квантових станів, підвищувати ефективність каналів зв’язку та забезпечувати високий рівень захисту інформації.

У квантових комунікаційних системах заплутаність використовується як ресурс, що забезпечує виконання низки інформаційних протоколів. Серед них особливе значення мають квантова телепортація, надщільне кодування інформації, а також різні протоколи квантового розподілу криптографічних ключів. Саме ці протоколи демонструють практичне значення квантових кореляцій у сучасних квантових комунікаційних технологіях. Усі ці процеси базуються на використанні корельованих квантових станів між віддаленими підсистемами. Дослідження використання заплутаності у квантовій передачі інформації є одним із центральних напрямів розвитку квантових технологій. Воно дозволяє зрозуміти, як квантові кореляції можуть бути використані для ефективного передавання та обробки інформації у квантових мережах.

Класичні канали зв'язку передають інформацію у вигляді послідовності бітів, які можуть набувати значень 0 або 1. У квантових системах інформація кодується у квантових станах – кубітах, які можуть перебувати у суперпозиції базисних станів. Це дозволяє квантовим системам переносити значно більше інформації, ніж класичні. Коли між двома системами існує квантова заплутаність, їхні квантові стани виявляються взаємопов'язаними. Зміна стану однієї системи може впливати на результати вимірювань іншої системи. Це відкриває можливість реалізації нових методів передачі інформації, у яких використовуються квантові кореляції між частинами системи. У квантовій теорії інформації для опису цих процесів використовують математичний апарат квантової механіки – гільбертові простори, оператори та матриці густини. Заплутані стани можуть передаватися між системами через квантові канали та використовуватися для виконання різних інформаційних протоколів.

Розглянемо систему, що складається з двох кубітів, які перебувають у заплутаному квантовому стані. Такий стан означає, що результати вимірювань обох кубітів виявляються корельованими. Наявність такого стану між двома віддаленими системами дозволяє використовувати його для передачі квантової інформації. Одним із найбільш відомих прикладів використання заплутаності є ***квантова телепортація***. У цьому процесі квантовий стан однієї частинки

передається до іншої частинки без фізичного перенесення самої частинки. Нехай квантовий стан, який необхідно передати, має вигляд

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \qquad (3.47)$$

де $|\psi\rangle$ – довільний квантовий стан кубіта; α та β – комплексні коефіцієнти, що задовольняють умову нормування; $|0\rangle$ та $|1\rangle$ – базисні стани кубіта. Для реалізації телепортації дві сторони повинні мати спільну заплутану пару частинок. Після виконання спеціальних квантових операцій та передачі двох класичних бітів інформації квантовий стан може бути відтворений у віддаленій системі (рис. 3.2).

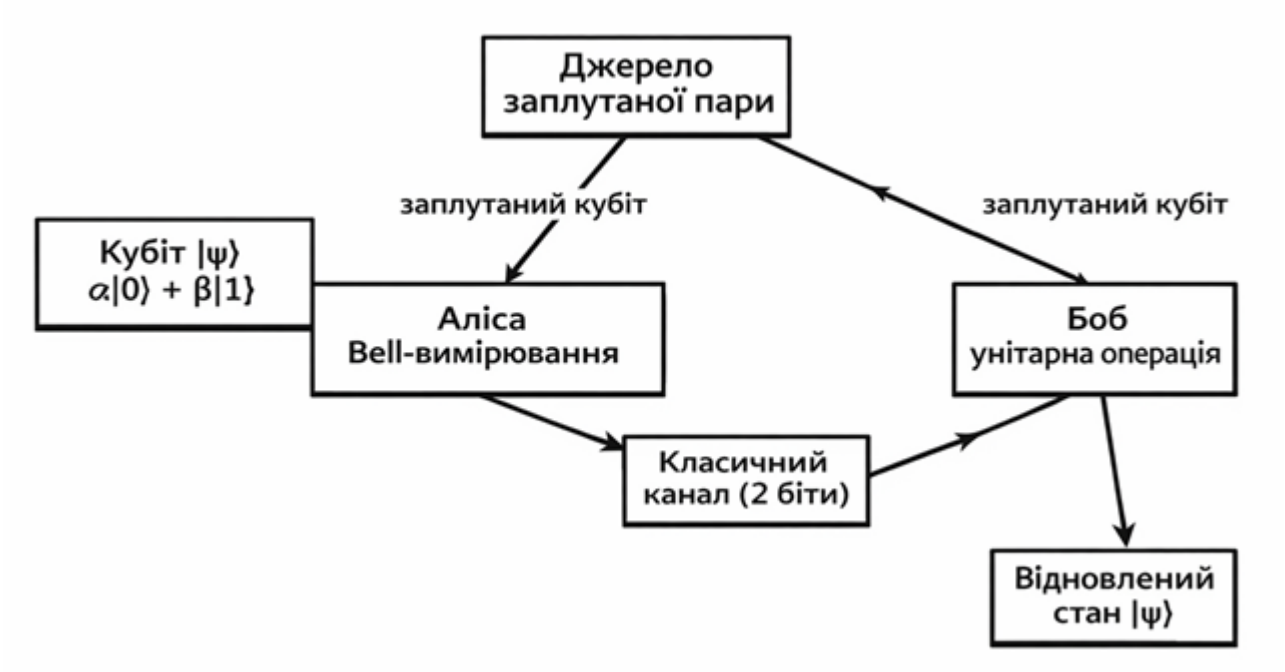


Рис. 3.2. Схема квантової телепортації.

На рисунку невідомий квантовий стан $|\psi\rangle$ передається від Аліси до Боба за допомогою заплутаної пари кубітів та передачі двох класичних бітів інформації. Після Bell-вимірювання Аліси та відповідної унітарної операції Боба квантовий стан відтворюється на віддаленій системі. Таким чином, квантова інформація передається за допомогою комбінації заплутаності та класичної комунікації.

Іншим прикладом використання заплутаності є ***надщільне кодування*** (superdense coding). У цьому протоколі одна сторона може передати два класичні біти інформації, використовуючи лише один кубіт. Це стає можливим завдяки

тому, що заплутаний стан містить спільну інформацію про обидві підсистеми. Виконуючи локальні операції над своїм кубітом, відправник змінює стан усієї системи і може закодувати інформацію у спільному стані системи. Після передачі кубіта отримувач виконує спільне вимірювання над двома кубітами та відновлює закодовану інформацію.

Використання заплутаності у квантовій передачі інформації можна проілюструвати за допомогою схеми квантової комунікаційної системи. Джерело створює заплутану пару частинок, які передаються до двох віддалених вузлів мережі. Одна частинка передається одному користувачеві, а інша – іншому. Далі користувачі виконують локальні операції над своїми квантовими системами та обмінюються класичною інформацією через звичайний канал зв'язку. Завдяки цьому вони можуть реалізувати різні квантові інформаційні протоколи. Таким чином, за допомогою квантових каналів та класичної комунікації між вузлами можна реалізувати різні протоколи передачі інформації. Такі схеми лежать в основі створення квантових мереж та систем квантового зв'язку.

Заплутаність активно використовується у сучасних квантових комунікаційних технологіях. Наприклад, у протоколах квантового розподілу ключів вона дозволяє створювати криптографічні ключі, захищені законами квантової механіки і забезпечувати високий рівень захисту інформації. У квантових мережах заплутані стани можуть використовуватися для створення корельованих каналів зв'язку між різними вузлами системи. Крім того, заплутаність використовується у квантових обчислювальних системах, де вона забезпечує взаємодію між квантовими бітами та дозволяє реалізувати складні квантові алгоритми.

Заплутаність є фундаментальним ресурсом квантової передачі інформації. Її використання дозволяє реалізувати нові інформаційні протоколи, які не мають аналогів у класичних системах зв'язку. Серед найбільш важливих застосувань заплутаності можна виділити квантову телепортацію, надщільне кодування та квантовий розподіл ключів. Усі ці процеси базуються на використанні квантових

кореляцій між підсистемами складених квантових систем. Подальший розвиток методів використання заплутаності має важливе значення для створення квантових мереж, квантових комунікаційних систем та інших технологій, що базуються на передачі квантової інформації.

РОЗДІЛ 4. ФІЗИКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ ТА МЕХАНІЗМИ ДЕКОГЕРЕНЦІЇ

4.1. Математичний опис відкритих систем та рівняння Ліндблада

У традиційному викладі квантової механіки часто розглядають ідеалізовану ситуацію, коли фізична система є повністю ізольованою від зовнішнього світу. У такому випадку її еволюція визначається лише внутрішніми параметрами системи та описується рівнянням Шредінгера. Подібна модель значно спрощує теоретичний аналіз і дозволяє отримати фундаментальні результати квантової теорії. Проте в реальних фізичних умовах повністю ізольовані системи практично не існують. Будь-яка квантова система, навіть за ретельно контрольованих експериментальних умов, неминуче взаємодіє з навколишнім середовищем – іншими частинками, електромагнітним полем, матеріальними структурами або вимірювальними приладами. Внаслідок цієї взаємодії відбувається обмін енергією, інформацією та квантовими кореляціями між системою та її оточенням. Це призводить до появи ефектів, які не можуть бути описані в межах моделі ізольованої системи. Зокрема, виникають явища дисипації, шуму та декогеренції, які суттєво впливають на динаміку квантових станів. Саме тому для опису реальних квантових процесів використовується поняття ***відкритої квантової системи***. У цьому підході система розглядається не ізольовано, а як частина більшої фізичної структури, що включає також її оточення. Цей підхід дозволяє враховувати вплив середовища на систему та аналізувати еволюцію квантових станів у реальних фізичних умовах. Теорія відкритих квантових систем відіграє важливу роль у дослідженнях квантових комунікацій, квантових обчислень і квантових сенсорних технологій, де взаємодія із середовищем часто є визначальним фактором ефективності системи. Вона дозволяє пояснювати такі явища, як дисипація, шум і декогеренція.

Розгляд відкритих квантових систем ґрунтується на припущенні, що будь-яку фізичну систему можна умовно розділити на дві частини: досліджувану систему та навколишнє середовище. Досліджувана система є об’єктом

безпосереднього аналізу, тоді як середовище включає всі інші ступені свободи, з якими система може взаємодіяти. Квантова система, що включає як досліджувану систему, так і середовище, може розглядатися як ***складена квантова система***. Еволюція такої системи описується звичайними законами квантової механіки. У квантовій теорії стан фізичної системи зазвичай описується за допомогою хвильової функції або вектора стану у гільбертовому просторі. Такий опис є достатнім для ізольованих систем, коли відома повна інформація про всі ступені свободи системи. Проте у багатьох задачах квантової фізики та квантової теорії інформації дослідника цікавить лише певна частина складеної системи, тоді як інші її складові залишаються недоступними для безпосереднього спостереження або вимірювання. У таких випадках необхідно використовувати більш загальний формалізм, який дозволяє описувати стан підсистеми без детального врахування всіх параметрів повної системи. Для цього використовується формалізм матриці густини, який дозволяє описувати як чисті, так і статистично змішані квантові стани.Коли система є частиною складеної структури, застосовується поняття редукованої матриці густини, яка отримується шляхом усунення з опису ступенів свободи іншої підсистеми. При цьому, зокрема, інформація про середовище частково усувається. Цей формалізм дає змогу визначити стан підсистеми, коли повний стан складеної системи відомий, але інформація про інші частини системи не враховується або свідомо усувається з опису. Саме цей підхід лежить в основі теорії відкритих квантових систем і дозволяє описувати реальні квантові процеси без необхідності моделювати всі деталі навколишнього середовища.

Редукована матриця густини відіграє важливу роль у квантовій теорії інформації та теорії відкритих квантових систем. Вона дозволяє аналізувати стан підсистеми незалежно від детального опису її оточення та досліджувати статистичні властивості квантових кореляцій. Наприклад, якщо маємо складену квантову систему, що складається з двох підсистем, то повний стан такої системи описується у гільбертовому просторі, який є тензорним добутком просторів станів окремих підсистем. Якщо повний стан системи відомий, то виникає

питання: яким чином визначити стан лише однієї з підсистем? Для цього використовується операція часткового сліду, яка дозволяє усунути з опису ступені свободи однієї підсистеми та отримати ефективний опис іншої підсистеми. Результатом такої процедури є редукована матриця густини.

Розглянемо квантову систему S, що взаємодіє із середовищем E. Повний стан складеної системи можна описати у гільбертовому просторі Ĥ

$$Ĥ_{SE} = Ĥ_S \otimes Ĥ_E, \tag{4.1}$$

де $Ĥ_S$ – гільбертів простір системи; $Ĥ_E$ – гільбертів простір середовища; $\otimes$ – тензорний добуток просторів станів. У загальному випадку динаміка повної складеної системи визначається гамільтоніаном

$$H = H_S + H_E + H_{\text{взаємодії}}, \tag{4.2}$$

де H_S – гамільтоніан досліджуваної системи; H_E – гамільтоніан середовища; $H_{\text{взаємодії}}$ – гамільтоніан взаємодії між системою та середовищем. Саме оператор $H_{\text{взаємодії}}$ описує процеси обміну енергією та інформацією між системою і середовищем. Еволюція повної системи описується рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mid \Psi(t)\rangle = H \mid \Psi(t)\rangle. \tag{4.3}$$

Тут $\mid \Psi(t)\rangle$ є вектором стану повної системи «система–середовище», який належить тензорному добутку гільбертових просторів

$$\mid \Psi(t)\rangle \in Ĥ_S \otimes Ĥ_E. \tag{4.4}$$

Таким чином, вектор стану $\mid \Psi(t)\rangle$ містить повну інформацію як про досліджувану систему S, так і про середовище E. Для чистого стану відповідна матриця густини повної системи має вигляд

$$\rho_{SE}(t) = \mid \Psi(t)\rangle\langle\Psi(t) \mid. \tag{4.5}$$

Однак у більшості практичних задач безпосередній інтерес становить лише стан системи S, тоді як ступені свободи середовища E не спостерігаються. Для отримання опису відкритої системи (підсистеми S) використовується операція часткового трасування за змінними середовища:

$$\rho_S(t) = Tr_E[(\rho_{SE}(t)], \tag{4.6}$$

де ρ_{SE} – матриця густини повної системи; Tr_E – операція сліду за ступенями свободи підсистеми E (середовища), а ρ_S – редукована матриця густини підсистеми S, яка містить усю фізично доступну інформацію про стан відкритої квантової системи. Таким чином, операція часткового трасування дозволяє виконати сумування за ступенями свободи підсистеми E та отримати ефективний опис стану підсистеми S. У результаті цієї операції інформація про середовище усувається, і система описується змішаним квантовим станом. Саме така редукована матриця густини використовується для опису відкритих квантових систем.

Аналогічно редукована матриця густини підсистеми E має вигляд

$$\rho_E = Tr_S(\rho_{SE}). \tag{4.7}$$

де ρ_E – редукована матриця густини підсистеми E. Редукована матриця густини містить всю інформацію, необхідну для опису фізичних властивостей окремої підсистеми. Отже, операція часткового сліду дозволяє перейти від опису повної системи до опису окремої підсистеми.

Для більш детального аналізу розглянемо базисні стани підсистем S та E, які позначимо відповідно як $|\, i\rangle_S$ і $|\, j\rangle_E$. Матрицю густини повної складеної системи можна записати у вигляді

$$\rho_{SE} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl}\ |\, i\rangle_S\langle k\,| \otimes |\, j\rangle_E\,\langle l\,|. \tag{4.8}$$

де $\rho_{ij,kl}$ – елементи матриці густини; $|\, i\rangle_S$ та $|\, j\rangle_E$ – базисні стани підсистем. Після виконання часткового сліду за підсистемою E отримуємо редуковану матрицю густини підсистеми S

$$\rho_S = \sum_{i,k,j} \rho_{ij,kj}\ |\, i\rangle_S\langle k\,|. \tag{4.9}$$

Цей вираз показує, що операція часткового сліду фактично виконує сумування за індексами, які відповідають ступеням свободи підсистеми E. Редукована матриця густини описує статистичні властивості підсистеми незалежно від стану інших частин системи. Вона містить усю інформацію, необхідну для обчислення середніх значень фізичних величин, що належать

даній підсистемі. Це означає, що всі спостережувані величини, які належать підсистемі S, можуть бути обчислені за допомогою ρ_S.

Середнє значення будь-якого оператора O_S, що діє у просторі станів підсистеми S, визначається виразом

$$\langle O_S \rangle = Tr(\rho_S O_S). \qquad (4.10)$$

Тут O_S – оператор фізичної величини; ρ_S – редукована матриця густини підсистеми S; Tr – операція сліду. Таким чином, редукована матриця густини повністю визначає статистичні властивості підсистеми S. Процес отримання редукованої матриці густини можна зобразити схематично

Складена система (S + E)

частковий слід за підсистемою E

редукована матриця густини ρ_S

У цій схемі показано, що інформація про підсистему E усувається з опису, тоді як властивості підсистеми S зберігаються.

Для кращого розуміння розглянемо приклади.

1. Заплутаний стан. Нехай система складається з двох кубітів A та B. Вони перебувають у стані Белла

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Тут $|00\rangle = |0\rangle A \otimes |0\rangle B$, $|11\rangle = |1\rangle A \otimes |1\rangle B$. Стан означає, що система одночасно перебуває у двох можливих конфігураціях: обидва кубіти у стані 0; обидва кубіти у стані 1. Важливо, що це не класична суміш, а квантова суперпозиція.

Для чистого стану матриця густини визначається як

$$\rho_{AB} = |\Phi\rangle\langle\Phi|.$$

Припустимо, що кубіт B недоступний для спостереження. Тоді потрібно знайти стан підсистеми A. Виконуємо часткове трасування за підсистемою B:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}).$$

В результаті отримуємо

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|\,0\rangle\langle 0\,| + |\,1\rangle\langle 1\,|)\,. \tag{4.11}$$

Цей результат означає, що підсистема A описується змішаним станом, навіть якщо повний стан системи є чистим.

2. Незалежні підсистеми. Якщо підсистеми не мають квантових кореляцій, їхній стан можна записати у вигляді

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \tag{4.12}$$

У такому випадку операція часткового сліду не змінює матрицю густини підсистеми і редукована матриця густини підсистеми A просто збігається з початковою матрицею ρ_A.

Редукована матриця густини є важливим інструментом математичного опису квантових підсистем. Вона дозволяє визначати стан окремої частини складеної системи без необхідності враховувати всі ступені свободи повної системи. Основою цього підходу є операція часткового сліду, яка усуває інформацію про одну з підсистем і залишає лише ті характеристики, що визначають властивості досліджуваної підсистеми. Використання цього формалізму дає змогу аналізувати статистичні властивості квантових підсистем, досліджувати квантові кореляції та вивчати поведінку складених квантових систем у різних фізичних ситуаціях, аналізувати заплутаність, обчислювати фізичні характеристики підсистем. У задачах квантових комунікацій редукована матриця густини дозволяє описувати стан квантового каналу або стан окремих частин квантової мережі.

Однією з найважливіших особливостей відкритих квантових систем є виникнення квантових кореляцій між системою та середовищем. Якщо система взаємодіє із середовищем протягом певного часу, їхній спільний стан може перестати бути простим добутком станів підсистем:

$$|\Psi_{SE}\rangle \neq |\psi_S\rangle \otimes |\phi_E\rangle. \quad (4.13)$$

де $|\Psi_{SE}\rangle$ – стан всієї складеної системи (система + середовище); $|\psi_S\rangle$ – стан самої системи; $|\phi_E\rangle$ – стану середовища. У цьому випадку система і середовище перебувають у заплутаному стані. Навіть якщо початково система перебувала у чистому квантовому стані, після взаємодії із середовищем вона може перейти у змішаний стан. Це означає, що навіть якщо початково система перебувала у чистому квантовому стані, взаємодія із середовищем може призвести до втрати когерентності та переходу до статистичного опису, тобто інформація про систему частково передається середовищу. Саме цей процес лежить в основі багатьох явищ, що спостерігаються у відкритих квантових системах.

Процес взаємодії системи з навколишнім середовищем можна зобразити схематично

Система S ↔ Середовище E

↓

утворення кореляцій

↓

редукований опис системи

Ця схема показує, що внаслідок взаємодії система більше не є ізольованою, а її стан визначається спільною динамікою з середовищем. Приклади відкритих квантових систем зустрічаються у багатьох фізичних експериментах. Одним із поширених прикладів є атом, що взаємодіє з електромагнітним полем. У цьому випадку атом виступає як квантова система, тоді як поле розглядається як середовище. Взаємодія між ними призводить до процесів спонтанного випромінювання та релаксації енергетичних рівнів. Іншим прикладом є фотони, що поширюються в оптичному волокні. Під час передачі фотонів через волокно відбувається взаємодія з матеріалом середовища, що призводить до втрат і фазового шуму. У квантових обчислювальних системах роль відкритих систем відіграють кубіти, які взаємодіють із навколишнім середовищем. Така взаємодія

може призводити до втрати квантової інформації і обмежує час збереження квантових станів.

Розуміння динаміки відкритих квантових систем має вирішальне значення для розвитку сучасних квантових технологій. У квантових комунікаційних системах взаємодія із середовищем визначає рівень шуму у квантових каналах та впливає на точність передачі квантових станів. У квантових обчислювальних системах відкритість квантових систем обмежує час когерентності кубітів. Саме тому дослідження взаємодії квантових систем із середовищем є важливим напрямом у розвитку стабільних квантових процесорів.

Відкриті квантові системи є невід'ємною частиною сучасної квантової фізики та квантової теорії інформації. На відміну від ідеалізованих ізольованих систем, реальні квантові системи завжди взаємодіють із навколишнім середовищем, що призводить до складних динамічних процесів. Опис таких процесів здійснюється за допомогою формалізму матриці густини та операції часткового сліду, які дозволяють отримати ефективний опис стану системи без детального моделювання всіх ступенів свободи середовища. Дослідження відкритих квантових систем формує основу для аналізу явищ шуму, дисипації та декогеренції, які відіграють ключову роль у квантових інформаційних технологіях. Саме ці процеси визначають можливості та обмеження практичної реалізації квантових комунікаційних і обчислювальних систем.

У квантовій механіці динаміка ізольованої системи описується рівнянням Шредінгера або, у формалізмі матриці густини, рівнянням фон Неймана. Такі рівняння передбачають унітарну еволюцію квантового стану, яка зберігає всі властивості квантової системи, зокрема когерентність та нормування. Однак у реальних фізичних умовах квантові системи зазвичай піддаються впливу різноманітних неконтрольованих зовнішніх факторів. У таких випадках еволюція системи вже не може бути описана лише унітарними перетвореннями, оскільки з'являються неунітарні процеси, які не можуть бути описані лише динамікою гамільтоніана. Тому виникає необхідність використовувати більш

загальний формалізм, що враховує наявність дисипативних процесів і статистичних ефектів.

Для опису часової еволюції квантових систем у присутності таких процесів використовується спеціальний формалізм, який враховує як унітарну еволюцію, так і дисипативні ефекти. Найбільш загальним рівнянням, що описує марковську еволюцію матриці густини квантової системи, є ***рівняння Ліндблада***. Марківська еволюція матриці густини – це така динаміка квантової системи, за якої майбутній стан системи залежить тільки від її поточного стану і не залежить від попередньої історії еволюції. Іншими словами, система не має пам'яті про минулі стани. У цьому випадку часову еволюцію системи описує рівняння Ліндблада. Це поняття походить від марківських процесів у теорії ймовірностей, де аналогічно вважається, що наступний стан процесу визначається лише поточним станом.

Рівняння Ліндблада є одним із фундаментальних результатів теорії відкритих квантових систем. Воно описує часову еволюцію матриці густини квантової системи у присутності зовнішніх впливів. Це рівняння було отримане у роботах Горіні, Коссаковського, Сударшана та Ліндблада і визначає найбільш загальну форму марковської динаміки квантової системи. Рівняння Ліндблада відіграє важливу роль у сучасній квантовій фізиці. Воно широко використовується для опису процесів релаксації, декогеренції та шуму у квантових системах, а також для моделювання еволюції квантових станів у квантових комунікаційних та обчислювальних пристроях.

Для опису часової еволюції квантових систем зручно використовувати формалізм матриці густини. У цьому підході стан системи визначається матрицею густини ρ, яка містить повну інформацію про статистичні властивості квантового стану. У випадку ізольованої системи еволюція матриці густини описується рівнянням фон Неймана

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \tag{4.14}$$

де H – гамільтоніан системи, а квадратні дужки означають комутатор операторів. Проте таке рівняння описує лише унітарну еволюцію системи. У реальних умовах необхідно враховувати додаткові процеси, пов'язані з дисипацією та випадковими флуктуаціями. Для врахування дисипативних процесів до рівняння додаються додаткові члени, що моделюють неунітарну динаміку та описують вплив навколишнього середовища. Саме у такій ситуації використовується рівняння Ліндблада. Найбільш загальна форма рівняння Ліндблада для опису еволюції відкритих квантових систем має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2}\{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right). \quad (4.15)$$

де ρ – матриця густини квантової системи; H – гамільтоніан системи; $\hbar$ – приведена стала Планка; L_k – оператори Ліндблада; $L_k^\dagger$ – ермітово спряжений оператор L_k; $[H,\rho] = H\rho - \rho H$ – комутатор; $\{A,B\} = AB + BA$ – антикомутатор.

Рівняння містить два основних члени, що відповідають різним фізичним процесам. Перший член рівняння описує описує еволюцію квантової системи без втрат (як у рівнянні Шредінгера). Така еволюція визначається гамільтоніаном і відповідає детермінованому розвитку квантового стану згідно з фундаментальними законами квантової механіки. Цей член не змінює спектр матриці густини і зберігає квантову когерентність системи. Другий член рівняння відповідає за неунітарні дисипативні процеси, які виникають унаслідок взаємодії системи із зовнішнім середовищем. Перший член описує когерентну еволюцію, другий – втрати, шум, декогеренцію. Оператори L_k визначають характер фізичних процесів, що впливають на систему. Вони можуть описувати втрати енергії, фазові флуктуації або інші механізми шуму. Сумування за індексом k означає, що на систему можуть одночасно діяти кілька різних процесів.

Структуру рівняння Ліндблада можна представити у вигляді схеми



Така схема демонструє, що еволюція системи визначається поєднанням детермінованих і статистичних процесів.

Розглянемо приклади.

1. Релаксація дворівневої системи. Розглянемо дворівневу квантову систему, яка може переходити із збудженого стану в основний. Такий процес описується оператором Ліндблада

$$L = \gamma\sigma_{-}, \tag{4.16}$$

де γ – швидкість релаксації; σ_{-} – оператор зниження. У цьому випадку рівняння Ліндблада описує процес спонтанного випромінювання фотона, під час якого система втрачає енергію.

2. Фазова декогеренція. Іншим важливим прикладом є фазова декогеренція. У цьому випадку оператор Ліндблада має вигляд

$$L = \sqrt{\gamma}\sigma_z. \tag{4.17}$$

Такий оператор призводить до зменшення недіагональних елементів матриці густини, тоді як діагональні елементи залишаються незмінними. Це означає, що система втрачає фазову когерентність.

Рівняння Ліндблада є універсальним інструментом для опису динаміки квантових систем у реальних фізичних умовах. Воно дозволяє описувати процеси релаксації, декогеренції та вплив шуму. У квантових комунікаційних системах це рівняння використовується для аналізу впливу шуму на передавання

квантових станів. У квантових обчислювальних пристроях рівняння Ліндблада застосовується для моделювання помилок, що виникають під час роботи кубітів. У квантовій оптиці воно використовується для опису процесів взаємодії атомів з електромагнітним полем.

Рівняння Ліндблада є фундаментальним рівнянням теорії відкритих квантових систем. Воно описує часову еволюцію матриці густини квантової системи з урахуванням як унітарних, так і дисипативних процесів. Завдяки універсальності цього формалізму можна досліджувати широкий спектр фізичних явищ, пов’язаних із взаємодією квантових систем із зовнішнім середовищем. Рівняння Ліндблада широко застосовується у квантовій оптиці, квантовій теорії інформації та фізиці квантових технологій. Таким чином, воно є важливим інструментом для аналізу еволюції квантових станів у реальних фізичних системах і дозволяє зрозуміти механізми, що визначають поведінку квантових систем у присутності шуму та дисипації.

4.2. Природа декогеренції та моделі квантового шуму

Поняття відкритої системи передбачає, що досліджувана система розглядається разом із навколишнім середовищем. Тому наступним кроком є аналіз механізмів, за допомогою яких відбувається взаємодія між системою та її оточенням. Саме ця взаємодія визначає динаміку квантових станів у реальних фізичних умовах і лежить в основі таких явищ, як дисипація, шум та декогеренція. З фізичної точки зору взаємодія системи із середовищем означає, що між ними відбувається обмін енергією, імпульсом і квантовою інформацією. Навіть якщо така взаємодія є слабкою, вона може суттєво змінювати властивості квантового стану. У квантових інформаційних системах це призводить до появи помилок передачі інформації, втрати когерентності квантових станів та деградації квантових кореляцій.

Дослідження механізмів взаємодії системи з середовищем має принципове значення для сучасної квантової фізики. Саме ці процеси визначають фізичні межі стабільності квантових станів і можливості практичної реалізації квантових

технологій. Для опису взаємодії між системою та середовищем використовується модель складеної квантової системи, у якій обидві підсистеми розглядаються як частини єдиного фізичного об'єкта. Повна динаміка такої системи визначається її загальним гамільтоніаном, що включає внески від системи, середовища та їхньої взаємодії. У цьому формалізмі взаємодія відіграє роль механізму, який пов'язує динаміку системи зі станом середовища. Унаслідок цього навіть локальні зміни в середовищі можуть впливати на еволюцію квантового стану системи. Саме через цей механізм середовище може виступати джерелом випадкових флуктуацій, що призводять до виникнення шуму та втрати квантової когерентності.

Динаміка складеної системи, що складається із системи *S* та середовища *E*, описується повним гамільтоніаном (4.2). У багатьох фізичних моделях гамільтоніан взаємодії має вигляд

$$H_{\text{взаємодії}} = \sum_k A_k \otimes B_k\,, \qquad (4.18)$$

де A_k – оператори, що діють у просторі станів системи; B_k – оператори, що діють у просторі станів середовища; символ $\otimes$ – тензорний добуток. Такий запис показує, що взаємодія визначається одночасною дією операторів на систему та середовище.

Одним із найважливіших наслідків взаємодії є передача інформації про стан системи до середовища. У квантовій механіці цей процес можна описати через еволюцію спільного стану системи та середовища. Нехай початковий стан має вигляд

$$|\,\psi_S\rangle\,|\,E_0\rangle, \qquad (4.19)$$

де $|\,\psi_S\rangle$ – початковий стан системи; $|\,E_0\rangle$ – початковий стан середовища.

Після взаємодії спільний стан може набувати вигляду

$$|\,\Psi_{SE}\rangle = \sum_i c_i\,|\,s_i\rangle\,|\,E_i\rangle. \qquad (4.20)$$

де $|\,s_i\rangle$ – стани системи; $|\,E_i\rangle$ – відповідні стани середовища; c_i – комплексні коефіцієнти. Такий стан означає, що інформація про систему частково закодована

у стані середовища. У результаті система більше не може бути описана незалежно від оточення. Взаємодію системи з середовищем можна подати у вигляді схеми

Система S ↔ Середовище E

↓

обмін енергією та інформацією

↓

зміна квантового стану системи

Ця схема показує, що навіть слабка взаємодія може призводити до поступової зміни квантового стану системи. Одним із класичних прикладів взаємодії системи з середовищем є атом у порожнині резонатора. У цьому випадку атом взаємодіє з квантованим електромагнітним полем резонатора. Така взаємодія може призводити до поглинання або випромінювання фотонів. Іншим прикладом є фотон, що поширюється у середовищі. Під час проходження через матеріал фотон може взаємодіяти з атомами або дефектами середовища, що призводить до розсіювання та зміни його фази.

У квантових комп’ютерах кубіти також взаємодіють із середовищем. Наприклад, у надпровідних кубітах джерелом взаємодії можуть бути теплові флуктуації електромагнітного поля або дефекти матеріалу. Взаємодія системи із середовищем є одним із головних факторів, що обмежує стабільність квантових станів. У квантових комунікаційних системах така взаємодія може призводити до появи шуму у квантових каналах. У квантових обчислювальних пристроях взаємодія кубітів із середовищем може призводити до втрати квантової інформації та обмежувати тривалість квантових обчислень. Саме тому розуміння механізмів взаємодії системи з середовищем є важливим етапом у розробці стабільних квантових технологій.

Взаємодія квантової системи з навколишнім середовищем є фундаментальним процесом, що визначає еволюцію квантових станів у реальних фізичних умовах. Вона описується гамільтоніаном складеної системи, який

включає оператор взаємодії між системою та середовищем. Унаслідок цієї взаємодії між системою та середовищем виникають кореляції, що призводять до передачі інформації та зміни властивостей квантового стану. Такі процеси лежать в основі багатьох явищ, що спостерігаються у відкритих квантових системах. Дослідження механізмів взаємодії системи із середовищем формує теоретичну основу для фізичної інтерпретації процесів шуму та декогеренції, які визначають можливості практичного використання квантових інформаційних технологій.

Однією з фундаментальних особливостей квантових систем є можливість перебування у станах когерентної квантової суперпозиції. Саме завдяки квантовій когерентності виникають характерні квантові ефекти, такі як інтерференція, квантова заплутаність і квантові кореляції. Ці явища лежать в основі квантових інформаційних технологій, зокрема квантових обчислень, квантової криптографії та квантових комунікацій. Однак у реальних фізичних системах квантова когерентність не є стабільною властивістю. Під впливом неконтрольованих зовнішніх факторів фазові співвідношення між компонентами квантової суперпозиції поступово порушуються. Цей процес називається ***декогеренцією***.

Декогеренція є центральним механізмом переходу від квантової поведінки систем до класичної. Вона призводить до зникнення інтерференційних ефектів і фактично перетворює квантову суперпозицію на статистичну суміш станів. У квантових інформаційних системах декогеренція розглядається як один із головних процесів, що обмежують стабільність квантових станів і тривалість збереження квантової інформації та які призводять до втрати квантової інформації. Щоб зрозуміти фізичну природу декогеренції, необхідно розглянути структуру квантового стану. У багатьох випадках стан квантової системи можна представити як суперпозицію кількох базисних станів. Квантова когерентність пов’язана з наявністю фазових співвідношень між різними компонентами суперпозиції. Ці фазові співвідношення проявляються у недіагональних елементах матриці густини. Саме ці елементи відповідають за можливість спостереження квантових інтерференційних ефектів.

Під впливом неконтрольованих фізичних процесів недіагональні елементи матриці густини поступово зменшуються і фазові зв'язки між компонентами суперпозиції поступово порушуються. У процесі декогеренції відбувається поступове зменшення недіагональних елементів матриці густини згідно з рівнянням

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\frac{t}{T_2}}. \qquad (4.21)$$

де t – час еволюції системи; T_2 – характерний час декогеренції. Таким чином, декогеренція проявляється у зникненні недіагональних елементів. Тобто квантова система втрачає фазову когерентність, що призводить до зникнення квантових інтерференційних ефектів. Отже, декогеренція є процесом руйнування квантової когерентності. Діагональні елементи при цьому можуть залишатися практично незмінними, тоді як недіагональні елементи прямують до нуля. У граничному випадку система описується лише діагональною матрицею густини. Це означає, що система зберігає ймовірності базисних станів, але втрачає фазову когерентність. Фізично декогеренція виникає через розповсюдження інформації про квантовий стан системи у навколишнє середовище. Коли система взаємодіє з великою кількістю зовнішніх ступенів свободи, фазова інформація про стан системи розподіляється між частинками середовища. Внаслідок цього система більше не може підтримувати чітко визначені фазові співвідношення між компонентами суперпозиції. Інформація про фазу фактично стає недоступною для спостерігача. Таким чином, декогеренція є процесом, який перетворює квантову суперпозицію у класичну статистичну суміш станів.

У реальних фізичних системах взаємодія із середовищем, що призводить до декогеренції, може реалізовуватися різними способами. Це зокрема може бути:

1. Електромагнітна взаємодія. Атоми та молекули можуть взаємодіяти з електромагнітним полем, поглинаючи або випромінюючи фотони. Такі процеси лежать в основі спонтанного випромінювання та релаксації квантових станів.

2. Теплові флуктуації. У системах, що перебувають у тепловому середовищі, відбувається обмін енергією між системою та тепловим резервуаром. Це може призводити до переходів між енергетичними рівнями.

3. Фононна взаємодія. У твердотільних системах квантові частинки можуть взаємодіяти з коливаннями кристалічної ґратки, які називаються фононами.

4. Розсіювання частинок. Частинки можуть взаємодіяти з навколишнім середовищем через процеси розсіювання, що призводять до зміни їхнього імпульсу або енергії.

З фізичної точки зору процес декогеренції можна інтерпретувати як розсіювання інформації у навколишньому середовищі. Коли інформація про фазу квантового стану розподіляється між великою кількістю частинок середовища, відновити початкову суперпозицію стає практично неможливо. Механізм декогеренції можна представити у вигляді схеми

квантова суперпозиція

│

│ взаємодія з середовищем

↓

втрата фазових співвідношень

(зменшення когерентності)

↓

класична статистична суміш

Ця схема відображає перехід від когерентного квантового стану до некогерентного статистичного стану.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1. Інтерференція квантових частинок. Одним із класичних прикладів прояву когерентності є інтерференційні експерименти з частинками. Якщо квантова частинка може рухатися двома альтернативними шляхами, її стан можна описати суперпозицією як

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle).$$

У такому випадку на екрані спостерігається інтерференційна картина. Проте якщо середовище отримує інформацію про те, через який шлях пройшла частинка, інтерференційна картина зникає. Це є наслідком декогеренції, тобто втрати когерентності між компонентами суперпозиції.

2. Декогеренція кубіта. У квантових обчислювальних системах кубіт може перебувати у стані

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle.$$

Під впливом шуму фазові співвідношення між станами $|0\rangle$ і $|1\rangle$ можуть поступово руйнуватися. У результаті система переходить у змішаний стан і матриця густини набуває вигляду

$$\rho = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|.$$

Такий стан уже не демонструє квантової інтерференції.

Декогеренція є одним із головних факторів, що обмежують практичне застосування квантових інформаційних технологій. У квантових обчислювальних системах вона обмежує час збереження квантової інформації. У квантових комунікаційних системах декогеренція може призводити до спотворення квантових станів під час передачі через фізичне середовище. Математично декогеренція проявляється у зменшенні недіагональних елементів матриці густини, що характеризують квантову когерентність системи. Цей процес визначає часові межі збереження квантових властивостей системи. Розуміння механізмів декогеренції має важливе значення для розвитку квантових інформаційних технологій, оскільки дозволяє визначити фізичні обмеження стабільності квантових станів і сприяє розробці методів їхнього захисту. Саме тому розробка методів боротьби з декогеренцією є важливим напрямом сучасних досліджень у квантовій фізиці.

У практичних квантових системах квантові стани піддаються впливу різноманітних неконтрольованих факторів, які призводять до їхніх випадкових змін. Сукупність таких неконтрольованих впливів зазвичай називають

квантовим шумом. На відміну від ідеалізованих моделей, де квантовий стан зберігає свої властивості протягом усього часу еволюції, у реальних фізичних умовах стан системи може зазнавати спотворень, що змінюють його статистичні характеристики.

Квантовий шум є одним із головних факторів, які обмежують стабільність квантових станів і точність квантових інформаційних процесів. Він може проявлятися у вигляді втрати енергії, зміни фазових характеристик або випадкового перетворення квантового стану. Такі процеси призводять до деградації квантових суперпозицій, зменшення когерентності та втрати квантових кореляцій. Саме тому дослідження механізмів виникнення шуму та розробка моделей, які описують його вплив на квантові системи, є важливим напрямом сучасної квантової фізики. Для аналізу таких процесів використовуються спеціальні математичні моделі квантового шуму. Вони дозволяють описати характер змін квантових станів під впливом різних фізичних факторів і визначити характер еволюції системи в умовах реального середовища. Моделі квантового шуму використовуються для опису перетворень квантових станів, що виникають внаслідок неконтрольованих фізичних процесів. У загальному випадку дія шуму призводить до зміни матриці густини квантової системи. Це означає, що після впливу шуму початковий квантовий стан ρ переходить у новий стан ρ'.

Залежно від фізичної природи процесу шум може змінювати різні характеристики квантового стану. У деяких випадках відбувається втрата енергії системи, зміна ймовірностей базисних станів, в інших – зміна фазових співвідношень між компонентами квантової суперпозиції або поступове зникнення квантових кореляцій. Для опису таких процесів у квантовій теорії інформації використовують кілька стандартних моделей шуму. Найбільш поширеними серед них є деполяризаційний канал, канал фазового шуму та канал амплітудного згасання.

Деполяризаційний шум. Однією з базових моделей квантового шуму є деполяризаційний шум. У цій моделі передбачається, що початковий квантовий

стан із певною ймовірністю перетворюється на повністю змішаний стан. Для однокубітної системи дія деполяризаційного каналу описується співвідношенням

$$\rho' = (1-p)\rho + \frac{I}{2}p, \tag{4.22}$$

де ρ – початкова матриця густини; ρ' – матриця густини після дії шуму; p – параметр шуму; I – одинична матриця. З фізичної точки зору це означає, що з імовірністю $(1-p)$ квантовий стан системи залишається незмінним, а з імовірністю p система переходить у повністю випадковий стан. Деполяризаційна модель часто використовується для опису процесів випадкового спотворення квантових станів у квантових каналах зв'язку.

Фазовий шум. Іншою важливою моделлю є фазовий шум, який змінює фазові характеристики квантового стану без зміни ймовірностей базисних станів. Нехай матриця густини однокубітної системи має вигляд

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Під дією фазового шуму її елементи змінюються таким чином:

$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-\lambda)\rho_{01} \\ (1-\lambda)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

де λ – параметр фазового шуму. У цьому випадку діагональні елементи матриці густини залишаються незмінними, тоді як недіагональні елементи поступово зменшуються. Це означає, що система поступово втрачає фазову когерентність. Фазовий шум часто виникає у квантових системах під впливом випадкових флуктуацій зовнішніх полів – електромагнітних полів або теплових процесів.

Амплітудне згасання. Ще однією важливою моделлю є амплітудне згасання, яке описує процес втрати енергії квантовою системою. У цьому випадку система може переходити із збудженого стану в основний стан. У формалізмі операторів Крауса цей процес для однокубітної системи описується операторами

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

де γ – параметр, що характеризує ймовірність втрати енергії. Амплітудне згасання широко використовується для опису процесів спонтанного випромінювання у квантовій оптиці.

Вплив різних моделей шуму на квантову систему можна подати у вигляді узагальненої схеми

початковий квантовий стан



дія шуму

змінений квантовий стан

Залежно від фізичної природи шуму можуть змінюватися різні характеристики квантового стану: одні процеси впливають на ймовірності базисних станів, інші – на фазові властивості або на енергетичні характеристики системи. У реальних квантових системах джерелами шуму можуть бути різні фізичні фактори. У квантових комунікаційних системах шум може виникати під час передачі фотонів через оптичні волокна або атмосферу. У квантових обчислювальних системах джерелами шуму можуть бути теплові флуктуації, електромагнітні перешкоди або дефекти матеріалу. У твердотільних системах значну роль можуть відігравати коливання кристалічної ґратки або випадкові зарядові флуктуації.

Моделі квантового шуму відіграють важливу роль у дослідженні квантових інформаційних процесів. Вони дозволяють передбачати поведінку квантових систем у реальних фізичних умовах та оцінювати стабільність квантових станів. Завдяки таким моделям можна розробляти методи боротьби з шумом, включаючи квантову корекцію помилок та спеціальні алгоритми стабілізації квантових станів. Квантовий шум є невід’ємною характеристикою реальних квантових систем. Його вплив призводить до зміни квантових станів і

може істотно обмежувати ефективність квантових інформаційних технологій. Для опису таких процесів використовуються спеціальні моделі квантового шуму, серед яких найбільш поширеними є деполяризаційний шум, фазовий шум та амплітудне згасання. Ці моделі дозволяють аналізувати вплив різних фізичних факторів на квантові системи та створюють основу для подальшого розвитку методів захисту квантової інформації.

4.3. Часові характеристики релаксації та деградація заплутаності

У динаміці квантових систем важливе значення мають характерні часові масштаби, які визначають швидкість змін квантового стану під впливом різних фізичних процесів. У реальних умовах квантові системи не є повністю ізольованими і зазнають впливу зовнішнього середовища. Це призводить до появи процесів, пов'язаних із втратою енергії та руйнуванням фазових співвідношень між компонентами квантових суперпозицій.

Для кількісного опису цих процесів використовують два основні параметри – ***час релаксації*** та ***час декогеренції***. Час релаксації характеризує швидкість енергетичного переходу системи до рівноважного стану, тоді як час декогеренції визначає швидкість втрати квантової когерентності. У квантових інформаційних системах ці параметри відіграють особливо важливу роль, оскільки саме вони визначають часові межі збереження квантових станів і стабільність квантових суперпозицій.

У формалізмі матриці густини квантовий стан системи описується матрицею ρ. Елементи цієї матриці мають різний фізичний зміст. Діагональні елементи характеризують імовірності перебування системи у відповідних енергетичних станах, тоді як недіагональні елементи визначають фазові співвідношення між компонентами квантової суперпозиції. У процесі еволюції квантової системи ці елементи можуть змінюватися з різною швидкістю. Саме тому для опису різних типів динаміки використовують два окремі часові параметри – T_1 та T_2.

Час релаксації. Час релаксації, який позначають символом T_1, характеризує процес енергетичної релаксації квантової системи. Цей процес зазвичай пов'язаний із втратою енергії системою та переходом зі збудженого стану у більш стабільний енергетичний стан. Для дворівневої системи час релаксації визначає характерний час, протягом якого ймовірність перебування системи у збудженому стані зменшується. Ймовірність перебування системи у збудженому стані описується експоненційною залежністю (2.41). Цей параметр визначає швидкість втрати енергії системою. У квантовій оптиці та фізиці квантових систем такий процес часто пов'язаний із випромінюванням фотонів.

Час декогеренції. Час декогеренції, який позначають символом T_2, характеризує швидкість втрати фазових співвідношень між компонентами квантового стану. Нехай стан системи описується матрицею густини

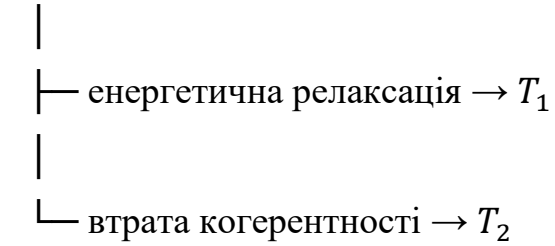
$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Під час декогеренції недіагональні елементи цієї матриці зменшуються з часом відповідно до залежності (2.42). Зменшення недіагональних елементів означає поступове руйнування квантової когерентності системи. У більшості фізичних систем час декогеренції пов'язаний із часом релаксації. Для багатьох квантових систем виконується співвідношення

$$T_2 \leq 2T_1. \tag{4.27}$$

Це співвідношення відображає той факт, що процеси втрати когерентності зазвичай відбуваються швидше, ніж процеси енергетичної релаксації. Крім релаксаційних процесів, на значення T_2 можуть впливати додаткові механізми шуму, зокрема випадкові фазові флуктуації. Відмінність між релаксацією та декогеренцією можна подати у вигляді узагальненої схеми

початковий квантовий стан



Ця схема показує, що процеси втрати енергії та руйнування фазових співвідношень можуть відбуватися незалежно один від одного.

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо такий приклад.

Дворівнева квантова система. Розглянемо квантову систему з двома базисними станами, яка перебуває у суперпозиції

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle.$$

У процесі взаємодії з навколишнім середовищем можуть відбуватися два різні типи змін. Перший процес пов'язаний із переходом зі збудженого стану $|1\rangle$ в основний стан $|0\rangle$. Цей процес визначається часом релаксації T_1. Другий процес пов'язаний із поступовим руйнуванням фазових співвідношень між станами $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Цей процес визначається часом декогеренції T_2. У результаті система може втратити квантову когерентність ще до того, як завершиться енергетична релаксація.

Параметри T_1 і T_2 є основними характеристиками квантових інформаційних систем. Вони визначають максимальний час, протягом якого квантова система може зберігати інформацію і ефективність квантових інформаційних процесів. У квантових обчислювальних системах ці параметри визначають максимальну тривалість виконання квантових алгоритмів. У квантових сенсорах вони визначають точність вимірювань. У квантових комунікаційних системах вони визначають стабільність квантових станів під час передачі інформації.

Час релаксації та час декогеренції є фундаментальними параметрами, що характеризують еволюцію квантових систем у реальних фізичних умовах. Час релаксації описує швидкість енергетичного переходу системи до рівноважного стану, тоді як час декогеренції характеризує швидкість втрати квантової когерентності. Ці параметри відіграють важливу роль у квантових інформаційних технологіях, оскільки вони визначають часові межі збереження квантових станів і ефективність квантових процесів. Аналіз механізмів, що визначають значення T_1 і T_2, є необхідною умовою для розвитку стабільних квантових систем.

Квантова заплутаність є фундаментальною характеристикою складених квантових систем і одним із ключових ресурсів квантової теорії інформації. Заплутані стани характеризуються наявністю некласичних кореляцій між підсистемами, які не можуть бути описані за допомогою класичних статистичних моделей. Саме ці кореляції забезпечують можливість реалізації квантових інформаційних протоколів, таких як квантова телепортація, квантове надщільне кодування та квантова криптографія. Однак у реальних фізичних умовах квантова заплутаність є нестійкою властивістю квантових систем. Внаслідок взаємодії із зовнішнім середовищем відбуваються процеси, які призводять до руйнування квантових кореляцій. Основним механізмом такого руйнування є декогеренція, яка призводить до втрати фазових співвідношень між компонентами квантового стану.

У результаті дії декогеренції квантова система може перейти від заплутаного стану до стану, що описується класичними статистичними кореляціями. Дослідження механізмів руйнування заплутаності має важливе значення для квантових технологій, оскільки стабільність заплутаних станів визначає ефективність багатьох квантових інформаційних процесів. Для аналізу процесів руйнування заплутаності зручно використовувати формалізм матриці густини. У цьому підході квантовий стан складеної системи описується матрицею густини ρ, елементи якої містять інформацію як про ймовірності базисних станів, так і про квантові кореляції між підсистемами.

Квантова заплутаність безпосередньо пов’язана з наявністю недіагональних елементів матриці густини. Саме ці елементи визначають когерентні квантові кореляції між підсистемами. Під впливом декогеренції недіагональні елементи матриці густини поступово зменшуються. У результаті цього процесу квантові кореляції між підсистемами слабшають і можуть повністю зникнути.

Розглянемо систему, що складається з двох кубітів, яка перебуває у заплутаному стані Белла

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Матриця густини цього стану має вигляд

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Недіагональні елементи цієї матриці відповідають за когерентні кореляції між підсистемами і визначають наявність заплутаності. У процесі декогеренції ці елементи поступово зменшуються. еволюція стану описується співвідношенням (2.42). Коли недіагональні елементи матриці густини зникають, стан системи набуває вигляду

$$\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|). \quad (4.29)$$

Такий стан уже не є заплутаним.

Процес руйнування заплутаності пов'язаний із передаванням інформації про квантовий стан системи до навколишнього середовища. Коли кожна підсистема взаємодіє з власним локальним середовищем, фазова інформація про квантовий стан поступово розсіюється. У результаті цього процесу квантові кореляції між підсистемами слабшають. Інформація про фазові співвідношення між компонентами суперпозиції стає недоступною для спостереження. З часом система переходить від квантового опису до класичного статистичного опису. Механізм руйнування заплутаності можна представити у вигляді схеми

заплутаний стан

декогеренція

(взаємодія із середовищем)



зменшення квантових кореляцій



класично корельований стан

Ця схема демонструє поступовий перехід від квантових до класичних кореляцій. У деяких фізичних системах руйнування заплутаності може відбуватися не поступово, а різко. Це явище отримало назву ***раптової смерті заплутаності***. У такій ситуації квантові кореляції можуть зникнути за скінченний проміжок часу, навіть якщо когерентність окремих підсистем ще не повністю втрачена. Цей ефект має важливе значення для квантових інформаційних систем, оскільки він визначає часові межі стабільності заплутаних станів.

Приклад: *Вплив фазового шуму.* Розглянемо пару кубітів, що перебувають у заплутаному стані. Якщо кожен кубіт взаємодіє із зовнішнім середовищем, фазовий шум призводить до зменшення недіагональних елементів матриці густини. Зі зменшенням цих елементів квантові кореляції між підсистемами поступово слабшають. У певний момент часу система може перейти у стан, який більше не є заплутаним. Це демонструє високу чутливість квантової заплутаності до зовнішніх впливів.

Руйнування заплутаності є одним із основних обмежень у практичному застосуванні квантових інформаційних технологій. У квантових комунікаційних системах втрата заплутаності може призводити до зниження ефективності передачі квантової інформації. У квантових обчислювальних системах руйнування заплутаності обмежує можливість виконання складних квантових алгоритмів. Саме тому розробка методів стабілізації заплутаних станів та зменшення впливу декогеренції є важливим напрямом сучасних досліджень у квантовій фізиці. Фізична інтерпретація механізмів руйнування заплутаності є визначальним фактором для розвитку квантових інформаційних технологій, оскільки вона дозволяє оцінювати стабільність квантових кореляцій та розробляти ефективні методи їхнього збереження.

4.4. Прояви декогеренції у фізичних реалізаціях квантових систем

У реальних квантових інформаційних системах декогеренція є одним із ключових процесів, що обмежують стабільність квантових станів і ефективність

квантових інформаційних протоколів. Хоча декогеренція має універсальний характер і пов’язана з передаванням інформації про квантовий стан системи до навколишнього середовища, конкретні механізми цього процесу суттєво залежать від фізичної платформи, на якій реалізовано квантову систему. Сучасні квантові інформаційні технології базуються на різних фізичних реалізаціях кубітів, серед яких найбільш поширеними є фотонні системи, іонні пастки, надпровідні квантові кола, а також різноманітні твердотільні структури. У кожній із цих систем механізми декогеренції мають власну фізичну природу і залежать від специфіки взаємодії квантового об’єкта з навколишнім середовищем.

Аналіз декогеренції у фізичних реалізаціях квантових систем дозволяє встановити основні джерела шуму та визначити механізми втрати когерентності. Це, у свою чергу, є необхідною передумовою для розробки ефективних методів стабілізації квантових станів. Фізичні реалізації квантових систем суттєво відрізняються одна від одної за типом квантових носіїв інформації, умовами експериментальної реалізації та характером взаємодії з навколишнім середовищем. Відповідно, механізми декогеренції у цих системах також можуть мати різну природу.

У загальному випадку декогеренція виникає внаслідок випадкових флуктуацій параметрів системи або взаємодії квантового об’єкта з неконтрольованими ступенями свободи середовища. Такими факторами можуть бути електромагнітні поля, теплові флуктуації, коливання кристалічної ґратки, дефекти матеріалу або взаємодія з іншими частинками. Для аналізу стабільності квантових систем необхідно розглядати ці процеси у контексті конкретних фізичних реалізацій.

Декогеренція у фотонних квантових системах. Фотони широко використовуються у квантових комунікаційних системах завдяки їхній здатності поширюватися на великі відстані з відносно малими втратами. У таких системах квантова інформація може кодуватися у різних ступенях свободи фотона, зокрема у поляризації, фазі або частоті. Основними механізмами декогеренції у

фотонних системах є розсіювання фотонів у середовищі; поглинання фотонів у матеріалах; флуктуації показника заломлення середовища, випадкові зміни оптичних властивостей середовища. Наприклад, під час поширення фотона через оптичне волокно флуктуації температури або механічні деформації можуть змінювати фазу фотонного стану. Це призводить до поступового руйнування когерентності між компонентами квантової суперпозиції.

Декогеренція у надпровідних кубітах. Надпровідні кубіти є однією з найбільш перспективних платформ для створення квантових комп'ютерів. Вони реалізуються у вигляді мікроскопічних електричних кіл, які працюють у режимі квантових осциляцій. У таких системах квантова інформація зберігається у квантових станах надпровідних електричних кіл. Такі системи активно використовуються у сучасних експериментальних квантових комп'ютерах. Основними механізмами декогеренції у надпровідних системах є флуктуації електричних зарядів; флуктуації магнітного потоку; взаємодія з мікроскопічними дефектами матеріалу, взаємодія з мікрохвильовими лініями. Ці процеси призводять до випадкових змін енергетичних рівнів кубіта і викликають руйнування фазових співвідношень між квантовими станами. Когерентність таких систем часто описується експоненційним законом (2.42). З часом недіагональні елементи зменшуються, що означає втрату квантової інтерференції.

Декогеренція у іонних пастках. Іонні пастки є однією з найбільш точних платформ для реалізації квантових обчислювальних систем. У таких системах квантова інформація зберігається у внутрішніх енергетичних рівнях іонів, які утримуються у вакуумі за допомогою електромагнітних полів. Основними джерелами декогеренції у таких системах є флуктуації електромагнітних полів; теплові коливання іонів; нестабільність лазерних полів, які використовуються для керування станами іонів. Ці фактори можуть викликати випадкові зміни фазових характеристик квантового стану іонів, що призводить до поступової втрати когерентності. В іонних пастках часи когерентності значно більші і складають секунди або більше.

Декогеренція у твердотільних квантових системах.

У твердотільних реалізаціях квантових систем, таких як квантові точки або центри азот-вакансія у кристалах алмазу, квантова інформація може зберігатися у спінових або електронних станах частинок. Основними джерелами декогеренції у таких системах є взаємодія з ядерними спінами кристалічної ґратки; флуктуації електричних полів; коливання кристалічної структури. Ці фактори викликають флуктуації локальних параметрів системи і призводять до втрати квантової когерентності. Загальну структуру процесу декогеренції у різних фізичних системах можна подати у вигляді схеми

квантова система

↓

взаємодія з фізичним середовищем

↓

випадкові флуктуації параметрів

↓

втрата когерентності (декогеренція)

Ця схема відображає універсальний характер процесу декогеренції незалежно від конкретної фізичної реалізації системи.

Розглянемо приклад: *Декогеренція у квантових обчислювальних пристроях.* У квантових комп’ютерах когерентність кубітів повинна зберігатися протягом часу виконання квантового алгоритму. Проте навіть слабкі флуктуації зовнішніх полів можуть призводити до втрати когерентності. Якщо час декогеренції є меншим за час виконання алгоритму, квантові операції виконуються з великими помилками. Саме тому при створенні квантових обчислювальних систем застосовуються різні методи мінімізації декогеренції, зокрема використання наднизьких температур, екранування від електромагнітних полів та оптимізація матеріалів.

Дослідження механізмів декогеренції у конкретних фізичних системах дозволяє визначити основні джерела шуму та розробити методи підвищення стабільності квантових станів. До таких методів належать: використання високочистих матеріалів; зниження температури експериментальних систем; застосування квантової корекції помилок; оптимізація архітектури квантових пристроїв.

Декогеренція є універсальним фізичним процесом, який проявляється у всіх фізичних реалізаціях квантових систем і є одним із головних факторів, що обмежують стабільність квантових станів. Конкретні механізми цього процесу залежать від типу квантової системи та характеру її взаємодії з навколишнім середовищем. Усвідомлення фізичних джерел декогеренції дозволяє розробляти ефективні методи її зменшення та підвищувати стабільність квантових інформаційних систем. Сучасні дослідження у цій галузі спрямовані на створення фізичних платформ із тривалішим часом когерентності, а також на розробку ефективних методів квантової корекції помилок. Це є важливим етапом на шляху до створення масштабованих і надійних квантових технологій.

4.5. Методологія боротьби з декогеренцією в квантових технологіях

Квантові технології базуються на використанні фундаментальних властивостей квантових систем, зокрема квантової суперпозиції, когерентності та заплутаності. Саме ці властивості забезпечують принципову перевагу квантових інформаційних систем над класичними. Завдяки їм можливе створення квантових комп’ютерів, систем квантового зв’язку, квантових сенсорів та інших високоточних технологічних пристроїв. Разом із тим практична реалізація таких систем пов’язана з низкою фундаментальних обмежень, розглянутих раніше. Одним із найважливіших фізичних процесів, що впливає на функціонування квантових технологій, є декогеренція. Оскільки декогеренція визначає часові межі існування квантових ефектів у фізичних системах, то її вплив є одним із ключових факторів, які визначають ефективність квантових інформаційних процесів і можливості практичного використання

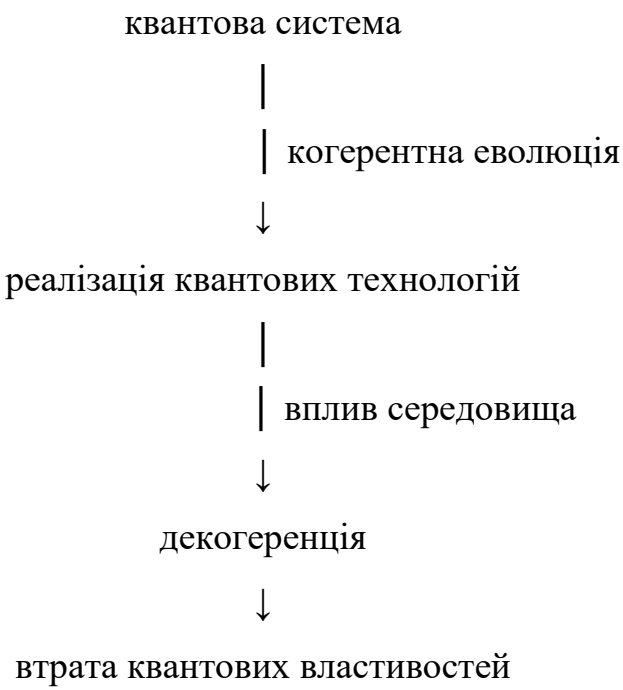
квантових технологій. Квантові технології використовують квантові стани для виконання різних інформаційних операцій. Для того, щоб такі операції були можливими, квантова система повинна зберігати когерентність протягом часу, достатнього для виконання необхідних процесів. Однак у реальних фізичних умовах квантові системи взаємодіють із навколишнім середовищем. Це призводить до виникнення випадкових збурень, які поступово руйнують фазові співвідношення між компонентами квантового стану. В результаті система переходить від когерентного квантового стану до статистичної суміші станів. Тому, декогеренція є важливим фактором, який необхідно враховувати при розробці та реалізації квантових інформаційних систем. Доцільно розглянути вплив декогеренції на реалізацію квантових технологій.

Вплив декогеренції на квантові обчислення. Квантові комп'ютери використовують кубіти – квантові системи, які можуть перебувати у суперпозиції базисних станів. Під час виконання квантового алгоритму система може перебувати у складній суперпозиції великої кількості станів. Саме ця властивість дозволяє квантовим комп'ютерам виконувати певні обчислювальні задачі значно швидше, ніж класичні. Проте декогеренція призводить до поступового руйнування квантової суперпозиції. У результаті цього процесу система втрачає квантові властивості і її поведінка наближається до класичної. Якщо час декогеренції є меншим за час виконання квантового алгоритму, результати обчислень можуть містити значні помилки. Саме тому одним із головних завдань у розробці квантових комп'ютерів є збільшення часу когерентності кубітів.

Декогеренція у квантових комунікаційних системах. Квантові комунікаційні системи використовують квантові стани для передачі інформації між віддаленими користувачами. У таких системах інформація може кодуватися у станах фотонів або інших квантових об'єктів. Під час поширення квантових станів через фізичні канали зв'язку вони можуть зазнавати впливу різних зовнішніх факторів, таких як розсіювання, поглинання або фазові флуктуації. Унаслідок цього виникає декогеренція, яка призводить до спотворення переданої

квантової інформації. Цей ефект обмежує максимальну відстань передачі квантових станів і стимулює розвиток спеціальних технологій, зокрема квантових повторювачів.

Декогеренція у квантових сенсорних системах. Квантові сенсори використовують когерентні квантові стани для високоточного вимірювання різних фізичних величин. Завдяки використанню квантових ефектів такі сенсори можуть досягати значно більшої точності, ніж класичні вимірювальні пристрої. Проте декогеренція обмежує час, протягом якого система може зберігати квантову когерентність. Унаслідок цього обмежується точність вимірювань. Для підвищення ефективності квантових сенсорів необхідно мінімізувати вплив зовнішніх факторів, які призводять до декогеренції. Загальний вплив декогеренції на квантові технології можна подати у вигляді схеми



Ця схема демонструє, що декогеренція є одним із головних факторів, які обмежують стабільність квантових систем.

У багатьох квантових інформаційних протоколах використовуються заплутані стани кількох квантових систем. Оскільки такі стани є дуже чутливими до зовнішніх збурень, то під дією декогеренції відбувається руйнування

заплутаних станів, тобто заплутані стани можуть поступово переходити у класично корельовані стани. У результаті квантові протоколи, які базуються на заплутаності, можуть втратити свою ефективність. Це особливо важливо для квантових мереж, де заплутаність використовується для передачі квантової інформації.

Зважаючи на наведені негативні наслідки впливу декогеренції на квантові технології, значна частина сучасних досліджень у галузі квантової фізики спрямована на розробку методів, які дозволяють зменшити вплив декогеренції або компенсувати її наслідки. Загальною метою методів боротьби з декогеренцією є збереження квантової когерентності протягом часу, достатнього для виконання квантових операцій або передачі квантової інформації. Для досягнення цього використовуються як фізичні, так і математичні підходи. У фізичних методах основна увага приділяється мінімізації взаємодії квантової системи з навколишнім середовищем. У математичних або алгоритмічних підходах основна ідея полягає у відновленні квантової інформації після виникнення помилок або у використанні спеціальних станів, які менш чутливі до зовнішніх збурень.

У загальному випадку методи боротьби з декогеренцією можна поділити на кілька основних категорій: ізоляція квантових систем від зовнішніх впливів; активне керування квантовою динамікою; використання спеціальних фізичних станів, стійких до шуму; алгоритмічні методи захисту квантової інформації. Кожен із цих підходів спрямований на зменшення швидкості руйнування когерентності або на відновлення квантової інформації після виникнення помилок.

Одним із найпростіших і водночас ефективних методів боротьби з декогеренцією є максимальна ***ізоляція квантової системи*** від навколишнього середовища. Оскільки декогеренція виникає через взаємодію системи із зовнішніми ступенями свободи, зменшення цієї взаємодії дозволяє суттєво продовжити час збереження когерентності. У багатьох експериментальних установках для цього застосовують такі методи ізоляції: використання

вакуумних систем; охолодження квантових систем до наднизьких температур; електромагнітне екранування. Наприклад, у надпровідних квантових процесорах температура робочого середовища може становити лише кілька мілікельвінів. Це дозволяє суттєво зменшити вплив теплових флуктуацій, що дозволяє продовжити час збереження когерентності.

Іншим важливим підходом є ***динамічне пригнічення декогеренції***. Цей метод базується на застосуванні спеціальних послідовностей керуючих імпульсів, які змінюють фазу квантового стану таким чином, що випадкові збурення взаємно компенсуються.

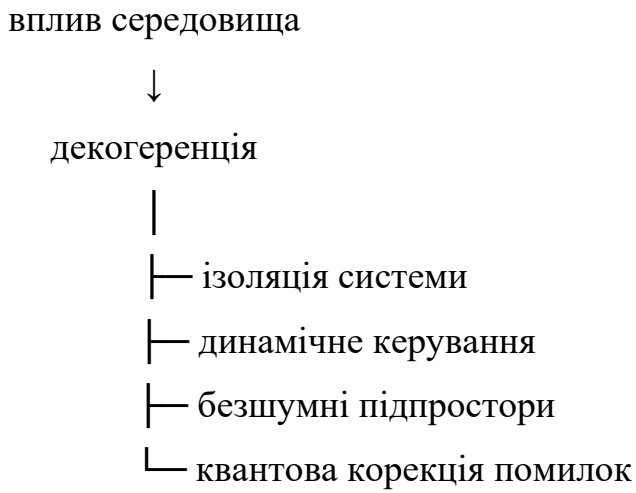
Ще одним підходом до боротьби з декогеренцією є використання ***безшумних підпросторів***. У цьому випадку квантова інформація кодується у спеціальних колективних станах кількох кубітів, які є стійкими до певних типів шуму. Якщо взаємодія системи з навколишнім середовищем має певну симетрію, деякі комбінації квантових станів можуть залишатися незмінними під дією шуму. Такі стани утворюють підпростір гільбертового простору системи, у якому квантова інформація може зберігатися значно довше, що дозволяє зменшити вплив декогеренції.

Одним із найбільш потужних методів боротьби з декогеренцією є ***квантова корекція помилок***. Цей підхід базується на кодуванні квантової інформації у станах кількох фізичних кубітів. Основна ідея полягає у тому, що навіть якщо частина кубітів зазнає помилки, інформацію можна відновити за допомогою спеціальних алгоритмів. Наприклад, логічний кубіт може бути закодований у трьох фізичних кубітах

$$|0_L\rangle = |000\rangle, \qquad |1_L\rangle = |111\rangle.$$

Якщо один із кубітів змінює свій стан, спеціальна процедура вимірювання дозволяє визначити помилку та відновити початковий стан.

Основні підходи до боротьби з декогеренцією можна подати у вигляді узагальненої схеми



Ця схема демонструє різні стратегії збереження квантової інформації.

Розглянемо приклад. *Стабілізація кубітів у квантових комп'ютерах.* У сучасних квантових процесорах застосовується комбінація різних методів боротьби з декогеренцією. Зокрема використовуються наднизькі температури; складні схеми керування кубітами; алгоритми квантової корекції помилок. Таке поєднання методів дозволяє значно збільшити час збереження когерентності та підвищити точність квантових обчислень.

Методи боротьби з декогеренцією відіграють ключову роль у розвитку квантових інформаційних технологій. Саме вони дозволяють забезпечити стабільність квантових станів і зробити можливим виконання складних квантових алгоритмів. Сучасні дослідження спрямовані на створення нових фізичних систем з довшими часами когерентності та на розробку більш ефективних алгоритмів захисту квантової інформації.

Декогеренція є одним із визначальних факторів, що обмежують стабільність квантових систем. Для зменшення її впливу розроблено різні методи, серед яких важливе місце займають фізична ізоляція квантових систем, динамічне керування квантовими станами, використання безшумних підпросторів та квантова корекція помилок. Поєднання цих підходів дозволяє суттєво підвищити стабільність квантових станів і забезпечити надійне збереження квантової інформації. Подальший розвиток методів боротьби з

декогеренцією є необхідною умовою створення ефективних квантових інформаційних технологій.

РОЗДІЛ 5 ТЕОРЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ ТА ОБМЕЖЕННЯ КВАНТОВОЇ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

5.1. Фундаментальні заборони на клонування та вимірювання станів

У попередніх розділах було розглянуто базові принципи квантової механіки, математичний апарат квантових станів і операторів, а також основні механізми передачі квантової інформації. Однак сама можливість передавати квантову інформацію не означає її необмежену керованість або довільну обробку. На відміну від класичних інформаційних систем, квантові системи підпорядковуються фундаментальним обмеженням, що випливають безпосередньо з фізичної природи мікросвіту.

Фундаментальні обмеження квантової передачі інформації виникають як прямий наслідок аксіоматичної структури квантової механіки, зокрема, лінійності динаміки, унітарності еволюції замкнених систем та некомутативності спостережуваних операторів. Ці обмеження не мають технічного чи інженерного характеру, вони мають принциповий характер і визначають допустимі перетворення квантових станів. Іншими словами, їх не можна подолати шляхом вдосконалення технологій або збільшення ресурсів, оскільки вони задають фундаментальні межі фізично можливих процесів передачі інформації.

У класичній теорії інформації процес передачі повідомлення зазвичай розглядається як послідовність операцій кодування, передачі та декодування сигналу. У квантовому випадку така схема виявляється недостатньою, оскільки інформація не є абстрактною величиною, а нерозривно пов’язана зі станом фізичної системи. Квантовий стан не можна розглядати як просто носій інформації, який можна копіювати, зчитувати чи зберігати без змін. Будь-яка операція над квантовим станом змінює його, і саме ця властивість призводить до виникнення фундаментальних обмежень. У зв’язку з цим виникає основне питання: які саме властивості квантових систем обмежують передачу інформації та яким чином ці обмеження формалізуються у вигляді строгих теоретичних результатів? Фундаментальні обмеження квантової передачі інформації

базуються на трьох основних принципах: лінійність квантової механіки; унітарність еволюції квантових систем; ймовірнісний характер вимірювань.

Розглянемо ці принципи у контексті передачі інформації.

Нехай квантова система описується станом (1.75). Інформація про стан системи закодована саме в амплітудах α і β, але вони не можуть бути безпосередньо визначені без впливу на сам стан, тобто без втрати частини інформації. Це означає, що квантова інформація є принципово недоступною у повному обсязі через процедуру вимірювання та має контекстно-залежний характер, оскільки результати вимірювання залежать від вибору базису. Еволюція квантової системи описується лінійним оператором U, для якого виконується співвідношення

$$U(\alpha \mid \psi_1\rangle + \beta \mid \psi_2\rangle) = \alpha U \mid \psi_1\rangle + \beta U \mid \psi_2\rangle. \qquad (5.1)$$

Ця властивість має глибокі наслідки. По-перше, неможливо створити операцію, яка діяла б по-різному для різних невідомих станів; по-друге, будь-яке перетворення повинно однаково застосовуватися до всіх суперпозицій. Саме ця властивість лежить в основі таких фундаментальних результатів, як теорема про заборону клонування та теорема про заборону видалення квантової інформації.

Еволюція замкненої системи описується унітарним оператором $U^{\dagger}U = I$, де $U^{\dagger}$ – ермітово-спряжений оператор до U. Це означає, що процес еволюції є оборотним, а інформація не зникає і не створюється «з нічого». На відміну від класичних систем, де можливе безповоротне стирання біта, у квантових системах повне видалення інформації без залишкового сліду є принципово неможливим. Вимірювання квантового стану призводить до його проєкції на один із базисних станів. Ймовірність отримання результату *i* визначається як

$$P(i) = |\langle i \mid \psi \rangle|^2. \qquad (5.2)$$

Після вимірювання система переходить у стан $\mid i\rangle$, і початкова суперпозиція руйнується. Це означає, що отримання інформації про стан неминуче супроводжується його зміною, і неможливо отримати повну інформацію про

стан за одне вимірювання. У більш загальному випадку передача квантової інформації описується квантовим каналом, який задається відображенням

$$\mathcal{E} : \rho \to \mathcal{E}(\rho), \tag{5.3}$$

де ρ – матриця густини; $\mathcal{E}$ – повністю позитивне, трасозберігаюче відображення. Відображення $\mathcal{E}$ називається трасозберігаючим, якщо виконується умова

$$Tr\big(E(\rho)\big) = Tr(\rho) \tag{5.4}$$

для будь-якої матриці густини ρ. Це означає, що система не «зникає» і не «з'являється з нічого», загальна ймовірність зберігається, і всі результати процесу враховані. Обмеження квантових каналів проявляються у вигляді декогеренції (втрати когерентності), шуму та обмежень на кількість інформації, яку можна надійно передати. Таким чином, навіть у відсутності технічних недосконалостей існують фундаментальні межі інформаційної передачі.

Наведений формальний опис дозволяє встановити межі квантової передачі інформації, однак їх фізичний зміст стає більш наочним при використанні інтуїтивних інтерпретацій. З цією метою розглянемо кілька описових ілюстрацій, що відображають ключові аспекти поведінки квантових систем.

1. Суперпозиція як розподілена інформація. Квантову інформацію можна інтерпретувати як таку, що «розподілена» між базисними станами $|0\rangle|$ та $|1\rangle$. Вимірювання не відновлює повний стан, а лише вибирає один із можливих результатів.

2. Неможливість копіювання. Якщо спробувати створити копію довільного невідомого стану, лінійність квантової еволюції змусить систему діяти однаково для всіх станів, що призводить до суперечності і до фундаментальної заборони клонування.

3. Вимірювання як руйнування інформації. Вимірювання можна інтерпретувати як проєкцію стану на підпростір, у результаті чого частина інформації про систему безповоротно втрачається.

Для ілюстрації фундаментальних обмежень квантової передачі інформації розглянемо характерні приклади.

1. Обмеження інформації одного кубіта. Розглянемо стан кубіта:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Хоча параметри α і β є неперервними і формально містять нескінченну кількість інформації, результат вимірювання дає лише один із двох можливих результатів: $|0\rangle$ або $|1\rangle$. Таким чином, з одного кубіта неможливо отримати більше одного біта інформації. Це демонструє фундаментальне обмеження: кількість доступної інформації визначається не параметрами стану, а результатами вимірювання.

2. Заплутаність і відсутність передачі сигналу. Нехай система перебуває у стані:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle). \tag{5.5}$$

Редукована матриця густини для підсистеми B:

$$\rho_B = \frac{1}{2}I. \tag{5.6}$$

Це означає, що локальний стан не залежить від дій над підсистемою A. Незважаючи на сильні кореляції, результати вимірювань є випадковими, тому заплутаність не дозволяє передавати інформацію швидше за світло.

*3. Неможливість клонування квантового стану.*Нехай існує оператор U, який копіює довільний стан:

$$U\,|\psi\rangle\,|0\rangle = |\psi\rangle\,|\psi\rangle. \tag{5.7}$$

Для двох станів: $\psi 1\rangle, |\psi 2\rangle$ лінійність вимагає:

$$U(\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle)\,|0\rangle = \alpha\,|\psi_1\rangle\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle\,|\psi_2\rangle. \tag{5.8}$$

Але це не дорівнює:

$$(\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle)^2. \tag{5.9}$$

Це протиріччя доводить, що універсальне копіювання квантових станів є неможливим.

4. Вимірювання як незворотний процес. Після вимірювання стан:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle,$$

переходить у $|0\rangle$ або $|1\rangle$. Фазова інформація про коефіцієнти α і β втрачається. Це означає, що вимірювання є незворотним процесом і призводить до втрати частини квантової інформації.

Фундаментальні обмеження квантової передачі інформації є прямим наслідком базових принципів квантової механіки. Вони не є випадковими чи технічними. Вони визначають допустимий клас фізичних операцій над квантовими станами та встановлюють межі інформаційних процесів. Зокрема, квантову інформацію неможливо повністю виміряти без її зміни, її не можна довільно копіювати або знищувати, а обсяг доступної інформації обмежений природою вимірювань. Крім того, квантові канали мають фундаментальні межі пропускної здатності. Ці обмеження формують теоретичну основу для подальшого аналізу окремих теорем квантової інформації, які конкретизують зазначені обмеження у строгій математичній формі та визначають як обмеження, так і унікальні можливості квантових технологій, включаючи квантову криптографію, телепортацію та квантові обчислення.

Однією з найважливіших відмінностей квантової інформації від класичної є принципова неможливість її довільного копіювання. Якщо в класичних інформаційних системах створення точної копії повідомлення є звичайною технічною процедурою, тобто будь-який біт може бути зчитаний і відтворений без втрати інформації, то в квантовому випадку така операція виявляється фундаментально забороненою. Це пов’язано з тим, що квантова інформація нерозривно пов’язана зі станом фізичної системи і не може бути відокремлена від нього без зміни самого стану.

Теорема про заборону клонування є одним із базових результатів квантової теорії інформації. Вона встановлює, що не існує універсальної фізично допустимої операції, яка дозволяла б створити точну копію довільного невідомого квантового стану. Це обмеження має не технічний, а принциповий характер, оскільки випливає безпосередньо з математичної структури квантової механіки. Значення цієї теореми виходить далеко за межі суто формального результату. Вона визначає фундаментальні межі квантової передачі інформації,

лежить в основі безпеки квантових криптографічних протоколів і суттєво впливає на побудову квантових комунікаційних систем.

Інтуїтивно може здатися, що копіювання квантового стану є простою задачею: якщо стан квантової системи несе інформацію, то, на перший погляд, повинна існувати можливість перенести цю інформацію на іншу систему, зберігши оригінал без змін. У класичному випадку така логіка є цілком коректною. Наприклад, значення біта можна зчитати і без втрат відтворити в будь-якій кількості копій. У квантовому випадку ситуація принципово інша. Невідомий квантовий стан не допускає повного зчитування без його порушення, а еволюція системи підпорядковується лінійним і унітарним законам. Сам процес вимірювання змінює стан, а невідомі амплітуди не можуть бути отримані без втрати інформації. Саме тому питання про можливість точного копіювання довільного стану потребує спеціального теоретичного аналізу.

У зв'язку з цим виникає питання: чи існує така фізично реалізовна операція, яка дозволяє перетворити одну квантову систему у стані $|\psi\rangle$ і допоміжну систему у фіксованому стані $|0\rangle$ на дві системи, що перебувають у тому самому стані $|\psi\rangle$? Відповідь на це питання і дає теорема про заборону клонування. Теорема про заборону клонування стверджує, що не існує унітарного оператора U, який для довільного невідомого квантового стану $|\psi\rangle$ реалізовував би перетворення

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \qquad (5.10)$$

де $|0\rangle$ – фіксований початковий стан допоміжної системи. Це означає, що універсальна процедура точного копіювання довільних квантових станів є фізично неможливою. Постановка задачі виглядає таким чином. Нехай маємо квантову систему в деякому стані $|\psi\rangle$, який загалом вважається невідомим, та допоміжну систему, підготовлену у стандартному початковому стані $|0\rangle$. Якщо б універсальна операція клонування існувала, то вона повинна була б для будь-якого вхідного стану забезпечувати відображення

$$|\psi\rangle |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle, \qquad (5.11)$$

де $|\psi\rangle$ – довільний квантовий стан (вектор у гільбертовому просторі); $|0\rangle$ – початковий стан додаткової системи; U – унітарний оператор, який гіпотетично виконує клонування. Це означає, що друга система стає точною копією першої.

Для доведення теореми про заборону клонування розглянемо два довільні нормовані квантові стани $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$. Припустимо, що існує унітарний оператор U, який здійснює клонування кожного з них:

$$U(|\psi_1\rangle|0\rangle) = |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle, \quad (5.12)$$

$$U(|\psi_2\rangle|0\rangle) = |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle, \quad (5.13)$$

Оскільки унітарні оператори зберігають скалярний добуток, маємо

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (\langle\psi_1|\langle 0|)(|\psi_2\rangle|0\rangle) = (\langle\psi_1|\langle\psi_1|)(|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle). \quad (5.14)$$

де $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ – скалярний добуток станів. Звідси випливає співвідношення

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle^2. \quad (5.15)$$

Позначимо $s = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Тоді маємо $s = s^2$. Це рівняння має лише два розв'язки: $s = 0$ або $s = 1$.

$s = 1$ означає, що стани ідентичні: $|\psi 1\rangle = |\psi 2\rangle$.

$s = 0$ означає, що стани ортогональні.

Отже, клонування можливе лише або для однакових станів або для ортогональних (тобто взаємно розрізнюваних) станів. Для довільних неортогональних станів, які і становлять загальний випадок у квантовій механіці, така операція неможлива. Це і доводить теорему.

Отриманий математичний результат має глибокий фізичний зміст. Його джерелом є насамперед ***лінійність квантової еволюції***. Якщо оператор діє на два різні стани певним чином, то його дія на суперпозицію цих станів однозначно визначається лінійністю. Саме це унеможливлює побудову універсального «копіювального пристрою», який створював би точні дублікати будь-якого стану.

Дійсно, розглянемо суперпозицію двох станів

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle. \quad (5.16)$$

Якщо припустити, що існує універсальний оператор клонування, то за лінійністю маємо

$$U(|\psi\rangle\,|0\rangle) = \alpha\,|\psi_1\rangle\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle\,|\psi_2\rangle. \quad (5.17)$$

З іншого боку, ідеальне клонування цього самого стану вимагало б результату

$$|\psi\rangle\,|\psi\rangle = \alpha^2\,|\psi_1\rangle\,|\psi_1\rangle + \alpha\beta\,|\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle + \quad (5.18)$$
$$+ \alpha\beta\,|\psi_2\rangle\,|\psi_1\rangle + \beta^2\,|\psi_2\rangle\,|\psi_2\rangle.$$

Ці вирази не збігаються, оскільки в другому випадку виникають перехресні члени $|\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle$ та $|\psi_2\rangle\,|\psi_1\rangle$, які відсутні в першому. Отже, саме лінійність квантової механіки призводить до суперечності з вимогою універсального клонування. Крім того, невідомий квантовий стан не можна повністю визначити внаслідок одного вимірювання, не змінивши його. Отже, сама ідея «спочатку зчитати стан, а потім відтворити його копію» втрачає фізичний зміст. Квантова інформація не існує як незалежний від носія набір класичних параметрів, які можна безперешкодно переписувати. Таким чином, заборона клонування відображає не обмеження техніки, а фундаментальну властивість квантового опису природи.

Наведене доведення має строгий математичний характер, однак повніше розуміння фізичної сутності теореми досягається за допомогою наочних інтерпретацій. Саме тому доцільно перейти від формального опису до концептуальних ілюстрацій, які дозволяють пов’язати математичний результат із фізичною інтуїцією. Наведені нижче описові ілюстрації не замінюють строгого доведення, але допомагають зрозуміти, чому клонування є неможливим не лише формально, а й на рівні загальної логіки квантових процесів.

1. Класичне та квантове копіювання. У класичній системі копіювання є відтворенням уже наявного значення. У квантовій системі довільний стан не має наперед заданого класичного опису, який можна було б просто переписати. Саме тому операція копіювання в класичному і квантовому випадках має принципово різну фізичну природу.

2. Клонування як неможлива універсальна операція. Якщо уявити пристрій, який на вхід приймає стан $|\psi\rangle$ і видає дві точні копії цього стану, то

такий пристрій повинен був би однаково працювати для всіх можливих вхідних станів: на вході – кубіт, на виході – два ідентичні кубіти. Саме ця універсальність і суперечить лінійності квантової динаміки. Теорема стверджує, що такий пристрій не може існувати для довільних станів.

3. Геометрична інтерпретація на сфері Блоха. Для одного кубіта довільний чистий стан можна подати як точку на сфері Блоха. Універсальне клонування вимагало б існування такого фізичного перетворення, яке зберігало б структуру всіх можливих станів і водночас переводило б один стан у його тензорну копію. Тобто клонування вимагало б збереження «відстаней» між усіма точками, що суперечить квантовій еволюції.

Для ілюстрації наслідків теореми про заборону клонування розглянемо характерні приклади.

1. Копіювання ортогональних станів. Нехай система може перебувати у станах: $|0\rangle, |1\rangle$. Можна побудувати операцію:

$$U\,|\,0\rangle\,|\,0\rangle = |\,0\rangle\,|\,0\rangle, \qquad U\,|\,1\rangle\,|\,0\rangle = |\,1\rangle\,|\,1\rangle. \tag{5.19}$$

Оскільки ці стани ортогональні, їх можна розрізнити без помилки, і копіювання не суперечить квантовій механіці. Отже, копіювання можливе лише для відомих або ортогональних станів.

2. Неможливість копіювання суперпозиції. Нехай система перебуває у стані

$$|\,\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0\rangle + |\,1\rangle). \tag{5.20}$$

Якби клонування було можливим, то після дії оператора мали б одержати стан

$$|\,\psi\rangle\,|\,\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\,0\rangle\,|\,0\rangle + |\,0\rangle\,|\,1\rangle + |\,1\rangle\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\,|\,1\rangle). \tag{5.21}$$

Проте лінійність оператора, який правильно копіює $|0\rangle|$ і $|1\rangle$, дає лише

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0\rangle\,|\,0\rangle + |\,1\rangle\,|\,1\rangle), \tag{5.22}$$

що не збігається з потрібним результатом. Саме це і демонструє неможливість універсального клонування.

3. Клонування і заплутаність. Нехай система перебуває у заплутаному стані:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle). \tag{5.23}$$

Спроба клонування одного фотона призвела б до створення додаткових кореляцій, що порушує лінійність квантової механіки. Тобто клонування суперечить структурі квантових кореляцій.

4. Практичний наслідок (квантова криптографія). У квантових криптографічних протоколах передавання ключа безпека ґрунтується, зокрема, на неможливості прихованого копіювання переданих квантових станів. Якщо сторонній спостерігач намагається перехопити та скопіювати квантовий стан, він неминуче порушує його. У результаті легітимні учасники обміну можуть виявити факт втручання. Саме тому теорема про заборону клонування є однією з концептуальних основ квантової криптографії

Теорема про заборону клонування належить до числа фундаментальних результатів квантової теорії інформації, оскільки встановлює принципову неможливість точного копіювання довільного невідомого квантового стану. Це твердження випливає безпосередньо з лінійності та унітарності квантової еволюції і не залежить від рівня розвитку технічних засобів. Основний зміст теореми полягає в тому, що квантова інформація не може оброблятися за тими самими правилами, що й класична. Копіювання можливе лише для спеціальних множин взаємно ортогональних станів, тоді як універсальна процедура клонування не існує. Отже, заборона клонування не є недоліком квантових систем, а відображає їхню фундаментальну специфіку. Саме ця особливість, з одного боку, накладає обмеження на квантову передачу інформації, а з іншого — створює передумови для побудови принципово нових і захищених інформаційних технологій.

Після встановлення фундаментальної неможливості клонування квантових станів природно постає питання про зворотну операцію, а саме можливість видалення квантової інформації. У класичних інформаційних системах операції копіювання та стирання є базовими і широко використовуються при обробці даних. Зокрема, дублікати інформації можуть бути створені або знищені без обмежень, що не впливають на фізичну реалізацію процесу.

У квантовому випадку ситуація суттєво відрізняється. Якщо клонування квантового стану є неможливим, виникає питання: чи можна, навпаки, видалити одну з копій квантової інформації, не впливаючи на іншу? Відповідь на це питання дає теорема про заборону видалення, яка є логічним доповненням теореми про заборону клонування і разом з нею формує симетричну структуру фундаментальних обмежень квантової інформації.

Інтуїтивно операція видалення може розглядатися як перетворення двох ідентичних квантових систем у одну систему, що зберігає початковий стан, і допоміжну систему, яка переходить у фіксований «стандартний» стан. У класичному випадку така операція є тривіальною: достатньо просто видалити зайву копію. Однак у квантовій механіці будь-яка фізично допустима еволюція повинна описуватися унітарним оператором (для замкнених систем), що накладає жорсткі обмеження на можливі перетворення. Саме тому необхідно з’ясувати, чи може існувати універсальна операція, яка здійснює видалення квантової інформації без втрати фізичної коректності опису. Таким чином, виникає питання: чи існує таке унітарне перетворення, яке для довільного стану $|\psi\rangle$ реалізує видалення однієї з двох копій цього стану?

Теорема про заборону видалення стверджує, що не існує унітарного оператора U, який для довільного квантового стану $|\psi\rangle$ виконував би перетворення

$$U(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |0\rangle, \qquad (5.24)$$

де $|0\rangle$ – фіксований стан допоміжної системи. Це означає, що універсальне видалення квантової інформації є неможливим. Математична постановка задачі виглядає так: Нехай система складається з двох підсистем, що перебувають в

однаковому стані $|\psi\rangle$. Завдання полягає в тому, щоб перетворити цей стан у $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$, тобто зберегти одну копію інформації та перевести іншу в стандартний стан. При цьому передбачається, що перетворення має бути універсальним (не залежати від конкретного стану $|\psi\rangle$) та унітарним (тобто фізично допустимим для замкненої системи).

Доведення теореми. Розглянемо два довільні нормовані стани $|\psi_1\rangle$та $|\psi_2\rangle$. Припустимо, що існує унітарний оператор (U), який здійснює видалення:

$$U(|\psi_1\rangle |\psi_1\rangle) = |\psi_1\rangle |0\rangle, \tag{5.25}$$

$$U(|\psi_2\rangle |\psi_2\rangle) = |\psi_2\rangle |0\rangle. \tag{5.26}$$

Використовуючи збереження скалярного добутку при унітарних перетвореннях, отримуємо

$$\langle\psi_1 | \psi_2\rangle^2 = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle. \tag{5.27}$$

Позначивши

$$s = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \tag{5.28}$$

маємо рівняння

$$s^2 = s. \tag{5.29}$$

Його розв’язки:

$$s = 0 \text{ або } s = 1. \tag{5.30}$$

Таким чином, видалення можливе лише для ортогональних або ідентичних станів. Для довільних неортогональних станів така операція неможлива, що й доводить теорему.

Фундаментальна причина заборони видалення полягає в унітарності квантової еволюції. Оскільки унітарні перетворення є оборотними, вони не допускають безповоротного знищення інформації. Будь-яка інформація, що «зникає» з підсистеми, повинна бути перенесена в іншу частину системи або в середовище. Таким чином, квантову інформацію не можна просто стерти, її можна лише перерозподілити між різними ступенями свободи. Це узгоджується із загальним принципом збереження інформації у квантовій механіці.

Якщо припустити існування операції видалення, то вона повинна бути оборотною. Проте з перетворення

$$|\psi\rangle\,|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle\,|0\rangle \qquad (5.31)$$

неможливо однозначно відновити початковий стан, оскільки інформація про другу копію втрачена. Це суперечить вимозі оборотності унітарної еволюції. Отже, сама структура квантової динаміки виключає можливість такої операції. Хоча доведення теореми має строгий математичний характер, її фізичний зміст стає більш зрозумілим у межах інтуїтивних моделей. З цією метою розглянемо кілька концептуальних інтерпретацій.

1. Видалення як неможлива «стискаюча» операція. Видалення передбачало б стискання двох копій інформації в одну без втрати даних, що суперечить оборотності квантових перетворень.

2. Збереження інформації. Якщо одна копія «зникає», то інформація про неї повинна залишитися десь у системі. Повне знищення інформації неможливе.

3. Симетрія з теоремою про заборону клонування. Якщо клонування заборонене через лінійність, то видалення заборонене через оборотність. Разом ці теореми підкреслюють фундаментальну особливість квантової інформації.

Для кращого розуміння фізичного змісту теореми про заборону видалення розглянемо характерні приклади.

1. Видалення ортогональних станів. Нехай система перебуває у відомих ортогональних станах:

$$|0\rangle\,|0\rangle,\quad |1\rangle\,|1\rangle. \qquad (5.32)$$

Можна виконати операцію:

$$|0\rangle\,|0\rangle \rightarrow |0\rangle\,|0\rangle,\quad |1\rangle\,|1\rangle \rightarrow |1\rangle\,|0\rangle. \qquad (5.33)$$

Тобто друга копія може бути «обнулена», якщо стан відомий або ортогональний. Отже, видалення можливе лише для обмеженого набору станів.

2. Неможливість універсального видалення. Нехай система перебуває у стані:

$$|\psi\rangle\,|\psi\rangle, \qquad |\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle. \qquad (5.34)$$

Припустимо, існує унітарна операція:

$$U \mid \psi\rangle \mid \psi\rangle = \mid \psi\rangle \mid 0\rangle. \tag{5.35}$$

Тоді для суперпозиції

$$U(\alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle)^2 \tag{5.36}$$

виникає суперечність із лінійністю квантової механіки. Тобто універсальне видалення невідомого стану неможливе.

3. Зв'язок із теоремою про клонування. Теорема про заборону видалення є «дзеркальною» до теореми про заборону клонування, а саме: клонування – не можна створити копію; видалення – не можна знищити копію. Обидві теореми випливають із лінійності квантової механіки.

4. Збереження інформації. Нехай система взаємодіє з середовищем:

$$|\psi\rangle|\psi\rangle|\mathrm{E}_0\rangle \rightarrow |\psi\rangle|0\rangle|\mathrm{E}_\psi\rangle. \tag{5.37}$$

Інформація не зникає, а переноситься у стан середовища $|\mathrm{E}_\psi\rangle$. Таким чином, квантова інформація не знищується, а лише перерозподіляється.

Теорема про заборону видалення відображає фундаментальний принцип збереження квантової інформації, згідно з яким інформація не може бути повністю знищена, а лише перерозподіляється між системою та середовищем. Вона є прямим наслідком оборотності квантової динаміки та доповнює теорему про заборону клонування. Разом ці результати демонструють, що квантова інформація підпорядковується принципово іншим законам, ніж класична. Вона не може бути довільно скопійована або знищена, що визначає як обмеження, так і унікальні можливості квантових інформаційних технологій.

Однією з основних особливостей квантової механіки є принципова обмеженість доступу до інформації про стан квантової системи. На відміну від класичних систем, де стан об'єкта може бути визначений з довільною точністю без його зміни, у квантовому випадку сам процес вимірювання невіддільно пов'язаний із впливом на систему. Це призводить до фундаментального результату: неможливості точного визначення довільного невідомого квантового стану за допомогою одного вимірювання. Даний результат не є

окремою теоремою в традиційному сенсі, а випливає з сукупності базових принципів квантової механіки, зокрема з постулатів вимірювання та властивостей квантових станів.

Розуміння цього обмеження є критично важливим для квантової теорії інформації, оскільки воно визначає межі доступної інформації та лежить в основі таких явищ, як заборона клонування, обмеження Голєво та безпека квантових криптографічних протоколів. У класичній фізиці вимірювання розглядається як пасивна процедура, яка не впливає на стан системи. Достатньо виконати вимірювання з необхідною точністю, щоб визначити всі параметри системи. У квантовій механіці ситуація є принципово іншою. Вимірювання не лише дає інформацію про систему, але й змінює її стан. Крім того, результати вимірювання мають ймовірнісний характер і не дозволяють однозначно відновити початковий стан. У зв'язку з цим виникає питання: чи існує така процедура вимірювання, яка дозволяє точно визначити довільний невідомий квантовий стан без його спотворення? Відповідь на це питання є негативною.

Для довільного невідомого квантового стану $|\psi\rangle$ не існує процедури вимірювання, яка одночасно дозволяє точно визначити всі параметри стану і не змінити цей стан у процесі вимірювання. Інакше кажучи, не існує універсального вимірювання, яке дозволяло б однозначно реконструювати невідомий квантовий стан за один акт спостереження. Нехай квантова система перебуває у стані (1.75). Вимірювання у базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ дає результати, ймовірність яких визначається як

$$P(i) = |\langle i \mid \psi \rangle|^2. \qquad (5.38)$$

де $P(i)$ – ймовірність i-того результату вимірювання.

Зокрема, результат $|0\rangle$ отримується з імовірністю $|\alpha|^2$, результат $|1\rangle$ – з імовірністю $|\beta|^2$. Після вимірювання система переходить у відповідний базисний стан $|\psi\rangle \to |0\rangle$ або $|1\rangle$, а початкова суперпозиція руйнується. Таким чином, інформація про фазу та співвідношення амплітуд втрачається. Неможливість точного вимірювання невідомого стану обумовлена трьома фундаментальними властивостями квантових систем. По-перше, результати

вимірювання мають ймовірнісний характер. Окремий результат не несе повної інформації про стан, а лише відображає одну з можливих реалізацій. По-друге, вимірювання є незворотним процесом, який змінює стан системи. Початкова суперпозиція руйнується, і відновити її з результату вимірювання неможливо. По-третє, квантовий стан не є безпосередньо спостережуваною величиною. Експериментально доступними є лише значення спостережуваних фізичних величин, які відповідають певним операторам.

У квантовій механіці спостережувані фізичні величини описуються ермітовими операторами. У загальному випадку такі оператори не комутують:

$$[A, B] \neq 0, \qquad (5.39)$$

де $[A, B]$ – комутатор операторів; A і B – оператори спостережуваних величин. Це означає, що відповідні фізичні величини не можуть бути одночасно виміряні з довільною точністю, тобто неможливо одночасно точно виміряти всі параметри стану Вибір вимірювального базису визначає, яка частина інформації про стан стає доступною, а яка – втрачається. Отже, повна реконструкція квантового стану можлива лише на основі статистичної обробки результатів багатьох вимірювань над ансамблем однаково підготовлених систем (квантова томографія), але не для одного окремого екземпляра.

Наведений формальний опис відображає строгі межі процесу вимірювання. Однак їх фізичний зміст стає більш наочним при використанні інтуїтивних моделей. У цьому контексті доцільно розглянути такі інтерпретації.

1. Вимірювання як вибір одного результату. Квантовий стан містить множину потенційних результатів, але вимірювання реалізує лише один із них, втрачаючи інформацію про інші можливості.

2. Руйнування суперпозиції. Суперпозиція станів переходить в один конкретний базисний стан, що призводить до втрати фазової інформації.

3. Залежність результату від базису. Результат вимірювання визначається вибором вимірювального базису, що підкреслює залежність доступної інформації від процедури вимірювання.

Для ілюстрації обмежень, пов'язаних із вимірюванням квантових станів, розглянемо характерні приклади.

1. Вимірювання кубіта в одному базисі. Нехай стан кубіта:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle.$$

Вимірювання в базисі $|0\rangle, |1\rangle$ дає результат: $|0\rangle$ з імовірністю $|\alpha|^2$, $|1\rangle$ з імовірністю $|\beta|^2$. Після вимірювання стан переходить у відповідний базисний стан. Отже, одне вимірювання не дозволяє визначити коефіцієнти α і β.

2. Необхідність статистичних вимірювань. Щоб оцінити параметри стану, необхідно багато однакових копій $|\psi\rangle^{\otimes N}$. Тоді статистика результатів дозволяє наближено відновити $|\alpha|^2$ і $|\beta|^2$. Висновок: квантовий стан не можна визначити за одне вимірювання – потрібен ансамбль.

3. Вимірювання в різних базисах. Якщо вимірювати стан у різних базисах (наприклад, $|0\rangle, |1\rangle$ та $|+\rangle, |-\rangle$), можна отримати більше інформації. Однак кожне вимірювання руйнує стан і змінює подальші результати. Таким чином, повна реконструкція стану потребує серії незалежних підготовок.

4. Неможливість точного визначення стану. Нехай існує вимірювання, яке визначає стан $|\psi\rangle \to (\alpha, \beta)$. Це дозволило б повністю відновити стан, створити копії і обійти теорему про клонування. Однак це суперечить фундаментальним принципам квантової механіки.

5. Квантова томографія. На практиці стан відновлюється через томографію, зокрема виконуються вимірювання у різних базисах, збирається статистика, реконструється матриця густини ρ. Тобто можливе лише наближене відновлення стану, а не точне вимірювання одного екземпляра.

Неможливість точного вимірювання довільного невідомого квантового стану є фундаментальною властивістю квантової механіки. Вона є прямим наслідком ймовірнісної природи вимірювань, незворотності їх результатів та обмеженості інформації, яку можна отримати з одного квантового об'єкта. Це обмеження визначає межі доступної інформації про квантову систему та відіграє ключову роль у формуванні сучасної квантової теорії інформації. Разом із

теоремами про заборону клонування та видалення воно формує цілісну систему обмежень, що визначають можливості та межі квантової обробки інформації.

5.2. Нерозрізнюваність неортогональних станів та збурення при вимірюванні

Однією з фундаментальних особливостей квантової механіки є принципова неможливість повного визначення стану квантової системи за допомогою одного вимірювання. На відміну від класичних систем, де стан може бути визначений із довільною точністю, у квантовому випадку існують обмеження, які мають не технічний, а принциповий характер. Ці обмеження проявляються у двох тісно пов'язаних явищах: ***1. нерозрізнюваність неортогональних станів; 2. неминуче збурення стану при вимірюванні.***

Разом вони формують основу квантової теорії інформації, визначаючи, яку інформацію можна отримати і якою ціною. Центральну роль у цьому контексті відіграє нерозрізнюваність неортогональних станів і пов'язане з нею збурення, яке виникає під час вимірювання. Ці явища лежать в основі багатьох фундаментальних і прикладних результатів квантової теорії інформації від заборони клонування до безпеки квантової криптографії. Вони демонструють, що отримання інформації про квантову систему неминуче змінює її стан, і що ця зміна не може бути довільно малою. Для формального аналізу необхідно розглянути математичний опис квантових станів, процес вимірювання та критерії розрізнення станів. Це дозволить встановити строгі межі на точність розпізнавання і кількісно описати збурення системи.

Квантові стани системи описуються векторами $|\psi\rangle$ у гільбертовому просторі Ĥ або, у більш загальному випадку, матрицею густини ρ. Нехай маємо два чисті стани $|\psi\rangle$ та $|\phi\rangle$. Їх скалярний добуток $\langle\psi|\phi\rangle$ характеризує ступінь «подібності» цих станів. Якщо $\langle\psi|\phi\rangle = 0$, стани є ортогональними і можуть бути ідеально розрізнені. Якщо ж $\langle\psi|\phi\rangle \neq 0$, то стани називаються неортогональними, і їх точне розрізнення неможливе. Ортогональність означає повну відмінність квантових станів, тобто вони відповідають взаємовиключним

результатам вимірювання. Неортогональні стани «перекриваються», їх статистики частково збігаються і виникає фундаментальна невизначеність. Цей факт є одним із найважливіших у квантовій теорії. Він свідчить, що жодна процедура вимірювання не дозволяє з ймовірністю 1 визначити, який саме неортогональний стан було підготовлено.

Щоб формалізувати задачу розрізнення, введемо два стани ρ_1 і ρ_2, які виникають із апріорними ймовірностями p_1 і p_2. Вимірювання описується позитивно-операторнозначною мірою (POVM):

$$\{E_1, E_2\}, \quad E_1 + E_2 = I, \tag{5.40}$$

де $E_i \geq 0$ – оператори ефектів; I – одиничний оператор.

Ймовірність правильного розрізнення:

$$P_{\text{прав.}} = p_1 Tr(\, E_1\rho_1) + p_2 Tr(E_2\rho_2). \tag{5.41}$$

Виникає основне питання: якою є максимально можлива точність такого розрізнення. Відповідь на це питання дає фундаментальний результат квантової теорії інформації – межа Гельстрома, яка встановлює оптимальну стратегію та граничну ймовірність правильної ідентифікації станів.

Максимальна ймовірність розрізнення задається формулою Гельстрома:

$$P_{max} = \frac{1}{2}(1 + \| \, p_1\rho_1 - p_2\rho_2 \, \|_1) = \frac{1}{2}(1 + \| \, A \, \|_1), \tag{5.42}$$

де $A = p_1\rho_1 - p_2\rho_2$ – загальний оператор; $\| \, A \, \|_1 = Tr\sqrt{A^\dagger A} = \, Tr\sqrt{(p_1\rho_1 - p_2\rho_2)^\dagger (p_1\rho_1 - p_2\rho_2)}$ – трасова норма; $\| \, p_1\rho_1 - p_2\rho_2 \, \|_1$ – це міра «відстані» між станами. Вона визначає максимально можливу інформацію. Цей результат показує, що точність розрізнення обмежена перекриттям станів. Якщо стани ортогональні, то $\| \, p_1\rho_1 - p_2\rho_2 \, \|_1 = 1$ і $P_{max} = 1$. Якщо ж вони збігаються, тобто $\rho_1 = \rho_2$, то $\| \, p_1\rho_1 - p_2\rho_2 \, \|_1$ – мала і $P_{max} = {}^1\!/_2$, тобто розрізнення неможливе.

Хоча формула Гельстрома має загальний характер і може бути застосована до довільних квантових станів, для глибшого розуміння її фізичного змісту доцільно розглянути спеціальний, але надзвичайно показовий випадок чистих

станів. У цьому випадку вираз суттєво спрощується і дозволяє безпосередньо простежити залежність точності розрізнення від перекриття станів. Для чистих станів: $|\psi\rangle$, і $|\phi\rangle$

$$P_{max} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4p_1p_2\,|\langle\psi|\phi\rangle|^2}\,\right). \tag{5.43}$$

Видно, що чим більше перекриття, тим гірше розрізнення. Якщо $|\langle\psi|\phi\rangle| = 0$, то $P_{max} = 1$.

Переходячи від задачі розрізнення до аналізу вимірювання, необхідно врахувати, що будь-яке вимірювання не лише витягує інформацію, але і змінює стан системи. У загальному випадку квантовий канал (включаючи вимірювання) описується операторною сумою:

$$E(\rho) = \sum_a E_a \rho E_a^\dagger, \tag{5.44}$$

де E_a – оператори Крауса; $\sum_a E_a^\dagger E_a = I$.

Цей вираз описує еволюцію стану під дією вимірювання або шуму. Якщо результат вимірювання a відомий, то стан колапсує, тобто

$$\rho \to \rho_a = \frac{E_a \rho E_a^\dagger}{Tr(E_a \rho E_a^\dagger)}. \tag{5.45}$$

Це і є ***збурення стану***. Таким чином, вимірювання не лише дає інформацію, але й змінює стан системи. Це підводить до фундаментального принципу, який лежить в основі квантової теорії інформації, і полягає в тому, що між кількістю отриманої інформації та ступенем збурення системи існує невід'ємний зв'язок. Звідси випливає, що при вимірюванні слід дотримуватися компромісу між отриманням інформації та збуренням, оскільки чим точніше ми намагаємося розрізнити стани, тим сильніше збурюємо систему. Це формалізується через різні нерівності «інформація–збурення»: більше інформації → більше збурення. Тобто якщо вимірювання нічого не змінює, воно нічого не дізнається, якщо воно розрізняє стани, то воно їх змінює. Ідея компромісу між інформацією та збуренням є інтуїтивно зрозумілою, однак для її строгого аналізу необхідно ввести кількісні характеристики. Це дозволяє

перейти від якісного опису до математично визначених величин, які вимірюють ступінь зміни стану системи. Одним із способів кількісної оцінки збурення є відстань між початковим і кінцевим станом. Наприклад, можна використовувати фіделіті (точність):

$$F(\rho,\sigma) = \left(Tr\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}\right)^2. \qquad (5.46)$$

Якщо $F = 1$, то стани збігаються; якщо $F < 1$, то відбулося збурення. Важливим результатом є те, що ідеальне розрізнення неортогональних станів призвело б до суперечностей із фундаментальними принципами квантової механіки, зокрема до можливості надсвітлової передачі інформації. Саме тому нерозрізнюваність є необхідною умовою узгодженості теорії.

Переходячи до більш глибокого аналізу, розглянемо альтернативні стратегії розрізнення. Окрім мінімізації помилки (критерій Гельстрома), існує стратегія безпомилкового розрізнення (unambiguous discrimination). У цьому випадку допускається невизначений результат, але якщо результат отримано, він є точним. Для неортогональних станів така стратегія можлива, але з ненульовою ймовірністю «відмови». Це демонструє, що квантова механіка дозволяє різні компроміси між точністю та повнотою інформації.

Введення кількісних мір збурення дозволяє не лише описати окремі процеси вимірювання, але й виявити глибші зв’язки з фундаментальними обмеженнями квантової теорії. Зокрема, ці результати тісно пов’язані з такими базовими теоремами, як заборона клонування та обмеження на передачу інформації. Якщо б неортогональні стани можна було ідеально розрізнити, їх можна було б клонувати, що суперечить квантовій теорії. Таким чином, нерозрізнюваність і неклонованість є тісно пов’язаними властивостями.

Фундаментальні висновки, що випливають із нерозрізнюваності станів, мають не лише концептуальне значення, але й безпосередні практичні наслідки. Особливо яскраво це проявляється у квантовій криптографії, де ці принципи використовуються для забезпечення інформаційної безпеки. У протоколах типу BB84 інформація кодується у взаємно-незміщених базисах, що забезпечує

неможливість непомітного перехоплення. Будь-яка спроба вимірювання призводить до збурення, яке може бути виявлене.

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо приклади.

1. Два неортогональні стани кубіта.

$$|\psi\rangle = |0\rangle, \quad |\phi\rangle = cos\theta\,|0\rangle + sin\theta\,|1\rangle. \tag{5.47}$$

Якщо $\theta \neq {}^{\pi}/_{2}$, то стани неортогональні і не можуть бути ідеально розрізнені.

2. Квантове вимірювання. Проєктивне вимірювання у базисі $|0\rangle, |1\rangle|$ збурює суперпозицію.

3. Криптографія. У протоколі BB84 вимірювання у неправильному базисі дає випадковий результат і змінює стан.

Нерозрізнюваність неортогональних станів і збурення при вимірюванні є фундаментальними властивостями квантових систем. Вони визначають межі отримання інформації і лежать в основі сучасної квантової теорії інформації. Отже, неортогональні стани не можуть бути ідеально розрізнені, будь-яке вимірювання змінює стан системи, існує компроміс між інформацією і збуренням. Ці принципи мають як фундаментальне, так і прикладне значення, визначаючи можливості та обмеження квантових технологій.

5.3. Принцип причинності та межа Голєво для пропускної здатності каналів

У сучасних теоріях передавання інформації як класичних, так і квантових, фундаментальну роль відіграють обмеження, які накладає сама природа. Два з таких обмежень – це принцип причинності та межа Голєво. Перший гарантує узгодженість подій у просторі-часі, а другий визначає максимально можливу кількість класичної інформації, яку можна передати квантовим каналом. Розуміння цих понять є критично важливим для розвитку телекомунікацій, криптографії та квантових технологій. Щоб глибше усвідомити, як формуються обмеження на пропускну здатність каналів зв’язку, спочатку розглянемо

фундаментальний фізичний принцип причинності, а далі перейдемо до його відображення в інформаційній теорії через межу Голєво.

Принцип причинності стверджує, що причина завжди передує наслідку, і жодна інформація не може передаватися швидше за швидкість світла у вакуумі. У рамках теорія відносності це означає, що існує світловий конус, який обмежує можливі причинно-наслідкові зв'язки між подіями. Це має безпосередній вплив на канали зв'язку, зокрема: інформація не може бути передана миттєво; будь-який сигнал має скінченну швидкість поширення; синхронізація систем обмежена фізичними законами. Ці обмеженні визначають сутність теореми про неможливість надсвітлової передачі інформації. Ця теорема встановлює, що жодні локальні операції, виконані над однією частиною складеної квантової системи, не впливають на статистичні характеристики іншої підсистеми. Таким чином, фізичний принцип причинності отримує точне математичне обґрунтування, яке випливає з властивостей квантових станів та лінійності квантових перетворень. Дана теорема має фундаментальне значення, оскільки забезпечує узгодженість квантової механіки зі спеціальною теорією відносності та визначає межі використання квантових кореляцій у процесах передачі інформації.

Інтуїтивно може здаватися, що заплутані стани дозволяють миттєво передавати інформацію між віддаленими системами. Дійсно, вимірювання однієї з підсистем заплутаної пари призводить до визначення стану іншої підсистеми незалежно від відстані між ними. Однак ключове питання полягає в тому, чи можна використати цей ефект для керованої передачі інформації. Іншими словами, чи може один спостерігач (наприклад, Аліса) впливати на результати вимірювань іншого спостерігача (Боба) таким чином, щоб передати повідомлення безпосередньо через квантову заплутаність? Відповідь на це питання дає теорема про неможливість надсвітлової передачі.

Теорема про неможливість надсвітлової передачі стверджує, що жодні локальні операції, виконані над однією частиною квантової системи, не можуть змінити статистичні результати вимірювань, виконаних над іншою, просторово

віддаленою частиною цієї системи. Інакше кажучи, квантова заплутаність не може бути використана для передачі інформації безпосередньо між віддаленими системами.

Для формального аналізу розглянемо складену квантову систему, що складається з двох підсистем A і B. Стан такої системи описується матрицею густини ρ_{AB}. Стан підсистеми B визначається редукованою матрицею густини, яка отримується шляхом часткового сліду по підсистемі A:

$$\rho_B = Tr_A(\rho_{AB}), \tag{5.48}$$

де ρ_B – редукований стан підсистеми B; Tr_A – частковий слід по підсистемі A. Ця величина повністю визначає результати будь-яких вимірювань, що виконуються над підсистемою B. Нехай над підсистемою A виконується довільна локальна квантова операція, яка описується повністю позитивним трасозберігаючим відображенням $\mathcal{E}_A$. Тоді стан всієї системи переходить у

$$\rho_{AB} \to \rho'_{AB} = (\mathcal{E}_A \otimes I_B)(\rho_{AB}), \tag{5.49}$$

де $\mathcal{E}_A$ – локальна квантова операція; I_B – тотожний оператор у просторі підсистеми B.

Будь-яку квантову операцію $\mathcal{E}_A$ можна представити у формі операторів Крауса:

$$\mathcal{E}_A(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger, \tag{5.50}$$

де оператори Клауса E_i задовольняють умову трасозбереження:

$$\sum_i E_i \rho E_i^\dagger = I. \tag{5.51}$$

Тоді глобальний стан набуває вигляду:

$$\rho'_{AB} = \sum_i (E_i \otimes I_B)\rho_{AB}\left(E_i^\dagger \otimes I_B\right). \tag{5.52}$$

Редукований стан підсистеми B після цієї операції:

$$\rho'_B = Tr_A(\rho'_{AB}) = \sum_i Tr_A\left[(E_i \otimes I_B)\rho_{AB}(E_i^\dagger \otimes I_B)\right]. \tag{5.53}$$

Використовуючи властивості часткового сліду та циклічність сліду, а також те, що оператори E_i діють лише на підсистему А, отримуємо:

$$\rho'_B = Tr_A\left[\rho_{AB}\sum_i E_i E_i^\dagger \otimes I_B\right]. \tag{5.54}$$

В кінцевому рахунку маємо:

$$\rho'_B = Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B, \tag{5.55}$$

тобто локальні операції над підсистемою А не змінюють стан підсистеми В. Отриманий результат означає, що всі статистичні характеристики вимірювань, виконаних над підсистемою В, визначаються лише її редукованим станом ρ_B і не залежать від локальних операцій, виконаних над підсистемою А. Отже, жодні локальні дії в підсистемі А не можуть бути виявлені спостерігачем у підсистемі В без додаткового обміну класичною інформацією. Таким чином, квантові кореляції не можуть бути використані для передачі сигналів. Саме це і є основа заборони надсвітлового зв'язку.

Для ілюстрації причинного характеру квантових кореляцій розглянемо характерні приклади.

1. Заплутаний стан Белла. Розглянемо дві підсистеми, що перебувають у заплутаному стані Белла. Незалежно від того, які локальні операції або вимірювання виконуються над підсистемою А, редукований стан підсистеми В залишається незмінним. Отже, результати вимірювань у В мають ту саму статистику, що й до виконання операцій над А.

2. Вибір базису вимірювання. Нехай спостерігач А обирає різні базиси вимірювання: $|H\rangle, |V\rangle$ і $|+\rangle, |-\rangle$. Незважаючи на цей вибір, статистика результатів у системі В залишається незмінною. Отже, вибір базису не може бути використаний для передачі сигналу.

3. Випадковість результатів. Результати вимірювань у підсистемі В:

$$P(H) = P(V) = \frac{1}{2}. \tag{5.56}$$

Ці результати є випадковими і не містять інформації про дії у підсистемі А. Висновок: кореляції існують, але не несуть керованої інформації.

4. Роль класичного каналу. Щоб виявити кореляції, необхідно передати результати вимірювань класичним каналом і порівняти їх. Тобто будь-яка передача інформації обмежена швидкістю світла.

Теорема про неможливість надсвітлової передачі інформації встановлює фундаментальне обмеження квантової теорії: локальні операції не можуть впливати на статистичні властивості віддалених підсистем. Цей результат забезпечує узгодженість квантової механіки з принципом причинності та виключає можливість використання квантових кореляцій для передачі інформації зі швидкістю, що перевищує швидкість світла. Таким чином, квантова нелокальність проявляється у вигляді кореляцій, але не призводить до порушення причинно-наслідкових зв'язків.

Логічно переходячи до теорії інформації, можна сказати, що причинність задає фундаментальну «верхню межу» швидкості передачі сигналів, але не визначає, скільки інформації можна закодувати в цих сигналах. Визначення кількості класичної інформації, яку можна отримати з квантової системи є одним із основних питань квантової теорії інформації. Класична теорія інформації, заснована на роботах Клода Шеннона, встановлює фундаментальні межі передачі інформації в умовах шуму та обмежених ресурсів. Центральним поняттям цієї теорії є пропускна здатність каналу, яка визначає максимальну кількість інформації, що може бути передана через канал за одиницю часу або за одне використання каналу з довільно малою ймовірністю помилки. У теорії інформації Шеннона пропускна здатність визначається як максимальне значення взаємної інформації між вхідними та вихідними повідомленнями:

$$\mathrm{C} = \max_{\mathrm{p(x)}} \mathrm{I}\,(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}), \qquad (5.57)$$

де C – класична пропускна здатність каналу; X – вхідні повідомлення; Y – вихідні повідомлення; p(x) – розподіл ймовірностей на вході; $I(X;Y)$ – взаємна інформація між вхідним і вихідним сигналами; $max_{p(x)}$означає, що шукається найбільше можливе значення взаємної інформації серед усіх допустимих розподілів вхідних сигналів. Взаємна інформація $I(X;Y)$ показує, скільки

інформації про вхідний сигнал X можна отримати, спостерігаючи вихідний сигнал Y. Якщо вихід точно відтворює вхід, тобто $Y = X$, то взаємна інформація максимальна. Якщо ж вихід зовсім не пов'язаний із входом, тобто $P(Y \mid X) = P(Y)$, то $I(X;Y) = 0$. У цьому випадку канал взагалі не передає інформацію.

У квантових каналах ситуація аналогічна. Якщо квантовий канал зашумлений або відбувається декогеренція, то зв'язок між переданим і отриманим квантовими станами слабшає. Взаємна інформація між відправником (Алісою) та отримувачем (Бобом) зменшується: $I(A;B)\downarrow$. Відповідно зменшується і пропускна здатність каналу. Тому формула (5.57) визначає фундаментальну межу швидкості передачі інформації через класичний або квантовий канал зв'язку. Вона показує, яку максимальну кількість бітів інформації можна передати за одне використання каналу за оптимального кодування повідомлень.

У квантовій теорії інформації аналогічні задачі набувають нових особливостей, пов’язаних із природою квантових станів, їх еволюцією та процесом вимірювання. Зокрема, квантові канали підпорядковуються додатковим обмеженням, які відсутні в класичній теорії. У квантовому випадку канал описується як перетворення квантових станів, що значно ускладнює аналіз. Крім того, у квантових системах необхідно розрізняти передачу класичної інформації через квантові канали і передачу власне квантової інформації (квантових станів). Це призводить до появи різних типів пропускної здатності та відповідних обмежень.

На перший погляд може здатися, що квантовий стан, який описується неперервними параметрами, здатний містити довільно великий обсяг інформації. Проте результати вимірювання мають дискретний характер, що накладає обмеження на обсяг доступної інформації. Це обмеження формалізується у вигляді межі (теореми) Голєво, яка встановлює верхню межу на кількість класичної інформації, що може бути отримана з квантового ансамблю станів. Теорема Голєво відіграє фундаментальну роль у квантовій теорії інформації,

оскільки визначає пропускну здатність квантових каналів при передачі класичної інформації.

Розглянемо ситуацію, коли класична інформація кодується у квантових станах. Нехай джерело генерує повідомлення x з імовірністю p_i, і кожному повідомленню відповідає квантовий стан ρ_i. У такому випадку маємо квантовий ансамбль $\{p_i, \rho_i\}$. Приймач отримує квантову систему та виконує вимірювання з метою відновлення переданої інформації. Проте, як було показано у попередніх підрозділах, вимірювання не дозволяє отримати повну інформацію про стан системи. У зв'язку з цим виникає питання: яка максимальна кількість класичної інформації може бути витягнута з такого квантового ансамблю? Відповідь на це питання дає теорема Голєво. Теорема Голєво стверджує, що взаємна інформація між класичним повідомленням x і результатами вимірювання не перевищує деяку величину χ, тобто

$$I(X;Y) \leq \chi, \tag{5.58}$$

де χ – межа Голєво, яка визначається як

$$\chi = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i), \tag{5.59}$$

де p_i – ймовірність вибору стану ρ_i; $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ – середній стан ансамблю; $S(\rho)$ – ентропія фон Неймана, яка визначається як

$$S(\rho) = -Tr(\rho log \rho), \tag{5.60}$$

де Tr – слід матриці. Величина χ називається ***інформацією Голєво*** і задає верхню межу доступної класичної інформації. Сутність цієї межі полягає в тому, що навіть, якщо квантова система може містити величезну кількість інформації (через суперпозицію), обсяг класичної інформації, доступної для вимірювання є обмеженим. Зокрема це означає наступне: квантовий стан не дозволяє витягнути більше інформації, ніж визначено величиною χ; доступна інформація залежить не лише від самих станів ρ_i, але й від їх імовірностей p_i; процес вимірювання неминуче обмежує кількість інформації, яку можна отримати. Таким чином, пропускна здатність квантового каналу для класичної інформації визначається не лише властивостями каналу, але й структурою квантових станів. Таким

чином, квантові системи не можуть використовуватися для довільного збільшення пропускної здатності каналів передачі класичної інформації. Важливо зрозуміти, як ця межа співвідноситься з принципом причинності. Причинність обмежує швидкість передачі інформації, тоді як межа Голєво – її «щільність» у квантових станах. Разом вони формують фундаментальні межі: причинність визначає, коли інформація може бути передана, а межа Голєво визначає скільки інформації можна витягти з квантового носія. Це означає, що навіть при використанні квантових каналів неможливо передавати інформацію швидше за світло і витягнути більше класичної інформації, ніж дозволяє χ.

Ентропія фон Неймана $S(\rho)$ є квантовим аналогом ентропії Шеннона і характеризує ступінь невизначеності квантового стану. Величина χ може бути інтерпретована як різниця між загальною невизначеністю середнього стану і середньою невизначеністю окремих станів ансамблю. Ця різниця визначає максимальну кількість інформації, яку можна отримати про класичне повідомлення.

Таким чином, пропускна здатність квантового каналу для класичної інформації визначається не лише властивостями каналу, але і структурою квантових станів. Окрім передачі класичної інформації, квантові канали можуть використовуватися для передачі квантових станів. Відповідна пропускна здатність називається квантовою і позначається Q. Вона визначає максимальну швидкість передачі квантової інформації з довільно малою похибкою. Квантова пропускна здатність залежить від ступеня шуму каналу, можливості корекції помилок, збереження когерентності.

Основні відмінності між класичними та квантовими каналами можна сформулювати так:

1. Доступність інформації.У класичних системах інформація може бути повністю зчитана, тоді як у квантових – обмежена вимірюванням.

2. Копіювання інформації. У класичних каналах можливе довільне копіювання сигналу, тоді як у квантових – воно заборонене (теорема про заборону клонування).

3. Роль шуму. У квантових каналах шум призводить не лише до помилок, але й до втрати когерентності.

4. Типи інформації. Квантові канали дозволяють передавати як класичну, так і квантову інформацію.

Для більш глибокого розуміння розглянемо кілька інтуїтивних інтерпретацій.

1. Канал як обмежений ресурс. Будь-який канал має максимальну пропускну смугу, яка не може бути перевищена навіть при ідеальному кодуванні.

2. Квантові обмеження як додатковий фільтр. У квантових системах обмеження виникають не лише через шум, але й через фундаментальні властивості вимірювання.

3. Відмінність між інформацією та станом. Квантовий стан може містити більше інформації, ніж можна витягнути через вимірювання.

Для порівняння класичних і квантових обмежень на передачу інформації розглянемо характерні приклади.

1. Класичний канал Шеннона. Нехай джерело передає біт $X \in \{0,1\}$ через канал із шумом. Ймовірність помилки p. Взаємна інформація:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y),$$

де $H(X)$ – ентропія Шеннона; $H(X \mid Y)$ – умовна ентропія випадкової величини X за умови, що відома величина Y. Вона показує, скільки «невідомого» про X залишається після врахування інформації про Y. Даний вираз показує, наскільки зменшується невизначеність про X, коли ми знаємо Y.

Пропускна здатність каналу:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

Висновок: у класичному випадку інформація визначається статистикою сигналів.

2. Ідеальний квантовий канал. Якщо передається ортогональний базис $|0\rangle$, $|1\rangle$, то можна передати 1 біт інформації без помилки. І квантовий канал поводиться як класичний.

3. Неортогональні квантові стани. Нехай передаються стани:

$$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \qquad \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0. \tag{5.61}$$

Їх неможливо точно розрізнити, тому виникає невизначеність, зменшується доступна інформація. Висновок: квантова пропускна здатність обмежена неортогональністю станів.

4. Квантові переваги (надщільне кодування). Використовуючи заплутаність, можна передати 2 біти інформації за допомогою 1 кубіта. Висновок: квантові кореляції дозволяють перевищити класичні схеми кодування.

Теорема Голєво встановлює фундаментальне обмеження на кількість класичної інформації, яку можна отримати з квантової системи. Вона показує, що квантові стани не дозволяють довільного збільшення інформаційної ємності, незважаючи на їх неперервну природу. Цей результат органічно вписується в загальну структуру фундаментальних обмежень квантової інформації. Він узгоджується з іншими базовими обмеженнями квантової інформації, такими як неможливість точного вимірювання та заборона клонування. Разом вони формують цілісну картину обмежень квантової передачі інформації. Теорема Голєво відіграє ключову роль у теорії квантових каналів і визначає фундаментальні межі ефективності квантових комунікаційних систем.

Для кращого розуміння розглянемо інтуїтивні інтерпретації.

1. Квантовий стан як «надлишково закодована» інформація. Хоча стан описується неперервними параметрами, вимірювання дозволяє отримати лише обмежену кількість інформації.

2. Втрата інформації при вимірюванні. Частина інформації, закодованої в квантовому стані, стає недоступною після вимірювання.

3. Обмеження пропускної здатності. Квантовий канал не дозволяє передати більше класичної інформації, ніж визначено межею Голєво.

Для пояснення обмежень на передачу класичної інформації через квантові системи розглянемо характерні приклади.

1. Передача класичної інформації через кубіт. Нехай відправник кодує інформацію у станах: $|\psi 1\rangle$ і $|\psi 2\rangle$. Навіть якщо ці стани неперервні, результат вимірювання дає обмежену кількість інформації. Тобто один кубіт не може передати більше одного біта класичної інформації. Це узгоджується з межею Голєво.

2. Ортогональні стани. Якщо стани ортогональні, то $\langle\psi 1 | \psi 2\rangle = 0$, і їх можна розрізнити без помилки. У цьому випадку передається повний класичний біт інформації і квантова система поводиться аналогічно класичній.

3. Неортогональні стани. Якщо $\langle\psi 1 | \psi 2\rangle \neq 0$, то стани неможливо точно розрізнити. Виникає фундаментальне обмеження на кількість інформації, яку можна отримати. Доступна інформація менша за максимальну.

4. Узагальнений випадок (матриця густини). Нехай передається ансамбль станів $\{p_i, \rho_i\}$. Середній стан:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i \,. \tag{5.62}$$

Кількість доступної інформації обмежена величиною:

$$\chi = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i). \tag{5.63}$$

Це і є межа Голєво.

5. Фізичний зміст обмеження. Навіть якщо квантовий стан містить багато параметрів, доступна інформація визначається ентропією і статистикою вимірювань. Висновок: квантова система не дозволяє передати довільно багато класичної інформації.

Порівняння класичної теорії інформації Шеннона з квантовою теорією інформації демонструє, що квантові канали підпорядковуються більш жорстким інформаційним обмеженням, ніж класичні. Ці обмеження пов’язані з природою квантових станів, процесом вимірювання та неможливістю довільного копіювання інформації. Однак наявність заплутаності дозволяє реалізовувати режими передачі, недоступні класичним системам. Таким чином, квантова теорія інформації не лише узагальнює класичну теорію Шеннона, але й встановлює нові

фундаментальні межі передачі інформації, що визначають сучасні квантові технології.

5.4. Ентропійні співвідношення невизначеності

У класичній фізиці невизначеність вимірювання пов’язана виключно з недостатністю знань про систему або технічними обмеженнями експерименту. Проте в рамках квантової механіки невизначеність має принциповий характер і закладена у самій структурі теорії.. Традиційно ця ідея формалізується через співвідношення невизначеності Гейзенберга, яке встановлює обмеження на одночасну точність вимірювання несумісних спостережень. Однак у квантовій теорії інформації більш природною мірою невизначеності виступає ентропія, що дозволяє сформулювати узагальнені та більш універсальні співвідношення. Для побудови ентропійних співвідношень невизначеності необхідно поєднати апарат квантових вимірювань із поняттями інформаційної ентропії. Це дозволяє перейти від операторного опису невизначеності до її кількісної оцінки у термінах інформації.

Нехай квантова система описується станом ρ, який у загальному випадку є матрицею густини. Це означає, що ρ є додатно визначеним оператором у гільбертовому просторі і задовольняє умову нормування:

$$Tr(\rho) = 1, \tag{5.64}$$

де Tr означає слід оператора. Такий опис дозволяє враховувати як чисті стани ($\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$), так і змішані. Для кількісної характеристики невизначеності використовується ентропія фон Неймана, яка визначається як:

$$S(\rho) = -Tr(\rho log_2 \rho), \tag{5.65}$$

де $S(\rho)$ – ентропія фон Неймана; ρ – матриця густини квантової системи; $log_2\rho$ – матричний логарифм матриці густини; Tr – операція сліду матриці, тобто сума її діагональних елементів. Основа логарифма 2 відповідає вимірюванню інформації в бітах. Ентропія фон Неймана є природним узагальненням ентропії Шеннона на квантовий випадок і характеризує ступінь невизначеності або змішаності квантового стану. У класичній теорії інформації

стан системи задається набором ймовірностей p_i. У квантовій механіці повна інформація про систему міститься в матриці густини ρ. Тому саме через матрицю густини визначається квантова ентропія. Нульова ентропія ($S(\rho) = 0$) означає, що стан відомий повністю і не містить статистичної невизначеності. Якщо $S(\rho) = 1$, то ентропія дорівнює одному біту. Це означає, що система перебуває в одному з двох можливих станів з однаковими ймовірностями і містить максимальну невизначеність.

Таким чином, ентропія фон Неймана є основною мірою невизначеності квантового стану. Вона дорівнює нулю для чистих станів і набуває додатних значень для змішаних станів. Чим більша ентропія, тим меншою є інформація про точний стан квантової системи. У теорії відкритих квантових систем ентропія фон Неймана використовується для кількісного опису декогеренції, втрати квантової когерентності та ступеня заплутаності між системою і середовищем.

Нехай проводиться вимірювання величини X, що відповідає ортонормованому базису $\{| x_i\rangle\}$. Тоді ймовірності результатів описуються класичним розподілом ймовірностей

$$p_i = \langle x_i \mid \rho \mid x_i \rangle. \tag{5.66}$$

Відповідна невизначеність визначається ентропією Шеннона $H(X)$:

$$H(X) = -\sum_i p_i log_2 p_i. \tag{5.67}$$

Отже, квантове вимірювання переводить квантову невизначеність у класичну, і саме ця обставина дозволяє сформулювати ентропійні співвідношення невизначеності. На відміну від стандартного співвідношення Гейзенберга, яке залежить від дисперсій, ентропійний підхід є більш універсальним, оскільки не прив’язаний до конкретних операторів типу координати та імпульсу.

Переходячи далі, розглянемо дві вимірювані величини X і Z, які мають власні базиси $\{| x_i\rangle\}$ та $\{| z_j\rangle\}$. Тут $| x_i\rangle$ – це власні стани оператора X; $| z_j\rangle$ – власні стани оператора Z; індекси i та j нумерують можливі результати

вимірювання. Наприклад, Z може відповідати проєкції спіну на вісь z, а X – проєкції спіну на вісь x. Після вимірювання величини X отримується набір ймовірностей

$$p_i = P(x_i).$$

Для нього за виразом (5.67) можна обчислити ентропію Шеннона $H(X)$. Аналогічно для величини Z можна обчислити ентропію Шеннона $H(Z)$. Основний результат у цьому контексті – це співвідношення Маассена–Уффінка, яке має вигляд:

$$H(X) + H(Z) \geq -2log_2 c, \qquad (5.68)$$

де $c = \max_{i,j} |\langle xi \mid zj \rangle|$.

Величина $\langle xi \mid zj \rangle$ є скалярним добутком двох базисних векторів. Вона показує, наскільки власний стан одного оператора подібний до власного стану іншого оператора: якщо $|\langle x_i \mid z_j \rangle| = 1$, то вектори збігаються; якщо $|\langle x_i \mid z_j \rangle| = 0$, то вони ортогональні.

Таким чином, $c = \max_{i,j} |\langle xi \mid zj \rangle|$ характеризує максимальну схожість між двома базисами.

Співвідношення Маассена–Уффінка показує, що неможливо одночасно зробити результати вимірювання двох несумісних величин повністю визначеними. Якщо ентропія одного вимірювання дуже мала, $H(X) \approx 0$, то ентропія другого вимірювання повинна бути достатньо великою, щоб виконувалася нерівність (5.68). Тобто зменшення невизначеності щодо однієї величини неминуче призводить до збільшення невизначеності щодо іншої. Це співвідношення є прямим узагальненням принципу невизначеності, але має низку переваг. По-перше, воно не залежить від конкретної форми операторів, а лише від геометрії гільбертового простору. По-друге, воно може бути застосоване до систем будь-якої розмірності. Таким чином, співвідношення Маассена–Уффінка кількісно описує фундаментальне обмеження на одночасне отримання інформації про дві несумісні квантові величини.

Подальший розвиток цієї ідеї пов’язаний із урахуванням квантової пам’яті. Припустимо, що система А, яку ми вимірюємо, не є ізольованою. Вона заплутана з іншою системою В. Система В може перебувати у розпорядженні іншого спостерігача або використовуватись як квантова пам'ять. Тоді інформація про систему А частково зберігається у системі В. У результаті невизначеність вимірювань може виявитися меншою, ніж передбачає звичайне співвідношення Маассена–Уффінка. У цьому випадку справедливе співвідношення Бєрти–Реннера:

$$H(X \mid B) + H(Z \mid B) \geq -2log_2 c + S(A \mid B), \qquad (5.69)$$

де $H(X \mid B)$ – умовна ентропія результатів вимірювання X за наявності доступу до квантової пам’яті системи В. Вона характеризує невизначеність результатів вимірювання системи А, якщо спостерігач має додаткову інформацію про систему В. Тобто вона показує, наскільки невизначеним залишається результат вимірювання А, якщо використовувати всю інформацію, що міститься в системі В. Аналогічно, $H(Z \mid B)$ є умовною ентропією результатів вимірювання величини Z за наявності доступу до тієї ж самої квантової пам'яті В. $A \mid B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ – умовна квантова ентропія фон Неймана, де ρ_{AB} – матриця густини повної системи; ρ_B – редукована матриця густини підсистеми В. Таким чином, наявність квантової пам’яті може зменшувати невизначеність.

Співвідношення Бєрти–Реннера демонструє, що квантова заплутаність може суттєво впливати на принцип невизначеності. Якщо досліджувана система А заплутана із системою В, яка виконує роль квантової пам'яті, то інформація, що міститься у підсистемі В, дозволяє частково передбачати результати вимірювань системи А. Це призводить до зменшення ентропійної невизначеності. Для максимально заплутаних станів умовна квантова ентропія $S(A \mid B)$ набуває від'ємних значень, що є характерною ознакою квантових кореляцій і не має аналога в класичній теорії інформації. Саме тому квантова пам'ять здатна суттєво послаблювати, а в окремих випадках практично усувати невизначеність результатів вимірювань.

Уявімо двох спостерігачів. Аліса володіє системою A, Боб володіє системою B. Аліса може виміряти або X, або Z. Боб намагається передбачити результат її вимірювання, використовуючи свою систему B. Тоді $H(X \mid B)$ показує, наскільки добре Боб може передбачити результат вимірювання X, $H(Z \mid B)$ – наскільки добре Боб може передбачити результат вимірювання Z. Якщо системи незалежні, тобто заплутаність відсутня ($\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$), то система B не містить інформації про систему A. Тодді $H(X \mid B) = H(X)$, $H(Z \mid B) = H(Z)$ І співвідношення Бєрти–Реннера переходить у звичайне співвідношення Маассена–Уффінка.

Розглянемо конкретний приклад для кубіта. Нехай кубіт перебуває у стані $|0\rangle$. Цей стан є одним із базисних станів стандартного базису $Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$. Його часто називають обчислювальним базисом. Оскільки система вже перебуває у стані $|0\rangle$, то результат вимірювання наперед відомий: $P(0) = 1$,. $P(1) = 0$. Ентропія Шеннона згідно з (5.67) дорівнює

$$H(Z) = -(1 \cdot log_2 1 + 0 \cdot log_2 0).$$

Оскільки $log_2 1 = 0$, то $H(Z) = 0$. Нульова ентропія означає повну визначеність результату. Ми наперед знаємо, що вимірювання дасть $|0\rangle$. Жодної невизначеності немає.

Тепер розглянемо інший базис $X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, де

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Цей базис є взаємно незміщеним відносно базису Z, тобто $H(Z) = 0$, У цьому базисі ймовірність отримати стан $|+\rangle$ дорівнює $p_+ = |\langle +|0\rangle|^2$. Після підстановки виразу для $\langle +|$ отримуємо

$$\langle +|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 1|0\rangle).$$

Оскільки $\langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|0\rangle = 0$, то

$$+|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому

$$p_+ = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно

$$p_- = \frac{1}{2}$$

У взаємно-незміщеному базисі X:

$$p_+ = p_- = \frac{1}{2}, \qquad H(X) = 1.$$

Отже,

$$H(X) + H(Z) = 1,$$

Це демонструє, що повна визначеність результату вимірювання в одному базисі супроводжується максимальною невизначеністю результату вимірювання у взаємно незміщеному базисі..

Цей приклад наочно демонструє, що повна визначеність в одному базисі супроводжується максимальною невизначеністю результату вимірювання у взаємно незміщеному базисі. У більш загальному випадку для систем розмірності d взаємно-незміщені базиси забезпечують максимальну ентропійну невизначеність. Це робить їх ключовим інструментом у квантовій криптографії, де вони використовуються для гарантування безпеки передачі інформації.

Ентропійні співвідношення також тісно пов’язані з теоремами про обмеження доступної інформації, такими як межа Голєво, яка встановлює верхню межу на кількість класичної інформації, що може бути витягнута з квантової системи. У цьому сенсі невизначеність виступає як фундаментальне обмеження на передачу інформації.

З математичної точки зору ці співвідношення базуються на властивостях ентропії, таких як увігнутість, субадитивність і монотонність відносно квантових каналів. Вони також пов’язані з нерівностями типу сильного субадитивного закону:

$$S(ABC) + S(B) \leq S(AB) + S(BC), \qquad (5.70)$$

де S – ентропія фон Неймана (міра квантової невизначеності); $S(ABC)$ – ентропія всієї тричастинкової системи A + B + C; $S(AB)$ – ентропія підсистеми A + B; $S(BC)$ – ентропія підсистеми B + C; $S(B)$ – ентропія лише системи B. Тобто, ми беремо частини однієї великої квантової системи і для кожної частини обчислюємо ентропію її матриці густини. Ця нерівність називається сильною субадитивністю ентропії і є однією з найважливіших у квантовій теорії інформації. Її фізичний зміст такий: інформація не може бути розподілена довільно, існують строгі обмеження на кореляції між частинами системи. Інакше кажучи, знання про систему B не може «надто сильно» зменшити невизначеність одночасно і для AB, і для BC. Існує баланс інформації між підсистемами. Сильна субадитивність гарантує, що навіть у присутності заплутаності інформація поводиться узгоджено.

Фізично ентропійні співвідношення невизначеності відображають глибоку ідею: інформація про квантову систему є контекстуальною і залежить від вибору базису вимірювання. Неможливо отримати повну інформацію одночасно у всіх базисах, і ця обмеженість має кількісне вираження через ентропію. Таким чином, ентропійні співвідношення невизначеності є потужним і універсальним інструментом аналізу квантових систем. Вони узагальнюють принцип невизначеності Гейзенберга, враховують квантову пам’ять і заплутаність, а також мають безпосередні застосування у квантовій криптографії, теорії інформації та фізиці квантових вимірювань. Їх значення виходить далеко за межі формального апарату, оскільки вони відображають фундаментальні обмеження на отримання знань про квантовий світ.

5.5. Протоколи квантової телепортації та надщільного кодування

Квантова телепортація є одним із найбільш відомих і концептуально важливих протоколів квантової теорії інформації. Вона демонструє можливість передачі квантового стану між просторово розділеними системами без фізичного перенесення самої квантової частинки. Незважаючи на назву, квантова

телепортація не означає миттєвого перенесення матерії або інформації зі швидкістю, що перевищує швидкість світла. Навпаки, цей протокол узгоджується з усіма фундаментальними обмеженнями квантової механіки, зокрема з теоремами про заборону клонування та неможливість надсвітлової передачі інформації.

Квантова телепортація відіграє важливу роль у сучасних квантових технологіях, включаючи квантові мережі, квантову криптографію та квантові обчислення. Інтуїтивно задача телепортації полягає у передачі невідомого квантового стану від одного спостерігача (Аліси) до іншого (Боба) таким чином, щоб у Боба з'явився точний копійний стан, а в Аліси він зник. Однак, з урахуванням теореми про заборону клонування, очевидно, що процес не може включати створення копії стану. Крім того, теорема про неможливість надсвітлової передачі вимагає, щоб будь-яка передача інформації супроводжувалася класичним каналом зв'язку. Таким чином, виникає питання: яким чином можливо передати квантовий стан, не порушуючи фундаментальних обмежень квантової механіки?

Нехай Аліса має квантову систему у невідомому стані $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

де α, β – комплексні амплітуди; $|0\rangle$,$|1\rangle$ – базисні стани;

Аліса та Боб також мають спільну пару частинок, що перебувають у заплутаному стані Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

де $|\Phi^+\rangle$ заплутаний стан Белла;

Завдання полягає в тому, щоб передати стан $|\psi\rangle$ від Аліси до Боба.

Процедура телепортації складається з кількох етапів.

1. Формування спільного стану. Система з трьох кубітів описується тензорним добутком

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle. \qquad (5.71)$$

2. Вимірювання Аліси. Аліса виконує спільне вимірювання двох своїх кубітів у базисі Белла. У результаті вона отримує один із чотирьох можливих результатів.

3. Передача класичної інформації. Аліса передає Бобу два класичних біти, що відповідають результату її вимірювання.

4. Операція Боба. На основі отриманої інформації Боб застосовує відповідне унітарне перетворення до свого кубіта, після чого його стан стає рівним $|\psi\rangle$.

Квантова телепортація не передає фізичну частинку, а лише переносить квантовий стан з однієї системи на іншу. При цьому початковий стан у Аліси зникає внаслідок вимірювання; стан у Боба відтворюється з точністю до унітарного перетворення; процес потребує попередньо створеної заплутаності. Таким чином, телепортація не порушує теорему про заборону клонування, оскільки копія стану не створюється, відбувається його перенесення. Квантова телепортація узгоджується з усіма розглянутими раніше обмеженнями: заборона клонування – стан не дублюється, а переноситься; неможливість надсвітлової передачі – передача потребує класичного каналу; обмеження вимірювання – інформація про стан не отримується безпосередньо; межа Голєво – класична інформація, що передається, є обмеженою. Таким чином, телепортація не порушує фундаментальні закони, а використовує їх у узгодженій формі.

Для більш глибокого розуміння процесу розглянемо інтуїтивні інтерпретації.

1. Передача стану без передачі частинки: квантова інформація переноситься, тоді як фізична система не переміщується.

2. Роль заплутаності як ресурсу: заплутаність виступає як канал, який дозволяє здійснити передачу стану.

3. Необхідність класичної інформації: без передачі класичних бітів процес не може бути завершений.

Для ілюстрації принципу квантової телепортації та її обмежень розглянемо характерні приклади.

1. Передача невідомого стану. Нехай фотон A має стан:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|H\rangle + \beta\,|V\rangle.$$

Цей стан неможливо виміряти точно і передати класично. Потрібен квантовий протокол.

2. Телепортація через заплутану пару. Нехай фотони B і C перебувають у стані:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle). \tag{5.72}$$

Виконується Bell-вимірювання над A і B. В результаті стан фотона C стає рівним $|\psi\rangle$ з точністю до унітарного перетворення. Отже, стан передається без фізичного переносу частинки.

3. Роль класичного каналу. Результат Bell-вимірювання передається класично (2 біти). Без цього отримувач не знає, яке перетворення застосувати. Висновок: телепортація не порушує причинність.

4. Неможливість копіювання. Після телепортації початковий стан знищується. Новий стан виникає в іншому місці. Це узгоджується з теоремою про заборону клонування.

5. Вплив шуму. Якщо канал неідеальний, тобто

$$\rho \to p\,|\psi\rangle\langle\psi\,| + (1-p)_{\text{шум}}, \tag{5.73}$$

то точність телепортації зменшується, зникає квантова перевага. Висновок: телепортація чутлива до декогеренції.

Квантова телепортація дозволяє передавати квантовий стан між віддаленими системами без фізичного переносу носія, однак вимагає наявності заплутаності та класичного каналу зв’язку. Вона поєднує квантову заплутаність і класичну передачу інформації в єдиний узгоджений протокол. Цей результат органічно вписується в загальну структуру фундаментальних обмежень квантової інформації та водночас ілюструє нові можливості, які відкриваються завдяки квантовим ефектам. Квантова телепортація є важливим елементом квантових комунікаційних технологій і відіграє ключову роль у розвитку квантових мереж.

Протокол квантової телепортації демонструє, що за наявності попередньо підготовленої заплутаної пари частинок та передавання двох класичних бітів можна передати квантовий стан без фізичного перенесення самої частинки. Це підкреслює фундаментальну роль квантової заплутаності як ресурсу для передачі інформації. Природно постає питання: чи можна використати цей самий ресурс (заплутаність) не лише для передавання станів, а й для підвищення ефективності передачі класичної інформації? Відповіддю на це є протокол надщільного кодування.

Надщільне кодування є одним із ключових протоколів квантової теорії інформації, який демонструє можливість ефективнішої передачі класичної інформації за рахунок використання квантових ресурсів. На відміну від класичних каналів, де один біт інформації передається одним фізичним носієм, у квантовому випадку можлива передача більшого обсягу інформації при використанні заплутаних станів. Цей протокол ілюструє принципову відмінність між класичною та квантовою інформацією, а також показує, що квантові системи можуть забезпечувати інформаційні переваги без порушення фундаментальних обмежень, розглянутих у попередніх підрозділах.

Надщільне кодування тісно пов’язане з квантовою телепортацією і разом з нею формує базовий набір квантових комунікаційних протоколів. У класичній теорії інформації передача двох бітів інформації потребує використання щонайменше двох незалежних фізичних носіїв. У квантовому випадку ситуація може бути змінена за рахунок використання попередньо створеної заплутаності. Інтуїтивно виникає питання: чи можна, використовуючи квантові кореляції, передати більше інформації, ніж дозволяє класична схема, не порушуючи при цьому фундаментальних обмежень квантової механіки? Відповідь на це питання дає протокол надщільного кодування. Нехай два спостерігачі, Аліса та Боб, спільно володіють парою кубітів, що перебувають у заплутаному стані Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

Аліса має один кубіт, а Боб – інший. Завдання полягає в тому, щоб Аліса передала Бобу два класичних біти інформації, використовуючи передачу лише одного кубіта.

Процедура надщільного кодування складається з таких етапів.

1. Кодування інформації Алісою. Аліса кодує два класичних біти, застосовуючи до свого кубіта один із чотирьох унітарних операторів: I, X, Z, XZ, де I – тотожний оператор; X і Z – оператори Паулі; XZ – композиція операторів. Кожна з цих операцій переводить початковий стан у один із чотирьох ортогональних станів Белла.

2. Передача кубіта. Аліса передає свій кубіт Бобу через квантовий канал.

3. Декодування Бобом. Боб виконує спільне вимірювання двох кубітів у базисі Белла, тобто наборі ортогональних заплутаних станів, та однозначно визначає, яку операцію застосувала Аліса, а отже які два біти інформації були передані.

Надщільне кодування демонструє, що попередньо створена квантова заплутаність дозволяє ефективніше використовувати фізичні ресурси каналу. Передача одного кубіта, доповнена заплутаністю, еквівалентна передачі двох класичних бітів. При цьому сама заплутаність не передає інформацію. Вона виступає як ресурс, що підвищує ефективність кодування. Передача інформації відбувається лише після фізичного надсилання кубіта.

Надщільне кодування не порушує жодного з фундаментальних обмежень квантової інформації: теореми про неможливість надсвітлової передачі (інформація передається лише після фізичної передачі кубіта); межі Голєво (збільшення ефективності досягається за рахунок використання заплутаності, а не порушення обмеження); заборони клонування (процес не передбачає копіювання квантових станів); обмеження вимірювання (декодування можливе лише для ортогональних станів Белла). Таким чином, протокол узгоджується із загальною системою фундаментальних обмежень квантової інформації.

Для кращого розуміння розглянемо інтуїтивні пояснення.

1. Заплутаність як інформаційний резерв: частина інформації вже «закладена» у спільному стані системи до початку передачі.

2. Кодування через зміну глобального стану: локальна операція Аліси змінює глобальний стан системи, що дозволяє Бобу відновити інформацію.

3. Обсяг переданої інформації перевищує кількість фізично переданих ресурсів: передається один кубіт, але завдяки заплутаності декодуються два біти.

Для пояснення принципу надщільного кодування та його переваг розглянемо характерні приклади.

1. Класична межа передачі. У класичному випадку один біт інформації передається одним фізичним носієм (наприклад, фотоном): $0 \rightarrow |H\rangle,\ 1 \rightarrow |V\rangle$. Висновок: 1 фотон → 1 біт.

2. Заплутана пара як ресурс. Нехай два користувачі мають заплутаний стан:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle),$$

Один із них (Аліса) застосовує локальні унітарні операції: I, σ_x,σ_z, і σ_y. Це перетворює стан у один із чотирьох ортогональних станів Белла.

3. Передача двох бітів. Аліса надсилає лише один фотон Бобу. Боб виконує Bell-вимірювання і визначає стан:

$$|\Phi^{\pm}\rangle, |\Psi^{\pm}\rangle.$$

Це дозволяє відновити 2 біти інформації.

4. Чому це працює? Заплутаність забезпечує попередньо розподілену кореляцію, можливість кодування у глобальному стані. Інформація «розподілена» між двома частинками.

5. Обмеження. Без заплутаності неможливо передати більше 1 біта. При шумі зменшується розрізнюваність станів, падає ефективність протоколу.

Надщільне кодування є яскравим прикладом того, як квантові ефекти можуть підвищувати ефективність передачі інформації. Воно демонструє, що квантова заплутаність може збільшити ефективність передачі інформації понад класичні межі. Цей результат узгоджується із загальною структурою

фундаментальних обмежень квантової інформації та водночас підкреслює відмінності між класичною і квантовою теоріями інформації. Квантова телепортація та надщільне кодування є взаємодоповнювальними протоколами: у першому випадку класична інформація використовується для відновлення квантового стану, тоді як у другому квантовий канал у поєднанні із заплутаністю дозволяє передати більше класичної інформації, ніж у класичному випадку. Разом таке поєднання формує основу сучасних квантових комунікаційних протоколів.

5.6. Квантове кодування та теорія виправлення помилок у каналах зв'язку

У класичних системах зв'язку проблема надійної передачі інформації вирішується за допомогою добре розвиненої теорії кодування, заснованої на роботах Клода Шеннона. Проте з розвитком Квантова теорія інформації стало очевидно, що класичні підходи не можуть бути безпосередньо перенесені на квантові системи. Це пов'язано з фундаментальними особливостями квантової механіки: суперпозицією, заплутаністю та неможливістю клонування довільного квантового стану. Квантові канали зв'язку потенційно забезпечують значно вищу ефективність передачі інформації, а також нові можливості, такі як абсолютно захищений обмін ключами. Однак ці переваги супроводжуються серйозною проблемою – вразливістю квантових станів до шуму та декогеренції. Навіть незначна взаємодія з навколишнім середовищем може призвести до втрати інформації. У цьому контексті квантове кодування та теорія виправлення помилок стають ключовими інструментами, що дозволяють забезпечити надійність передачі інформації в квантових каналах. Для розуміння принципів квантового кодування доцільно спочатку розглянути, як інформація представляється у квантових системах, а потім перейти до методів її стискання та захисту від помилок.

Квантова інформація описується станом кубіта (1.75). На відміну від класичного біта кубіт може перебувати у суперпозиції. Це означає, що квантова

система може містити значно більше інформації, ніж класична, однак ця інформація є «прихованою» і не може бути повністю вилучена без обмежень (що пов’язано з межею Голєво). При цьому вимірювання змінює стан квантової системи і неможливо створити точну копію (теорема про заборону клонування). Ці властивості створюють принципово нову ситуацію: інформацію потрібно захищати, не порушуючи сам квантовий стан. Таким чином, квантова інформація характеризується специфічними властивостями, які істотно відрізняють її від класичної. Зокрема, суперпозиція та неможливість клонування обмежують пряме застосування класичних методів обробки даних. У зв’язку з цим виникає необхідність розробки спеціальних підходів до ефективного представлення та передачі квантових станів, що приводить до розгляду задачі квантового кодування та стискання інформації.

Для строгого опису квантових кодів використовується апарат лінійної алгебри та теорії операторів у гільбертовому просторі. Нехай квантовий канал описується як повністю додатне відображення:

$$E(\rho) = \sum_a E_a \rho E_a^\dagger , \tag{5.74}$$

де ρ – матриця густини стану; E_a – оператори Крауса; $E_a^\dagger$– ермітово спряжений оператор (спряжено-транспонований до E_a); $\sum_a E_a^\dagger E_a = I$ – умова збереження ймовірності (I – одиничний оператор). У наведеному виразі сумування здійснюється по всіх можливих варіантах впливу шуму. Наприклад, якщо у класичному каналі є різні типи шуму (наприклад, помилка 0 → 1 або 1 → 0), то тут кожен тип відповідає своєму a. Цей запис означає, що будь-який шум у квантовому каналі можна представити як набір елементарних помилок.

Основою квантового кодування є теорема, сформульована Беном Шумахером. Вона стверджує, що квантові стани можна стискати до так званого типового підпростору. Ентропія фон Неймана (5.65) визначає мінімальну кількість кубітів, необхідних для представлення інформації. Основна ідея полягає в тому, що не всі стани однаково важливі. Стискання означає, що замість

передачі повного набору станів можна передавати лише їхню «суттєву частину», що зменшує необхідну кількість кубітів. Тобто існує «типовий підпростір», де зосереджена майже вся інформація. Однак незважаючи на можливість ефективного стискання квантової інформації, передача таких станів через реальні фізичні канали супроводжується впливом шумів і зовнішніх факторів. Це призводить до спотворення квантових станів і втрати інформації, і навіть стиснена інформація може бути пошкоджена шумом. Тому наступним важливим етапом аналізу є дослідження природи та типів помилок, що виникають у квантових каналах зв'язку.

Квантові помилки мають іншу природу, ніж класичні. Вони виникають через взаємодію з середовищем (декогеренція); шум каналів; недосконаліть апаратури. У квантових каналах виникають такі основні типи помилок: ***бітові помилки*** (X-помилки) – зміна $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$: ***фазові помилки*** (Z-помилки) – зміна знаку фази; ***комбіновані помилки*** (Y-тип). Ці помилки описуються операторами Паулі. Важливо, що квантову інформацію не можна просто скопіювати (заборона клонування), тому класичні методи резервування тут не працюють. Розглянуті типи помилок демонструють, що квантові системи піддаються значно складнішим впливам, ніж класичні. При цьому безпосереднє вимірювання стану для виявлення помилки є неприйнятним, оскільки призводить до руйнування суперпозиції.

На перший погляд може здатися, що виправлення помилок у квантових системах є неможливим. Дійсно, якщо вимірювання змінює стан, а копіювання заборонене, то як можна визначити та усунути помилку? Відповідь полягає у використанні спеціальних квантових кодів, які дозволяють розподілити інформацію між кількома фізичними системами таким чином, щоб помилки могли бути виявлені без руйнування квантового стану. Це досягається за рахунок введення надлишковості та використання додаткових ступенів свободи, що дозволяє виявляти та виправляти помилки без прямого спостереження квантового стану.

Нехай квантова інформація закодована у стані $|\psi\rangle$ який передається через шумовий канал. У результаті взаємодії з середовищем стан може бути спотворений: $\rho \to \mathcal{E}(\rho)$, де $\mathcal{E}$ – квантовий канал. Завдання полягає у відновленні початкового стану після проходження через канал. Розглянемо основну теорему квантового виправлення помилок. Нехай C – підпростір гільбертового простору (кодовий простір), у якому кодується інформація. Набір операторів $\{E_i\}$ описує можливі помилки. Код C дозволяє виправити ці помилки тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\langle \psi_a \mid E_i^\dagger E_j \mid \psi_b \rangle = C_{ij}\delta_{ab}, \tag{5.75}$$

де: $\langle \psi_a |, \psi_b \rangle \in C$; E_j – оператор Крауса; $E_i^\dagger$ – ермітово спряжений оператор до E_i; C_{ij} – елементи деякої матриці, що характеризують помилки; δ_{ab} – символ Кронекера. Ця умова гарантує, що помилки не змішують логічні стани коду.

Основна ідея квантового кодування полягає в тому, що інформація не зберігається в одному кубіті, а розподіляється між кількома фізичними системами. При цьому помилки впливають лише на частину системи; структура коду дозволяє ідентифікувати тип помилки; відновлення здійснюється без прямого вимірювання логічного стану. Таким чином, квантове кодування дозволяє обійти обмеження, пов’язані з вимірюванням і забороною клонування.

Для виявлення помилок використовуються так звані синдроми – результати вимірювання, які не містять інформації про сам квантовий стан, але дозволяють визначити тип помилки. Це досягається за рахунок вимірювання спеціальних операторів (стабілізаторів), які не руйнують логічний стан, а дають інформацію лише про помилки. Квантова теорема кодування стверджує, що для квантового каналу з ненульовою пропускною здатністю існують такі коди, які дозволяють передавати інформацію з довільно малою похибкою при достатньо великій довжині коду. Це є квантовим аналогом теореми Шеннона і визначає фундаментальні можливості передачі інформації через шумові канали.

Отримані результати теореми кодування формулюють необхідні та достатні умови ефективного представлення квантової інформації, однак залишають відкритим питання конструктивної реалізації відповідних кодів. Це зумовлює перехід від загальних теоретичних положень до аналізу конкретних класів квантових кодів, які відрізняються за структурою, ефективністю та здатністю до виправлення помилок.

Розглянемо основні види квантових кодів.

1. Код Шора. Це перший квантовий код виправлення помилок, запропонований Пітером Шором, який дозволяє кодувати **один** логічний кубіт у дев'ять фізичних кубітів і забезпечує виправлення довільної одиничної квантової помилки (як бітової, так і фазової). Основна ідея коду Шора полягає у комбінованому захисті від двох типів помилок: бітових (X) і фазових (Z). Оскільки квантова помилка може бути довільною (лінійна комбінація X,Y,Z), достатньо навчитися виправляти ці два базові типи, і тоді можна виправити будь-яку одиничну помилку.

Код Шора будується у два етапи:

а. Захист від бітових помилок. Використовується ідея повторення:

$$|0\rangle \rightarrow |000\rangle, \qquad |1\rangle \rightarrow |111\rangle. \tag{5.76}$$

Це дозволяє виправляти помилки типу X.

б. Захист від фазових помилок. Кожен із цих кубітів додатково кодується у «фазовий код»:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |1\rangle \rightarrow \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{5.77}$$

В результаті отримуємо 9-кубітний код.

Виправлення помилок здійснюється в три етапи:

а. Виявлення помилки. Використовуються допоміжні вимірювання (синдроми), які не руйнують квантовий стан і показують, де сталася помилка.

б. Класифікація помилки. Визначається, чи це бітова помилка чи фазова.

в. Виправлення. Застосовується відповідний оператор (X або Z).

Код Шора розподіляє інформацію по багатьох кубітах і робить її нелокальною. Тому локальна помилка не знищує весь стан. Важливість коду Шора полягає в тому, що це перший доказ того, що квантові помилки можна виправляти. Він показує, що квантові обчислення можуть бути надійними і став основою для розвитку всієї теорії квантових кодів.

2. Код Стіна. Це квантовий код виправлення помилок типу [[7,1,3]], який кодує 1 логічний кубіт у 7 фізичних кубітів і дозволяє виправляти будь-яку одиничну квантову помилку. Основна ідея полягає в тому, що код Стіна базується на класичному лінійному коді Хеммінга. Він одночасно захищає від бітових помилок (X) і фазових помилок (Z), тобто реалізує ці два типи захисту симетрично.

На відміну від коду Шора, де захист будується «послідовно» (спочатку X, потім Z), тут один і той самий код автоматично виправляє і бітові, і фазові помилки. Це робить код більш компактним (7 кубітів замість 9) і більш елегантним з математичної точки зору. Позначення [[7,1,3]] означає наступне: 777 – кількість фізичних кубітів; 111 – кількість логічних кубітів; 333 – відстань коду. Оскільки $d = 3 \Rightarrow t = 1$, код може виправляти одну помилку.

Код працює в такій послідовності:

1. Кодування. Логічний кубіт розподіляється між 7 кубітами.

2. Виникнення помилки. Будь-який один кубіт може зазнати X,Z або Y-помилки.

3. Вимірювання синдрому. Використовуються стабілізатори. Вони не руйнують стан і дозволяють визначити тип і місце помилки.

4. Виправлення. Застосовується відповідний оператор.

Код Стіна компактніший за код Шора. Він тісно пов’язаний із класичною теорією кодування.

3. Стабілізаторні коди. Це клас квантових кодів виправлення помилок, у яких кодовий підпростір визначається як множина квантових станів, що залишаються незмінними (стабілізуються) під дією певної абелевої групи операторів Паулі. Формально код задається як:

$$C = \{|\psi\rangle : M\,|\psi\rangle = |\psi\rangle,\ \forall M \in S\}, \qquad (5.78)$$

де C – кодовий підпростір; S – стабілізатор (абелева група операторів); M – оператори стабілізатора; $|\psi\rangle$ – кодові стани.

Основна ідея полягає в тому, що замість прямого контролю квантового стану використовуються оператори, які «перевіряють» його правильність, не руйнуючи сам стан. Кодовий стан – це такий стан, який не змінюється під дією стабілізаторів. Якщо виникає помилка, стан перестає бути власним станом цих операторів і це дозволяє виявити помилку через вимірювання стабілізаторів.

Стабілізаторні коди працюють в такій послідовності:

1. Кодування. Інформація записується у підпростір, стабілізований групою S.

2. Виникнення помилки. Помилка E змінює стан: $|\psi\rangle \to E\,|\psi\rangle$.

3. Вимірювання стабілізаторів. Якщо $M\,|\psi\rangle = |\psi\rangle$, то помилки немає. Якщо знак змінюється – є помилка .

4. Синдром помилки. Набір результатів вимірювань визначає тип і місце помилки.

5. Виправлення. Застосовується відповідний оператор.

Стабілізаторні коди є центральним інструментом квантової теорії виправлення помилок, оскільки дозволяють описувати коди компактно, виявляти помилки без руйнування інформації, будувати практичні квантові системи.

Для більш глибокого розуміння наведеного матералу розглянемо інтуїтивні пояснення.

1. Розподілена інформація: квантова інформація «розмазується» по кількох кубітах, що підвищує її стійкість.

2. Виявлення без руйнування: помилки можна виявити, не вимірюючи сам квантовий стан.

3. Квантовий аналог надлишковості: як і в класичних кодах, використовується надлишковість, але в іншій формі.

Для пояснення принципів квантового кодування та виправлення помилок розглянемо характерні приклади.

1. Класична помилка та її виправлення. У класичному випадку біт 0 можна закодувати як 000, а біт 1 як 111. Якщо один біт змінюється, більшість дозволяє відновити початкове значення. Це ілюструє ідею надлишковості.

2. Квантове кодування стану. Нехай кубіт:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

кодується у трьохкубітний стан:

$$|\psi\rangle \to \alpha\,|000\rangle + \beta\,|111\rangle.$$

Це дозволяє захистити інформацію від помилок.

3. Виправлення помилки без вимірювання стану.

Якщо виникає помилка: $|000\rangle \to |010\rangle$, можна визначити помилку через синдром, не вимірюючи сам стан. Важливо, що при цьому інформація не руйнується.

4. Межі виправлення. Квантове кодування не порушує теореми про заборону клонування і не відновлює інформацію з нуля. Воно лише захищає її від шуму.

Квантове кодування та теорія виправлення помилок формують фундамент сучасної квантової інформатики. На відміну від класичних систем, де помилки можна просто виявити і виправити шляхом дублювання, квантові системи потребують значно складніших підходів, що враховують принципи суперпозиції, заплутаності та обмеження вимірювання.

РОЗДІЛ 6. ФІЗИКА ГЕНЕРАЦІЇ ТА ДЕТЕКЦІЇ ЗАПЛУТАНИХ ФОТОННИХ ПАР

6.1. Нелінійно-оптичні механізми генерації корельованих фотонів

У попередньому розділі було розглянуто фундаментальні обмеження квантової передачі інформації, які визначають допустимі операції над квантовими станами та встановлюють межі інформаційних процесів. Зокрема, було показано, що квантова заплутаність є ключовим ресурсом, який лежить в основі квантових комунікаційних протоколів, таких як телепортація та надщільне кодування. Однак сам факт існування заплутаних станів не гарантує їх практичного використання. Для реалізації квантових технологій необхідно мати фізичні механізми, що дозволяють створювати такі стани з високою точністю та відтворюваністю. У цьому контексті особливу роль відіграє фізика генерації заплутаних частинок, зокрема фотонів, які є основними носіями квантової інформації в оптичних системах. Тому важливим є формування цілісного уявлення про фізичні принципи, що лежать в основі генерації заплутаних станів, а також встановлення зв’язку між абстрактним квантовим описом і реальними експериментальними реалізаціями. Квантова заплутаність є властивістю складених систем, яка не має класичного аналога. Вона проявляється у вигляді кореляцій між підсистемами, які не можуть бути описані незалежно одна від одної. У формальному вигляді заплутаний стан не може бути представлений як добуток станів окремих підсистем. З точки зору фізичної реалізації, виникає питання: яким чином такі стани можуть бути створені у реальних системах? Відповідь на це питання пов’язана з процесами взаємодії квантових систем, у яких відбувається перерозподіл енергії, імпульсу та інших фізичних величин. У випадку фотонів основним механізмом генерації заплутаних станів є нелінійна взаємодія світла з речовиною. Саме ці процеси дозволяють створювати пари фотонів, які перебувають у корельованому квантовому стані.

Розглянемо складену квантову систему, що складається з двох підсистем. Загальний стан такої системи може бути записаний у вигляді

$$| \Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \, | i\rangle \otimes | j\rangle, \tag{6.1}$$

де c_{ij} – комплексні коефіцієнти (амплітуди ймовірності), $| i\rangle$, $| j\rangle$ – базисні стани підсистем. Стан є заплутаним, якщо він не може бути представлений у вигляді

$$| \Psi\rangle \neq | \psi\rangle_A \otimes | \phi\rangle_B. \tag{6.2}$$

де $| \Psi\rangle$ – стан складеної системи; $| \psi\rangle_A$ – стан підсистеми А (наприклад, першого фотона); $| \phi\rangle_B$ – стан підсистеми В (другого фотона). Це означає, що властивості підсистем не визначені незалежно одна від одної, а інформація розподілена по всій системі. Фотони є зручними об'єктами для реалізації квантових інформаційних процесів з наступних причин: висока швидкість поширення; слабка взаємодія з середовищем (низька декогеренція); можливість контролю різних ступенів свободи. Квантовий стан фотона може бути закодований у різних змінних: поляризація ($| H\rangle, | V\rangle$); частота; напрямок поширення (імпульс); часові характеристики. Це дозволяє реалізовувати різні типи заплутаності.

Генерація заплутаних фотонів пов'язана з процесами, у яких один квант світла може перетворюватися на кілька квантів із збереженням фізичних величин. Найбільш важливим процесом є спонтанне параметричне розщеплення (SPDC), при якому фотон накачки з частотою ω_{p} перетворюється на два фотони:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \, , \tag{6.3}$$

де ω_s – частота сигнального фотона; ω_i – частота додаткового фотона. Крім збереження енергії, виконується також закон збереження імпульсу:

$$k_p = k_s + k_i \, . \tag{6.4}$$

Саме ці закони визначають кореляції між фотонами, що виникають у процесі.

У лінійних середовищах фотони не взаємодіють між собою, тому для генерації заплутаності необхідні нелінійні ефекти. Поляризація середовища може бути представлена у вигляді розкладу:

$$P = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \cdots\right), \quad (6.5)$$

де $\chi^{(2)}$ – нелінійна сприйнятливість другого порядку; E – електричне поле. Саме член із $\chi^{(2)}$ відповідає за процеси, що призводять до генерації пар фотонів. Фізична інтерпретація отриманих результатів: заплутаність як «нероздільна інформація», тобто інформація не належить окремим фотонам, а існує лише для всієї системи; генерація як «розщеплення з кореляціями» тобто один фотон «розпадається» на два, і їх властивості залишаються пов'язаними; нелінійне середовище як джерело взаємодії, тобто кристал виступає як середовище, де фотони можуть «взаємодіяти» опосередковано.

Для ілюстрації розглянемо приклади.

1. Класична кореляція. Розглянемо пару класичних частинок, які випромінюються у протилежних напрямках із протилежними значеннями деякої величини (наприклад, спіну). Якщо вимірювання однієї частинки дає результат «+», то для другої гарантовано буде «−». Ця кореляція визначається наперед і може бути описана класичною теорією з прихованими параметрами. Вона не є квантовою заплутаністю.

2. Квантова суперпозиція. Розглянемо одночастинковий стан:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle).$$

Цей стан описує суперпозицію двох альтернатив. До моменту вимірювання фотон не має визначеної поляризації, що є фундаментальною відмінністю від класичних систем.

3. Заплутаний стан. Розглянемо двофотонний стан:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle).$$

Цей стан не може бути представлений як добуток станів окремих фотонів. Вимірювання поляризації одного фотона миттєво визначає результат для іншого, що є проявом квантової заплутаності.

4. Роль нерозрізнюваності. Нехай існують два можливі процеси генерації фотонної пари: процес 1: $|HH\rangle$ і процес 2: $|VV\rangle$. Якщо неможливо визначити, який процес відбувся, формується суперпозиція

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle).$$

Таким чином, нерозрізнюваність процесів є ключовою умовою виникнення заплутаності.

Фізика генерації заплутаних станів базується на взаємодії квантових систем, у яких відбувається перерозподіл фізичних величин із дотриманням законів збереження. Заплутаність виникає як наслідок цих взаємодій і відображає нероздільний характер квантових систем. Фотони є зручними носіями квантової інформації, а нелінійні оптичні процеси забезпечують ефективний механізм генерації заплутаних пар. Саме ці процеси лежать в основі сучасних експериментальних реалізацій квантових технологій. Для подальшого аналізу процесів генерації та використання заплутаних фотонів необхідно перейти до строгого квантового опису фотонних станів. Такий опис дозволяє формалізувати поняття одно- та багатофотонних станів, а також встановити математичний апарат, необхідний для аналізу квантових кореляцій.

На відміну від класичного опису електромагнітного поля, у квантовій теорії світло розглядається як система квантів – фотонів. Кожному режиму електромагнітного поля відповідає квантовий осцилятор, стан якого визначається числом фотонів у цьому режимі. Це приводить до необхідності використання спеціального математичного формалізму – вторинного квантування, який дозволяє описувати процеси народження і знищення фотонів.

У квантовій електродинаміці електромагнітне поле розглядається як сукупність гармонічних осциляторів. Основою квантового опису фотонних станів є фоківські стани $|n\rangle$, де n – кількість фотонів у заданій моді. Ці стани утворюються шляхом послідовного застосування оператора народження:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \qquad (6.6)$$

Фоківські стани є власними станами оператора числа фотонів

$$\widehat{N} = a^{\dagger}a, \qquad \widehat{N} \mid n\rangle = n \mid n\rangle, \tag{6.7}$$

де $\widehat{N}$ – оператор числа фотонів.

Однофотонний стан має вигляд

$$\mid 1\rangle = a^{\dagger} \mid 0\rangle. \tag{6.8}$$

Багатофотонні стани описують ситуації, коли в системі присутні кілька фотонів. У загальному випадку стан поля може бути суперпозицією

$$\mid \psi\rangle = \sum_{n} c_n \mid n\rangle, \tag{6.9}$$

де c_n – комплексні амплітуди.

Фотон характеризується набором параметрів (ступенів свободи), які визначають його квантовий стан: поляризація; частота (енергія); просторовий напрямок; час народження. Кожна з цих змінних може використовуватися для кодування квантової інформації. Поляризація є найбільш поширеним способом опису фотонних кубітів. Базисні стани можуть бути записані як |H⟩ горизонтальна поляризація) і |V⟩ (вертикальна поляризація).

Загальний стан фотона:

$$\mid \psi\rangle = \alpha \mid H\rangle + \beta \mid V\rangle, \tag{6.10}$$

де $\alpha, \beta \in C$; $\mid \alpha \mid^2 + \mid \beta \mid^2 = 1$; $\mid H\rangle, \mid V\rangle$ – поляризаційні стани (рис. 6.1).

Для двох фотонів стан записується у тензорному добутку

$$\mid \Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \mid i\rangle \otimes \mid j\rangle, \tag{6.11}$$

де c_{ij} – амплітуди; $\mid i\rangle, \mid j\rangle$ – базисні стани підсистем.

Особливий інтерес становлять стани Белла:

$$\mid \Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid HV\rangle \pm \mid VH\rangle), \tag{6.12}$$

$$\mid \Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid HH\rangle \pm \mid VV\rangle), \tag{6.13}$$

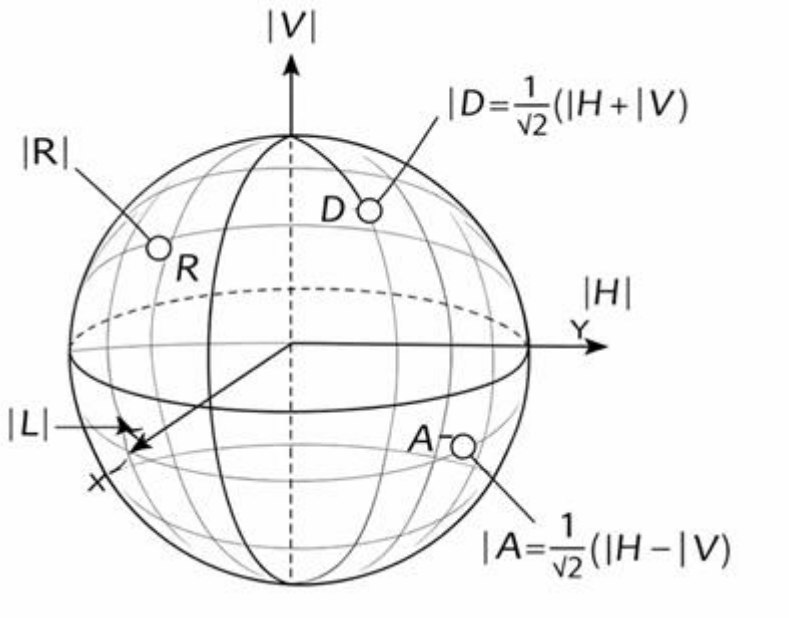


Рис. 6.1. Сфера Блоха для фотонного кубіта

Ці чотири максимально заплутані стани двофотонної системи утворюють базис Белла і широко використовуються у квантових протоколах. Стани типу Ψ описують антикорельовані поляризації фотонів, тоді як стани типу Φ – корельовані (таблиця 6.1).

У реальних умовах фотонні стани часто описуються матрицею густини ρ:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle \langle\psi_i \mid. \tag{6.14}$$

де p_i – ймовірність того, що система перебуває в стані $\mid \psi_i\rangle$; $\mid \psi_i\rangle$ – окремий квантовий стан системи; індекс i означає різні можливі стани. Матриця густини ρ описує статистичну суміш цих станів із ймовірностями p_i. Тобто це опис змішаного стану: система знаходиться в одному із станів $\mid \psi_i\rangle$, але ми не знаємо в якому саме.

Таблиця 6.1. Базис станів Белла для двох фотонів.

Стан	Формула
$\|\Psi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|HV\rangle+\|VH\rangle)$
$\|\Psi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|HV\rangle-\|VH\rangle)$
$\|\Phi^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|HH\rangle+\|VV\rangle)$
$\|\Phi^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|HH\rangle-\|VV\rangle)$

Такий опис дозволяє враховувати статистичні суміші та втрати когерентності.

Фізичні інтерпретації:

1. Фотон як квант осцилятора: кожна мода поля поводиться як квантовий осцилятор із дискретною кількістю квантів.

2. Суперпозиція станів: фотон може одночасно перебувати в кількох станах до моменту вимірювання.

3. Заплутаність як кореляція мод: двофотонний стан не розкладається на незалежні частини. (рис. 6.2). В центрі – заплутана пара фотонів. Фотони розлітаються у різні сторони: лівий до спостерігача A; правий до спостерігача B. Це дві просторово розділені підсистеми. На кожному каналі стоять поляризатор A з кутом α_A і поляризатор B з кутом α_B. Вони задають базис вимірювання. Після поляризаторів розташовані детектор A і детектор B, які фіксують чи пройшов фотон і його поляризацію. Кожен детектор працює незалежно. Стрілка між каналами означає зв'язок між результатами. Що відбувається при вимірюванні: якщо в A отримали H, то у B буде V, а якщо в A отримали V, то у B буде H. Тобто результати корельовані. Таким чином, заплутаність дає кореляції між

результатами, але не дозволяє передавати інформацію. Отже, рисунок ілюструє експеримент, у якому два фотони, що перебувають у заплутаному стані, вимірюються в різних базисах. Хоча, незважаючи на просторове розділення, результати вимірювань є корельованими, кожен окремий результат є випадковим, що виключає можливість передачі інформації.

)

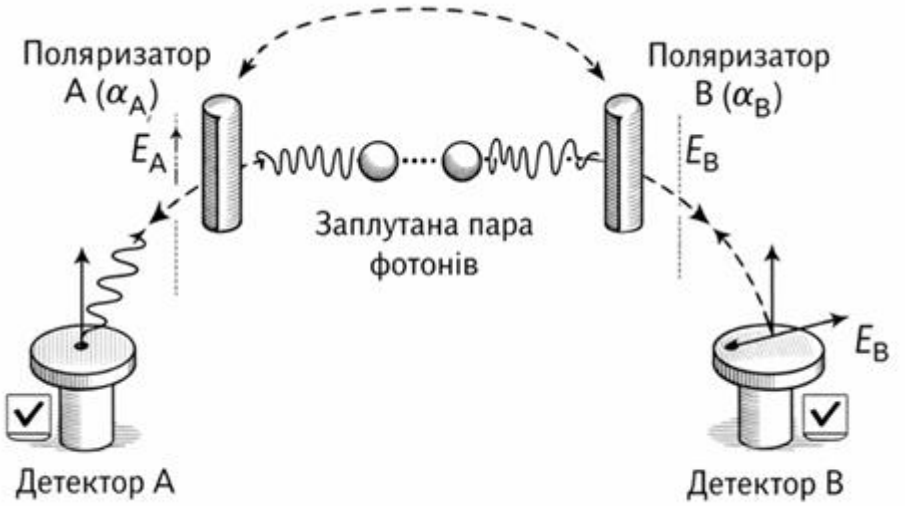


Рис. 6.2. Ілюстрація кореляцій у заплутаній парі фотонів:
E_A і E_B – напрямки електричного поля фотонів (тобто їх поляризація)

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, звернемося до прикладів.

1. Однофотонний кубіт. Розглянемо фотон у поляризаційному базисі:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|H\rangle + \beta\,|V\rangle, \quad |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1.$$

Цей стан описує квантовий біт, у якому інформація кодується в поляризації фотона. На відміну від класичного біта, який може перебувати лише в одному з двох станів, квантовий біт може знаходитися у суперпозиції, що дозволяє реалізувати квантові обчислювальні протоколи.

2. Заплутаний стан. Розглянемо двофотонний стан:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle+|VH\rangle).$$

Цей стан не може бути представлений у вигляді добутку станів окремих фотонів, що свідчить про наявність заплутаності. Вимірювання поляризації одного

фотона миттєво визначає результат для іншого, незалежно від відстані між ними. Таким чином, стан демонструє квантові кореляції, які не мають класичного аналога.

3. Змішаний стан. Розглянемо матрицю густини:

$$\rho = \frac{1}{2}(|\,H\rangle\langle H\,| + |\,V\rangle\langle V\,|).$$

Цей стан описує статистичну суміш, у якій система перебуває або в стані $|\,HH\rangle$ або $|\,VV\rangle$, але без когерентної суперпозиції. На відміну від заплутаного стану, тут відсутні квантові інтерференційні ефекти, і тому такий стан не є заплутаним.

Квантовий опис фотонних станів базується на формалізмі вторинного квантування, який дозволяє описувати процеси народження та знищення фотонів. Фоківські стани, суперпозиції та матриці густини формують основу математичного апарату квантової оптики. Фотони можуть кодувати інформацію у різних ступенях свободи, що робить їх універсальними носіями квантової інформації. Двофотонні стани дозволяють реалізувати заплутаність, яка є ключовим ресурсом квантових технологій. Сформульований формалізм є необхідною основою для аналізу конкретних механізмів генерації заплутаних фотонів.

Як було показано заплутаність є наслідком взаємодії підсистем і проявляється у вигляді нерозкладних кореляцій між ними. У випадку фотонів виникає принципове питання: яким чином забезпечити взаємодію квантів електромагнітного поля, які у вакуумі практично не взаємодіють між собою? Відповідь на це питання пов’язана з використанням нелінійних оптичних середовищ, у яких світло може ефективно взаємодіяти саме із собою через поляризацію речовини. Саме нелінійна оптика забезпечує фізичний механізм генерації корельованих і заплутаних фотонних станів, що робить її фундаментальною основою сучасної квантової оптики та квантових комунікацій.

У лінійній оптиці відгук середовища на електромагнітне поле є пропорційним напруженості поля. У такому випадку різні світлові хвилі не впливають одна на одну, і процеси, необхідні для генерації заплутаних станів, не

можуть виникати. Нелінійна оптика розглядає ситуацію, коли відгук середовища стає нелінійною функцією електричного поля. Це призводить до появи нових частотних компонент і до процесів перетворення фотонів, які лежать в основі генерації квантових кореляцій.

У загальному випадку поляризація середовища може бути представлена у вигляді розкладу за степенями електричного поля (6.5). Перший член описує лінійну оптику, тоді як наступні члени відповідають за нелінійні ефекти. Нелінійність означає, що поляризація середовища залежить від добутків полів, що призводить до появи нових частот і взаємодії між різними світловими хвилями. З квантової точки зору це означає, що можливі такі процеси: перетворення одного фотона в кілька; об'єднання кількох фотонів в один; обмін енергією між модами поля. Саме ці процеси забезпечують виникнення кореляцій між фотонами.

Особливе значення для генерації заплутаних фотонів мають процеси, пов'язані з членом $\chi^{(2)}$. До них належать генерація другої гармоніки; параметричне підсилення; спонтанне параметричне розщеплення (SPDC). У цих процесах відбувається перетворення частот світла, що підпорядковується законам збереження.

Нелінійні процеси повинні задовольняти фундаментальні закони збереження: збереження енергії $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, де ω_p – частота накачки; ω_s, ω_i – частоти породжених фотонів і збереження імпульсу (фазовий синхронізм) $\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_i}$, де $\overrightarrow{k_p}$ – хвильовий вектор падаючого фотона; $\overrightarrow{k_s}, \overrightarrow{k_i}$ – хвильові вектори породжених фотонів. Ця умова визначає просторові кореляції між фотонами.

З квантової точки зору нелінійне середовище виступає як система, що забезпечує ефективну взаємодію між модами електромагнітного поля. Процес можна інтерпретувати як анігіляцію одного фотона накачки і народження двох нових фотонів. Ці фотони створюються одночасно і мають спільний квантовий стан, що призводить до заплутаності.

Наведемо фізичні інтерпретації.

1. Середовище як посередник взаємодії: фотони не взаємодіють безпосередньо, але взаємодіють через речовину.

2. Перетворення частот як джерело кореляцій: розщеплення фотона створює пару з узгодженими параметрами.

3. Спільне походження фотонів: обидва фотони виникають в одному процесі, що забезпечує їх заплутаність.

Для ілюстрації основних нелінійних процесів розглянемо такі характерні приклади.

1. Генерація другої гармоніки. У нелінійному середовищі два фотони з частотою ω можуть об'єднуватися в один фотон із частотою $2\ \omega$:

$$\omega + \omega \to 2\omega. \tag{6.15}$$

Цей процес є результатом нелінійної взаємодії другого порядку і демонструє можливість перетворення частоти світла. Хоча він не створює заплутаності, він ілюструє фундаментальний механізм нелінійної взаємодії між фотонами.

2. Параметричне підсилення. У цьому процесі фотон накачки з частотою ω_p взаємодіє з сигнальним фотоном ω_s, у результаті чого виникає додатковий фотон із частотою ω_i:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \tag{6.16}$$

Це призводить до підсилення сигналу та одночасного створення корельованої пари фотонів. Процес демонструє передачу енергії між модами поля та формування квантових кореляцій.

3. Спонтанне параметричне розщеплення (SPDC). Фотон накачки розщеплюється на два фотони:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i.$$

На відміну від параметричного підсилення, цей процес відбувається спонтанно і приводить до генерації пар фотонів, які є корельованими за частотою, імпульсом і поляризацією. Саме цей процес є основним джерелом заплутаних фотонів у квантовій оптиці.

Нелінійна оптика є фундаментальним механізмом генерації заплутаних фотонів, оскільки саме вона забезпечує ефективну взаємодію між модами електромагнітного поля. Нелінійні процеси другого порядку дозволяють реалізувати перетворення фотонів із дотриманням законів збереження, що призводить до виникнення квантових кореляцій. Фізична природа цих процесів полягає у спільному походженні фотонів у межах одного квантового акту взаємодії, що зумовлює їх заплутаність. Розглянутий формалізм створює основу для детального аналізу спонтанного параметричного розщеплення як основного механізму генерації заплутаних фотонів.

6.2. Спонтанне параметричне розсіяння та умови фазового синхронізму

Вище було показано, що нелінійна оптика забезпечує фізичний механізм взаємодії фотонів через поляризацію середовища. Було встановлено, що процеси другого порядку нелінійності дозволяють реалізувати перетворення частот світла з дотриманням законів збереження. Серед таких процесів особливе місце займає спонтанне параметричне розщеплення (SPDC), яке є основним експериментальним методом генерації заплутаних фотонів. SPDC (Spontaneous Parametric Down-Conversion) – це нелінійний оптичний процес, у якому один фотон накачки у нелінійному кристалі перетворюється на два фотони меншої енергії. Цей процес відбувається без зовнішнього збурення і має ймовірнісний характер. Він широко використовується у квантовій оптиці, квантовій криптографії та інших квантових технологіях. На відміну від класичних процесів, у SPDC обидва фотони виникають у межах одного квантового акту, що забезпечує їх кореляцію і створює передумови для виникнення заплутаності.

Розглянемо фізичну сутність процесу SPDC, умов його реалізації та ролі у формуванні заплутаних станів. У процесі SPDC фотон накачки з частотою ω_p нелінійному кристалі перетворюється на два фотони: сигнальний з частотою ω_s і додатковий з частотою ω_i. Цей процес підпорядковується закону збереження енергії:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i ,$$

З квантової точки зору це відповідає анігіляції одного фотона і народженню двох нових фотонів.

Крім енергії, зберігається також імпульс:

$$\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_\iota}$$

де $\vec{k}$– хвильові вектори відповідних фотонів.

Ця умова визначає напрямки поширення фотонів і має назву умови фазового синхронізму(рис. 6.3).

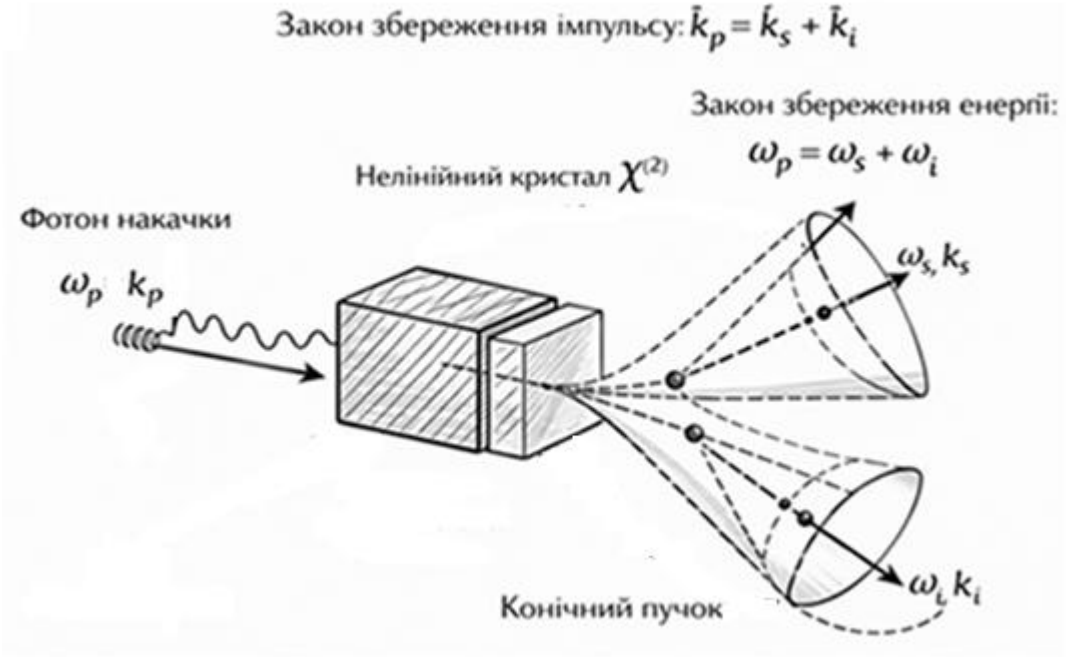


Рис. 6.3. Схема спонтанного параметричного розщеплення (SPDC)

Як видно з рисунка, фотон накачки, взаємодіючи з нелінійним середовищем, не просто розщеплюється на два фотони, а породжує їх у строго визначених напрямках, що задаються умовою збереження імпульсу. Фотони випромінюються не в одну точку, а по конічних поверхнях, що є наслідком закону збереження імпульсу $\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_\iota}$. Геометрично це призводить до формування конічних пучків випромінювання, на яких розташовані можливі напрямки поширення сигнального і додаткового фотонів. Саме на перетині

конусів виникає заплутаність. Закон збереження енергії визначає спектральні властивості породжених фотонів, тоді як умова фазового синхронізму визначає їх просторову структуру. Саме поєднання цих двох факторів забезпечує виникнення кореляцій між фотонами. Крім того, з рисунка видно, що обидва фотони виникають у межах одного квантового процесу. Це означає, що їх параметри не є незалежними, а жорстко пов'язані законами збереження. Така кореляція є передумовою для виникнення квантової заплутаності, яка реалізується за додаткових умов, розглянутих у наступних підрозділах.

Залежно від поляризаційних властивостей фотонів розрізняють два основні типи процесу. У першому випадку обидва фотони мають однакову поляризацію, що призводить до формування одного конічного пучка. Така конфігурація забезпечує кореляцію між фотонами, однак не створює умов для виникнення поляризаційної заплутаності без додаткових схем інтерференції. Формально $|p\rangle \rightarrow |s\rangle\,|i\rangle$, де $|s\rangle = |i\rangle$. Тут $|p\rangle$ – стан фотона накачки, $|s\rangle$ – стан сигнального фотона, $|i\rangle$ – стан додаткового фотона. Вираз $|s\rangle\,|i\rangle$ означає тензорний добуток станів двох фотонів і описує їх як єдину квантову систему.

У другому випадку фотони мають ортогональні поляризації та поширюються у вигляді двох конусів, що перетинаються. У точках перетину цих конусів виникає нерозрізнюваність альтернативних процесів генерації, що призводить до формування суперпозиції станів і, відповідно, до виникнення заплутаності. Формально $|p\rangle \rightarrow |H\rangle\,|V\rangle$ або $|HV\rangle$. Саме ця властивість робить процес Тип II основним інструментом для генерації поляризаційно заплутаних фотонів у практичних квантово-оптичних системах.

Процес SPDC описується гамільтоніаном взаємодії, який має вигляд:

$$\hat{H}_{\text{взаємодії}} \sim \chi^{(2)} a_p a_s^{\dagger} a_i^{\dagger} + h.c., \tag{6.17}$$

де $\chi^{(2)}$ – нелінійна сприйнятливість; a_p – оператор знищення фотона накачки; $a_s^{\dagger}, a_i^{\dagger}$ – оператори народження фотонів; $h.c.$ – ермітово спряжений член. Цей вираз відображає перетворення одного фотона у два.

У загальному випадку стан двох фотонів, що виникають у SPDC, може бути записаний як суперпозиція:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \, |\omega_s\rangle \, |\omega_i\rangle, \tag{6.18}$$

де $f(\omega_s, \omega_i)$ – функція кореляції.

У спеціальних схемах формується поляризаційно заплутаний стан:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)$$

Розглянемо фізичні інтерпретації.

1. Розщеплення як єдиний квантовий акт: два фотони виникають одночасно і не можуть бути описані незалежно.

2. Конуси випромінювання: напрямки фотонів утворюють конічні поверхні, визначені умовами фазового синхронізму.

3. Кореляція через закони збереження: енергія та імпульс пов'язують параметри фотонів.

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо такі приклади.

1. Дегенеративний режим. Розглянемо випадок, коли фотон накачки розщеплюється на два фотони з однаковими частотами:

$$\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}. \tag{6.19}$$

У цьому режимі обидва фотони мають однакову енергію та довжину хвилі. Такий процес використовується для генерації симетричних фотонних пар, що є зручним для експериментів із заплутаністю.

2. Недегенеративний режим. У загальному випадку

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \qquad \omega_s \neq \omega_i.$$

Фотони мають різні частоти, але їх сума строго визначена. Це означає, що вимірювання частоти одного фотона однозначно визначає частоту іншого, що є проявом енергетичних кореляцій.

3. Кореляції імпульсів. Для хвильових векторів виконується:

$$\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_\iota}$$

Це означає, що фотони розлітаються у взаємно узгоджених напрямках. Просторові кореляції лежать в основі експериментів із конусами випромінювання та визначають геометрію SPDC.

Спонтанне параметричне розщеплення є основним фізичним механізмом генерації заплутаних фотонів у сучасних експериментах. Воно реалізує перетворення фотонів у нелінійному середовищі з дотриманням законів збереження, що призводить до виникнення квантових кореляцій. Основною особливістю процесу є спільне походження фотонів, яке забезпечує їх заплутаність. Розглянутий процес є основою для побудови джерел заплутаних фотонів, які використовуються у квантових інформаційних технологіях. Проте виникає питання про ефективність цього процесу та умови його реалізації. Хоча закони збереження енергії та імпульсу формально допускають розпад фотона накачки на пару дочірніх фотонів, на практиці інтенсивність генерації істотно залежить від того, наскільки узгоджено відбувається накопичення амплітуди випромінювання вздовж кристалу. Іншими словами, внески від різних елементів середовища можуть як підсилювати один одного, так і взаємно компенсуватися через фазові зсуви. Саме це підводить до необхідності врахування умов фазового синхронізму, які визначають, чи буде відбуватися конструктивна інтерференція хвиль, що генеруються в різних точках нелінійного кристала. Якщо фазові швидкості хвиль накачки та породжених фотонів не узгоджені, виникає накопичення фазового розходження, що призводить до ослаблення або навіть повного пригнічення процесу. Отже, для ефективної генерації фотонних пар недостатньо лише виконання законів збереження, необхідно також забезпечити фазову узгодженість хвиль, яка формалізується через умови фазового синхронізму.

У процесі SPDC взаємодіють три хвилі: хвиля накачки та хвилі сигнального і додаткового фотонів. Якщо їх фази змінюються незалежно, то внески від різних ділянок кристалу можуть взаємно компенсуватися, що призводить до зменшення ефективності генерації. Таким чином, виникає необхідність у забезпеченні такої умови, за якої всі внески в процес генерації

фотонів додаються когерентно. Це досягається при виконанні умови фазового синхронізму.

Умова фазового синхронізму записується як

$$\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_\iota}, \tag{6.20}$$

де $\overrightarrow{k_p}$ – хвильовий вектор фотона накачки; $\overrightarrow{k_s}$ – хвильовий вектор сигнального фотона; $\overrightarrow{k_\iota}$ – хвильовий вектор додаткового фотона. Це співвідношення означає, що фази хвиль залишаються узгодженими в процесі поширення. На практиці вводиться величина фазової невідповідності

$$\overrightarrow{\Delta k} = \overrightarrow{k_p} - \overrightarrow{k_s} - \overrightarrow{k_\iota}. \tag{6.21}$$

Якщо $\overrightarrow{\Delta k} = 0$, то виконується ідеальний фазовий синхронізм. Умова фазового синхронізму означає, що хвилі, які беруть участь у процесі, зберігають фіксоване фазове співвідношення вздовж кристалу. Це призводить до когерентного накопичення амплітуди процесу, підвищення ефективності генерації, формування стабільних кореляцій між фотонами. Якщо умова фазового синхронізму не виконується, внески від різних ділянок кристалу гасять один одного. Наочна ілюстрація фазового синхронізму наведена на рис. 6.4.

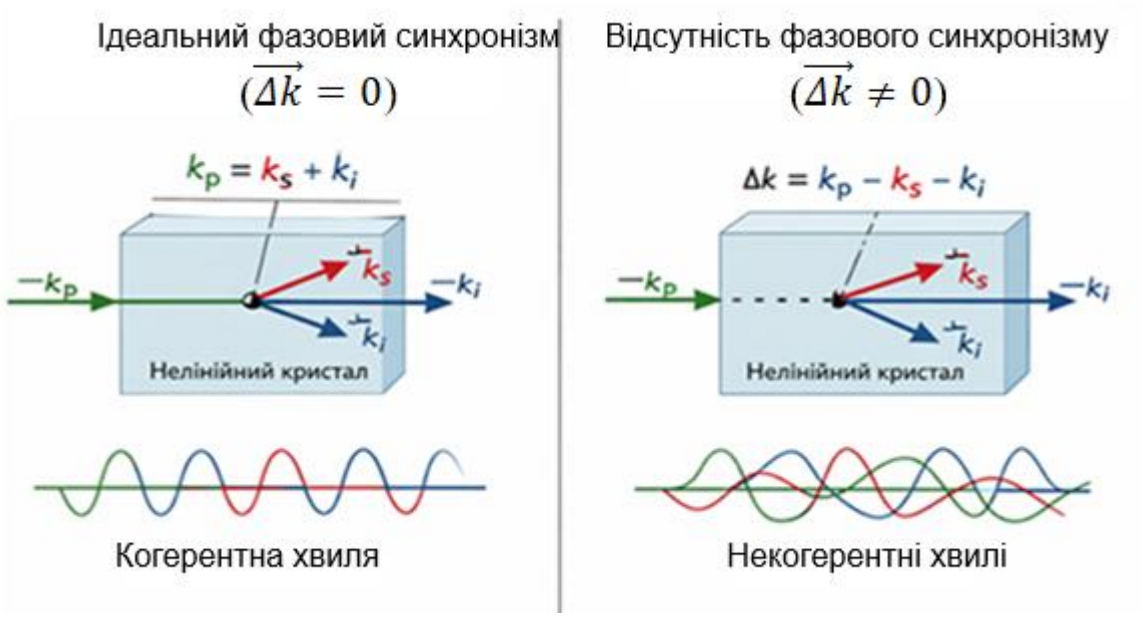


Рис. 6.4. Ілюстрація умови фазового синхронізму в нелінійному кристалі

Рисунок ілюструє вплив умови фазового синхронізму на ефективність процесу спонтанного параметричного розщеплення. У лівій частині зображено випадок ідеального фазового узгодження, при якому виконується співвідношення

$$\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_i}$$

Це означає, що хвильові вектори взаємодіючих хвиль узгоджені таким чином, що фази сигналу і додаткового фотона залишаються синхронізованими вздовж усього кристалу. У цьому випадку внески від різних ділянок середовища додаються когерентно, що призводить до зростання амплітуди процесу. Це відображено на рисунку у вигляді узгоджених хвиль (когерентна інтерференція).

У правій частині показано ситуацію фазової невідповідності, коли

$$\overrightarrow{\Delta k} = \overrightarrow{k_p} - \overrightarrow{k_s} - \overrightarrow{k_i} \neq 0$$

У цьому випадку фази хвиль поступово зміщуються одна відносно одної, що призводить до часткового або повного взаємного гасіння внесків від різних ділянок кристалу. Як наслідок, ефективність генерації фотонів суттєво зменшується. Це відповідає некогерентному додаванню хвиль, зображеному у нижній частині рисунка. Таким чином, рисунок демонструє, що виконання умови фазового синхронізму є необхідною умовою ефективної генерації фотонних пар у нелінійному середовищі.

Оскільки хвильовий вектор пов’язаний із показником заломлення n співвідношенням

$$k = \frac{n\omega}{c}, \tag{6.22}$$

то умова фазового синхронізму залежить від оптичних властивостей середовища. У звичайних умовах показник заломлення залежить від частоти (дисперсія), що ускладнює виконання умови

$$n_p\omega_p \neq n_s\omega_s + n_i\omega_i\,. \tag{6.23}$$

Для забезпечення умови фазового синхронізму використовуються спеціальні методи:

1. Кутове узгодження. Використання двопроменезаломлення дозволяє змінювати ефективні показники заломлення залежно від напрямку поширення.

2. Температурне налаштування. Зміна температури кристалу змінює його оптичні властивості.

3. Квазіфазове узгодження. У періодично поляризованих кристалах фазова невідповідність компенсується шляхом структурної модуляції середовища.

У випадку невиконання умови вводиться поняття когерентної довжини

$$L_c = \frac{\pi}{|\Delta k|}. \tag{6.24}$$

Це довжина, на якій хвилі залишаються приблизно у фазі.

Розглянемо фізичні інтерпретації.

1. Узгодження фаз як синхронний рух хвиль: хвилі рухаються разом без накопичення фазового зсуву.

2. Інтерференційна природа процесу: ефективність процесу визначається конструктивною інтерференцією, коли хвилі підсилюють одна одну або деструктивною інтерференцією, коли хвилі гасять одна одну.

3. Середовище як селектор напрямків: кристал «дозволяє» лише ті напрямки, які задовольняють умову.

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо такі приклади.

1. Ідеальний фазовий синхронізм. Якщо виконується умова:

$$\Delta k = k_p - k_s - k_i = 0,$$

то всі хвильові компоненти узгоджені за фазою. У цьому випадку амплітуди процесу додаються когерентно, що призводить до максимальної ефективності генерації фотонних пар. Це відповідає конструктивній інтерференції.

2. Порушення фазового синхронізму. Якщо:

$$\Delta k \neq 0$$

то виникає фазовий зсув між хвилями. В результаті внески різних ділянок кристалу частково гасять один одного, що зменшує ефективність генерації. Це аналог деструктивної інтерференції.

3. Квазіфазовий синхронізм (PPLN). У періодично поляризованому кристалі умова змінюється:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Lambda}, \tag{6.25}$$

де Λ – період структури.

У цьому випадку фазова невідповідність компенсується штучною структурою кристалу, що дозволяє ефективно генерувати фотони навіть без природного фазового синхронізму.

Умова фазового синхронізму є ключовою вимогою для ефективної реалізації нелінійних оптичних процесів, зокрема спонтанного параметричного розщеплення. Вона забезпечує когерентне накопичення амплітуди процесу та визначає просторові і спектральні характеристики породжених фотонів. Фізично ця умова відображає необхідність узгодження фаз хвиль, що взаємодіють, і тісно пов’язана з дисперсійними властивостями середовища. Методи реалізації фазового синхронізму дозволяють контролювати процес генерації фотонів і оптимізувати параметри джерел заплутаного світла. Розглянутий підхід є необхідною основою для подальшого аналізу конкретних схем генерації заплутаних фотонів.

6.3. Квантовий опис та класифікація видів фотонної заплутаності

Вище було розглянуто фізичні механізми генерації фотонних пар у нелінійних середовищах, а також умови, необхідні для ефективної реалізації процесу спонтанного параметричного розщеплення. Було показано, що цей процес дозволяє отримувати корельовані фотони, параметри яких визначаються законами збереження та умовами фазового синхронізму. Однак для реалізації квантових інформаційних протоколів необхідно не лише створити корельовані фотони, а й сформувати стани, що не розкладаються на добуток станів окремих підсистем. Такі стани відповідають поляризаційній заплутаності і є базовим ресурсом квантової комунікації. Розглянемо фізичні принципи генерації поляризаційно заплутаних фотонів і опис основних експериментальних схем їх реалізації.

У процесі спонтанного параметричне розщеплення (SPDC) фотони можуть народжуватися з різними поляризаційними властивостями. У простішому випадку (Тип I або Тип II) ці властивості визначені однозначно, що призводить до формування корельованих, але не обов'язково заплутаних станів. Для отримання заплутаності необхідно створити ситуацію, в якій неможливо визначити, яким саме шляхом було сформовано пару фотонів. Це досягається шляхом реалізації когерентної суперпозиції різних процесів генерації.

Поляризаційна заплутаність виникає тоді, коли стан двофотонної системи не може бути представлений у вигляді добутку станів окремих фотонів. Типовий приклад такого стану

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A |V\rangle_B + |V\rangle_A |H\rangle_B). \tag{6.26}$$

де A, B – просторово розділені канали (або два різні фотони); $|H\rangle_A |V\rangle_B$ – спільний стан двох фотонів, означає, що перший фотон має горизонтальну поляризацію, а другий – вертикальну; індекси A і B позначають різні фотони (або канали). Наведений вираз означає, що система знаходиться у суперпозиції двох можливостей: $A = H, B = V$ і $A = V, B = H$. У цьому випадку неможливо приписати кожному фотону визначену поляризацію незалежно від іншого. Генерація заплутаного стану базується на суперпозиції двох альтернативних процесів: генерація пари фотонів у стані $|H\rangle_A |V\rangle_B$ і генерація пари фотонів у стані $|V\rangle_A |H\rangle_B$. Якщо ці процеси є нерозрізнюваними, система переходить у суперпозицію

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle). \tag{6.27}$$

де $|\Psi\rangle$ – заплутаний стан Белла, тобто максимально заплутаний стан двох фотонів, у якому два фотони завжди мають протилежні поляризації, але сам результат є випадковим; HV, VH – тензорний добуток станів двох фотонів. Доданки означають: $|HV\rangle$ – перший фотон має поляризацію H, другий – V; $|VH\rangle$ – навпаки, перший має V, другий – H. Тобто фотони завжди мають протилежні поляризації. Знак «+» означає, що обидва доданки мають однакову

фазу. Саме нерозрізнюваність процесів є основною умовою виникнення заплутаності.

Однією з найпоширеніших реалізацій є використання двох нелінійних кристалів із взаємно ортогональними оптичними осями. У такій схемі реалізуються два альтернативні процеси генерації фотонних пар із різними поляризаційними властивостями. Наочна схема генерації поляризаційно заплутаного стану наведена на рис. 6.5.

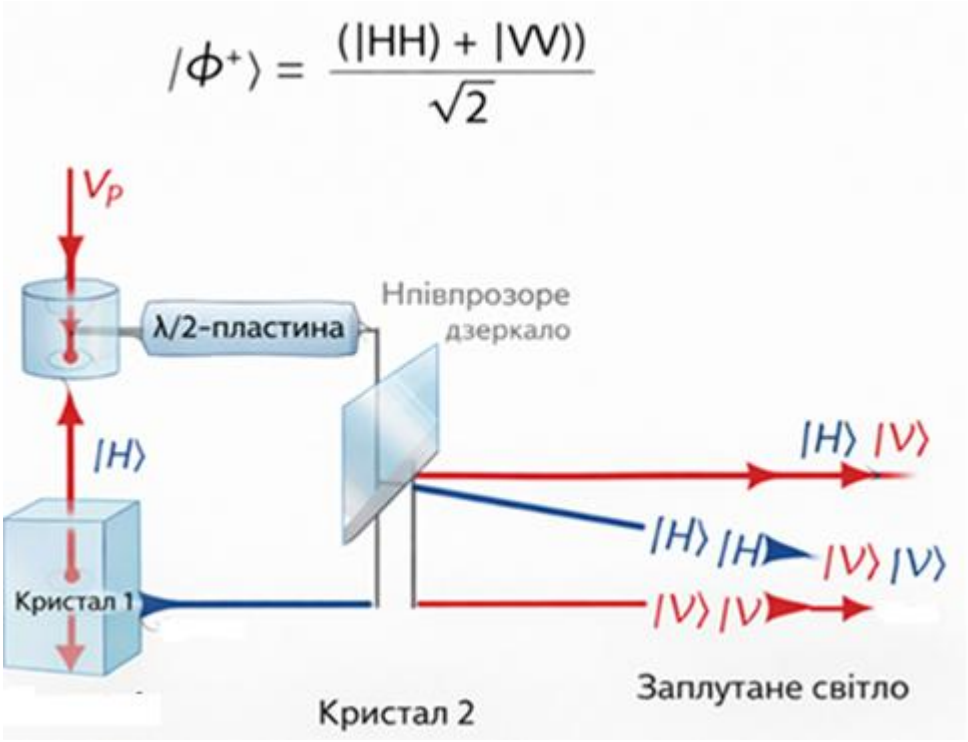


Рис. 6.5. Схема генерації поляризаційно заплутаного стану $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$ з використанням двох нелінійних кристалів.

На рисунку зображено експериментальну схему генерації поляризаційно заплутаних фотонів у стані $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$, де $|\Phi^+\rangle$ – це максимально заплутаний стан двох фотонів, у якому вони завжди мають однакову поляризацію, але сам результат є випадковим. Цей стан є одним із станів Белла. Запис $|HH\rangle$ означає, що обидва фотони мають горизонтальну поляризацію, $|VV\rangle$ – обидва фотони мають вертикальну поляризацію. Наведений вираз означає,

що система знаходиться одночасно в обох станах. Стан є заплутаним, тому що неможливо сказати який стан у першого фотона, а який у другого. Фотон накачки з певною поляризацією (позначений V_p) потрапляє у систему, що складається з двох нелінійних кристалів із взаємно ортогональними оптичними осями. Перед кристалами розташована напівхвильова пластина ($\lambda/2$), яка змінює поляризаційний стан накачки і забезпечує однакову ймовірність двох процесів генерації.

У першому кристалі відбувається процес SPDC, що призводить до генерації пари фотонів із горизонтальною поляризацією $|HH\rangle$. У другому кристалі, розташованому правіше від напівпрозорого дзеркала, реалізується альтернативний процес, у якому генерується пара фотонів із вертикальною поляризацією $|VV\rangle$. Після проходження через напівпрозоре дзеркало обидва процеси стають нерозрізнюваними, тобто неможливо визначити, в якому саме кристалі була створена пара фотонів. За умови когерентності накачки це призводить до інтерференції амплітуд двох процесів. У результаті формується суперпозиція $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$, яка є поляризаційно заплутаним станом. Таким чином, рисунок демонструє, що заплутаність виникає не лише завдяки самому процесу SPDC, а внаслідок інтерференції нерозрізнюваних альтернативних процесів генерації.

Іншим підходом є використання інтерферометричних схем, зокрема інтерферометра Саньєка. У цьому випадку накачка поширюється у двох напрямках, у кожному напрямку генерується пара фотонів, процеси є когерентно пов’язаними. Це дозволяє формувати високоякісні заплутані стани з високою стабільністю.

Для отримання поляризаційно заплутаних станів необхідно виконати такі умови формування заплутаності: нерозрізнюваність процесів генерації; когерентність джерела накачки; виконання фазового синхронізму; однаковість спектральних і просторових характеристик фотонів. Порушення цих умов призводить до втрати заплутаності.

Наведемо фізичні інтерпретації.

1. Заплутаність як невизначеність джерела: неможливо визначити, який саме процес породив пару фотонів.

2. Суперпозиція альтернатив: система одночасно перебуває у двох можливих станах.

3. Інтерференція процесів: заплутаність є наслідком інтерференції амплітуд різних процесів генерації.

Для пояснення розглянутого механізму розглянемо декілька прикладів

1. *Двокристальна схема.* Розглянемо систему з двома нелінійними кристалами, орієнтованими ортогонально. У першому кристалі генерується пара фотонів із поляризацією H, у другому – з поляризацією V.

За умови нерозрізнюваності процесів формується стан:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle).$$

Цей стан описує корельовані поляризації фотонів: вимірювання поляризації одного фотона визначає поляризацію іншого. Заплутаність виникає внаслідок суперпозиції двох фізично різних, але нерозрізнюваних процесів.

2. Інтерферометр Саньєка. В Інтерферометр Саньєка накачка розділяється на два напрямки, які проходять через один і той самий кристал. У кожному напрямку генерується пара фотонів із різними поляризаційними властивостями. Суперпозиція цих процесів приводить до формування стану

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + e^{i\phi}\,|VV\rangle), \tag{6.28}$$

де ϕ – відносна фаза. Ця схема забезпечує високу стабільність, оскільки обидва процеси відбуваються в одному оптичному контурі.

3. Tun I ma Tun II SPDC. У процесі Тип I обидва фотони мають однакову поляризацію $|HH\rangle$ або $|VV\rangle$. У процесі Тип II фотони мають ортогональні поляризації $|HV\rangle$ або $|VH\rangle$. Комбінування таких процесів дозволяє формувати різні стани Белла. Таким чином, тип нелінійного процесу визначає структуру заплутаного стану.

Генерація поляризаційно заплутаних фотонів базується на реалізації когерентної суперпозиції нерозрізнюваних процесів. Нелінійна оптика забезпечує механізм утворення фотонних пар, тоді як інтерференція амплітуд визначає їх квантовий стан. Основною умовою є відсутність інформації про шлях утворення фотонів, що забезпечує нерозкладність стану на незалежні підсистеми. Саме це робить заплутаність фундаментальним ресурсом квантових технологій. Розглянуті принципи лежать в основі сучасних джерел заплутаного світла, які використовуються у квантовій криптографії, телепортації та інших квантових інформаційних процесах.

Розглянувши механізми генерації поляризаційно заплутаних фотонів, можна зробити висновок, що поляризація є лише одним із можливих ступенів свободи, у якому реалізується квантова заплутаність. Хоча такі стани є найбільш зручними для експериментальної реалізації та широко використовуються на практиці, вони не вичерпують усього різноманіття можливих форм квантових кореляцій між фотонами. Оскільки фотони характеризуються багатьма ступенями свободи, зокрема, поляризацією, частотою, часовими параметрами, просторовою модою та орбітальним моментом імпульсу, заплутаність може бути реалізована в кожному з них або навіть одночасно в кількох. Таким чином, від аналізу конкретного прикладу поляризаційної заплутаності доцільно перейти до загальної класифікації видів фотонної заплутаності, яка дозволяє систематизувати різні фізичні реалізації та краще зрозуміти їхні властивості, можливості та області застосування.

Заплутаність виникає тоді, коли стан системи не може бути розкладений на добуток станів окремих підсистем. При цьому не має принципового значення, у якому саме ступені свободи реалізується ця нерозкладність. У випадку фотонів можливі різні фізичні реалізації заплутаності, кожна з яких характеризується власними методами генерації, способами детекції та областями застосування.

Частотна (спектральна) заплутаність. У процесі SPDC фотони пов’язані законом збереження енергії:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \, .$$

Це означає, що частоти фотонів є корельованими. У загальному випадку стан системи має вигляд:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \, |\omega_s\rangle \, |\omega_i\rangle. \tag{6.29}$$

Функція $f(\omega_s, \omega_i)$ описує спектральні кореляції між фотонами. Якщо цей стан не розкладається на добуток функцій від окремих змінних, виникає частотна заплутаність.

Часова заплутаність. Часова заплутаність пов'язана з невизначеністю моменту народження фотонів. У випадку коротких імпульсів накачки або використання інтерферометричних схем формується суперпозиція різних часових альтернатив. Типовий стан має вигляд:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|t_1\rangle \, |t_1\rangle + |t_2\rangle \, |t_2\rangle), \tag{6.30}$$

де t_1 і t_2 – різні часові інтервали. Така заплутаність широко використовується у квантовій криптографії.

Заплутаність за орбітальним моментом імпульсу (просторова). Закон збереження імпульсу:

$$\overrightarrow{k_p} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_\imath}$$

призводить до кореляцій у напрямках поширення фотонів.

Стан може бути записаний як

$$|\Psi\rangle = \int d\overrightarrow{k_s} d\overrightarrow{k_\imath} f(\overrightarrow{k_s}, \overrightarrow{k_\imath}) \, |\overrightarrow{k_s}\rangle \, |\overrightarrow{k_\imath}\rangle. \tag{6.31}$$

Це означає, що напрямок руху одного фотона визначає напрямок іншого. Фотони можуть нести орбітальний момент імпульсу **(**OAM –Orbital Angular Momentum), пов'язаний із закрученою структурою хвильового фронту. У процесі SPDC виконується закон збереження

$$l_p = l_s + l_i, \tag{6.32}$$

l – квантове число орбітального моменту. Це дозволяє формувати стани вигляду:

$$|\Psi\rangle = \sum_l c_l \, |l\rangle \, |-l\rangle, \tag{6.33}$$

які мають високовимірну структуру.

Гіперзаплутаність. У загальному випадку фотони можуть бути заплутані одночасно у кількох ступенях свободи, наприклад, поляризація, частота, час, просторові моди. Такий стан називається гіперзаплутаним і має вигляд:

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{pol} \otimes |\Psi\rangle_{freq}. \quad (6.34)$$

Цей запис означає, що загальний стан фотонів складається з двох незалежних частин, тобто заплутаність є окремо в поляризації і окремо – в частоті. $|\Psi\rangle_{pol}$ і $|\Psi\rangle_{freq}$ – це частини повного квантового стану, що описують різні ступені свободи фотонів (поляризацію та частоту), $|\Psi\rangle_{pol}$ – це стан у поляризації. Це частина стану, яка описує поляризацію фотонів, наприклад $|\Psi\rangle_{pol} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$; $|\Psi\rangle_{freq}$ – це стан у частоті. Це частина стану, яка описує частоти фотонів, наприклад $|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle$.

Приклад гіперзаплутаності:

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\omega_1\omega_2\rangle + |\omega_2\omega_1\rangle)\right). \quad (6.35)$$

Гіперзаплутаність відкриває можливості для збільшення інформаційної ємності квантових систем.

Фізичні інтерпретації:

1. Заплутаність як універсальна властивість. Вона може реалізовуватися в будь-якому ступені свободи.

2. Закони збереження як джерело кореляцій: енергія та імпульс визначають структуру заплутаності.

3. Розширення інформаційного простору. Використання додаткових ступенів свободи збільшує можливості кодування інформації.

Для кращого розуміння розглянемо кілька прикладів.

1. Частотна (energy-time)заплутаність. Розглянемо стан:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle.$$

Закон збереження енергії:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i$$

зумовлює сильну кореляцію частот фотонів. Вимірювання частоти одного фотона визначає частоту іншого, що є проявом заплутаності.

2. Часова (time-bin) заплутаність. Time-bin – це квантовий стан, у якому інформація закодована у часі появи фотона, тобто замість поляризації використовують час приходу фотона. Фотон може існувати у двох часових станах: $|\, e\rangle$ та $|\, l\rangle$. Заплутаний стан має вигляд:

$$|\, \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\, e\rangle_A \,|\, e\rangle_B + |\, l\rangle_A \,|\, l\rangle_B). \tag{6.36}$$

Такий тип заплутаності є стійким до декогеренції у волоконних каналах, оскільки не залежить від поляризації.

3. OAM-заплутаність. Фотони можуть мати орбітальний момент імпульсу:

$$|\, l\rangle, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.37}$$

Заплутаний стан:

$$|\, \Psi\rangle = \sum_l c_l \,|\, l\rangle \,|\, -l\rangle. \tag{6.38}$$

Цей тип заплутаності є багатовимірним і дозволяє кодувати більше інформації, ніж поляризаційні стани.

4. Гіперзаплутаність. Розглянемо стан:

$$|\, \Psi\rangle = |\, \Psi\rangle_{pol} \otimes |\, \Psi\rangle_{freq}. \tag{6.39}$$

Якщо обидві частини є заплутаними, система демонструє гіперзаплутаність, тобто одночасну заплутаність у кількох ступенях свободи.

Фотони можуть бути заплутані не лише за поляризацією, але й у різних фізичних ступенях свободи, таких як частота, час, імпульс і орбітальний момент. Це значно розширює можливості реалізації квантових інформаційних протоколів. Рис. 6.6 узагальнює існуючі типи заплутаних фотонів.

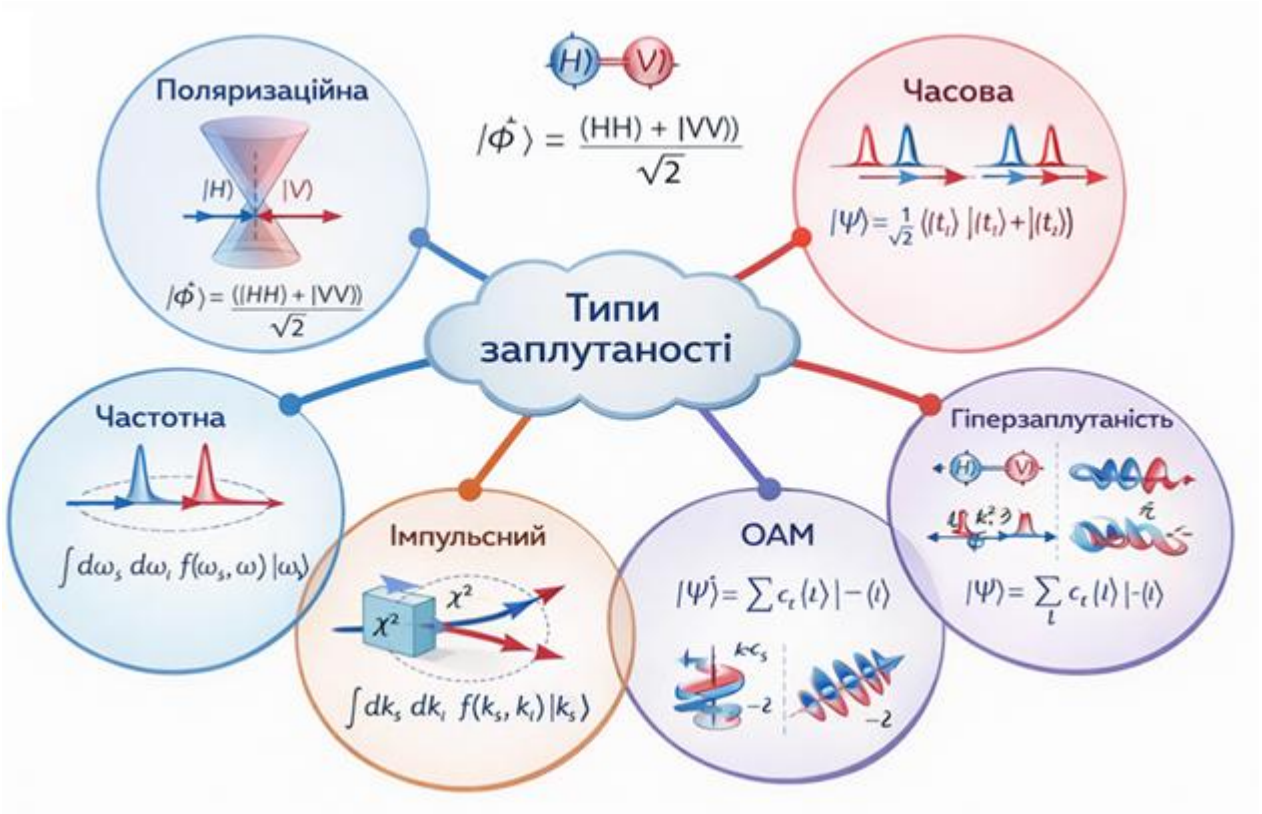


Рис. 6.6. Основні типи заплутаності фотонів у різних ступенях свободи

Рисунок узагальнює основні фізичні реалізації заплутаності фотонів, що виникають у різних ступенях свободи електромагнітного поля. У центрі представлено поняття заплутаності як універсальної квантової властивості, тоді як навколо показані її конкретні прояви.

Поляризаційна заплутаність, представлена у верхній лівій частині, описується станами Белла і є найбільш поширеною у квантових оптичних експериментах. Часова заплутаність ґрунтується на суперпозиції різних моментів народження фотонів і використовується у стабільних телекомунікаційних системах. Частотна (спектральна) заплутаність виникає внаслідок закону збереження енергії в процесі SPDC і проявляється у вигляді кореляцій між частотами фотонів. Імпульсна (просторова) заплутаність пов’язана з виконанням закону збереження імпульсу і визначає кореляції у напрямках поширення фотонів. Заплутаність за орбітальним моментом імпульсу (OAM) характеризується наявністю закручених хвильових фронтів і дозволяє

реалізовувати багатовимірні квантові стани. Гіперзаплутаність відповідає одночасній заплутаності у кількох ступенях свободи, що суттєво розширює можливості кодування квантової інформації. Таким чином, рисунок демонструє, що заплутаність не є властивістю окремого параметра, а універсальною характеристикою квантових систем, яка може проявлятися у різних фізичних формах. Кожен тип заплутаності має власні фізичні особливості та області застосування, що дозволяє адаптувати квантові системи до конкретних задач. Розуміння цих типів є необхідною умовою для побудови сучасних квантових технологій.

6.4. Експериментальні схеми вимірювання у базисі Белла

Раніше було розглянуто фізичні механізми генерації заплутаних фотонів, зокрема процес спонтанного параметричного розщеплення, умови фазового синхронізму та різні типи заплутаності. Було показано, що заплутаність виникає як наслідок когерентної суперпозиції нерозрізнюваних процесів. Однак сама наявність теоретичного опису заплутаного стану не є достатньою для підтвердження його фізичної реалізації. Необхідно мати експериментальні критерії, які дозволяють відрізнити квантові кореляції від класичних. Такий критерій забезпечують нерівності Белла, які дозволяють перевірити некласичний характер кореляцій.

Розглянемо квантовий опис процесу SPDC з урахуванням операторного формалізму, а також розгляд методів експериментальної детекції заплутаності на основі Белл-тестів. Для строгого опису процесу SPDC використовується квантово-польовий підхід, у якому електромагнітне поле розглядається як сукупність квантових мод. У цьому формалізмі процес розщеплення фотона описується через оператори народження та знищення. Цей підхід дозволяє не лише описати генерацію фотонних пар, але й отримати аналітичні вирази для кореляцій між ними, що безпосередньо пов’язані з експериментальними вимірюваннями.

У наближенні слабкої нелінійності процес SPDC описується гамільтоніаном взаємодії

$$\widehat{H}_{\text{взаємодії}} \sim \chi^{(2)} a_p a_s^{\dagger} a_i^{\dagger} + h.c., \tag{6.40}$$

де a_p – оператор знищення фотона накачки; $a_s^{\dagger}$, $a_i^{\dagger}$– оператори народження фотонів; $h.\ c.$ – ермітово спряжений член. Цей гамільтоніан описує перехід одного фотона у пару фотонів.

У першому порядку теорії збурень стан системи має вигляд

$$|\ \Psi\rangle \approx|\ 0\rangle + \epsilon\ |\ 1_s, 1_i\rangle, \tag{6.41}$$

де ϵ – мала амплітуда процесу.

У загальному випадку:

$$|\ \Psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i)\ |\ \omega_s\rangle\ |\ \omega_i\rangle. \tag{6.42}$$

Цей стан є заплутаним, якщо функція $f(\omega_s, \omega_i)$ не розкладається у добуток. Для опису експериментальних вимірювань використовуються кореляційні функції другого порядку

$$G^{(2)}(t_s, t_i) = \left\langle \Psi \mid E_s^{(-)} E_i^{(-)} E_i^{(+)} E_s^{(+)} \mid \Psi \right\rangle, \tag{6.43}$$

де $G^{(2)}$ – функція збігів; $E^{(+)}$ – оператор знищення фотона; $E^{(-)}$ – оператор народження фотона; t_s і t_i – це моменти часу детектування сигнального s та додаткового i фотонів; $G^{(2)}(t_s, t_i)$ – ймовірність того, що фотон s зафіксовано в момент t_s, а фотон i – у момент t_i.

Кореляційна функція $G^{(2)}$ визначає ймовірність одночасної реєстрації двох фотонів. Для перевірки заплутаності використовуються нерівності Белла (Белл-тести). Найпоширенішою є форма CHSH:

$$S =|\ E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')\ | \leq 2, \tag{6.44}$$

де S – параметр Белла; $E(a, b)$ – кореляційна функція для напрямків вимірювання a, b; a,a',b,b' – кути поляризаторів;

У квантовій механіці можливе

$$S \leq 2\sqrt{2},$$

що перевищує класичну межу. Белл-тести перевіряють можливість опису системи в рамках локальних прихованих параметрів. Порушення нерівностей означає, що кореляції не можуть бути пояснені класично. У типовому експерименті: фотони проходять через поляризатори; змінюються кути вимірювання; реєструються збіги. На основі цих даних обчислюється параметр S.

Розглянемо фізичні інтерпретації.

1. Кореляції як прояв заплутаності. Результати вимірювань пов'язані сильніше, ніж дозволяє класична фізика.

2. Порушення класичних меж. Квантові системи виходять за межі локального реалізму.

3. Роль вимірювання. Вибір базису визначає спостережувані кореляції.

Розглянемо наступні приклади.:

1. Кореляційна функція другого порядку. Ймовірність одночасного детектування двох фотонів визначається функцією:

$$G^{(2)}(t_s, t_i) = \left\langle \Psi \mid E_s^{(-)} E_i^{(-)} E_i^{(+)} E_s^{(+)} \mid \Psi \right\rangle. \tag{6.45}$$

Ця величина описує кореляції між подіями детекції у двох каналах. Наявність піку при $t_s \approx t_i$ свідчить про народження фотонів у межах однієї пари, що є експериментальним проявом SPDC.

2. Вимірювання заплутаності (Bell-тест). Для перевірки заплутаності вимірюють кореляції:

$$E(a, b) = \langle A(a) B(b) \rangle \tag{6.46}$$

та обчислюють параметр:

$$S = \mid E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \mid. \tag{6.47}$$

Якщо $S > 2$, то система не може бути описана класичною теорією. Таким чином, порушення нерівності Белла є експериментальним підтвердженням заплутаності.

3. Вплив часових кореляцій. Нехай $\tau = t_s - t_i$. Тоді функція $G^{(2)}(\tau)$ має вигляд вузького піку. Це означає, що фотони народжуються майже одночасно.

Ширина піку визначається когерентними властивостями джерела і дозволяє оцінити часову структуру заплутаного стану.

Квантовий опис процесу SPDC дозволяє строго формалізувати генерацію заплутаних фотонів і передбачити їх кореляційні властивості. Белл-тести забезпечують експериментальну перевірку цих кореляцій і дозволяють відрізнити квантові ефекти від класичних. Порушення нерівностей Белла є фундаментальним доказом некласичної природи квантових систем і підтверджує існування заплутаності як фізичного явища. Розглянутий підхід завершує побудову фізичної картини генерації та детекції заплутаних фотонів і створює основу для переходу до практичних квантових технологій.

Розглянувши квантовий опис процесу SPDC та методи детекції заплутаності, можна сформувати повне теоретичне уявлення про те, як саме виникають корельовані фотонні пари і яким чином їхні квантові властивості проявляються у вимірювальних статистиках. Проте сам по собі цей формалізм, хоч і є необхідним, ще не дає відповіді на питання про те, як реалізувати відповідні процеси в реальних фізичних установках з урахуванням обмежень експериментальної техніки. Практична реалізація квантових інформаційних протоколів потребує надійних фізичних джерел заплутаних фотонів, здатних забезпечити стабільність, керованість і відтворюваність квантових станів. Саме тому важливим є аналіз експериментальних підходів до генерації таких станів. Розглянемо основні типи експериментальних джерел заплутаних фотонів та аналіз їх фізичних принципів і характеристик.

У більшості сучасних експериментів джерела заплутаних фотонів базуються на нелінійно-оптичних процесах, насамперед SPDC. Водночас розвиток технологій призвів до появи альтернативних підходів, зокрема використання напівпровідникових структур та інтегрованої фотоніки. Таким чином, існує кілька класів джерел, які відрізняються фізичним механізмом генерації, спектральними властивостями та практичними характеристиками. Розглянемо їх сутність.

Джерела на основі SPDC у нелінійних кристалах. Найбільш поширеним джерелом заплутаних фотонів є нелінійні кристали з нелінійною сприйнятливістю $\chi^{(2)}$) , такі як β-борат барію BaB_2O_4 (BBO), дигідрофосфат калію KH_2PO_4 (KDP), періодично поляризований ніобат літію $LiNbO_3$ (PPLN). Вони використовуються для генерації заплутаних фотонів у процесах типу SPDC. У цих системах використовується лазерна накачка; відбувається SPDC; генеруються пари фотонів із корельованими параметрами.Для отримання заплутаності застосовуються двокристальні схеми; інтерферометри (Саньєка); фазово-узгоджені конфігурації. Такі джерела забезпечують високу якість заплутаних станів і широко використовуються у лабораторних умовах.

Інтерферометричні джерела. Інтерферометричні схеми дозволяють реалізувати когерентну суперпозицію різних процесів генерації. Прикладом є інтерферометр Саньєка та інтерферометр Маха–Цендера (Mach–Zehnder interferometer). Інтерферометр Маха–Цендера – це інтерферометрична оптична схема, яка використовується для розділення, модифікації та подальшого інтерференційного поєднання світлових хвиль.. Вона є однією з базових структур у квантовій оптиці та широко застосовується в квантових мережах. У таких системах один і той самий фотон накачки може проходити різними шляхами. Інтерферометр Саньєка використовує протилежні напрямки поширення світла в одному контурі, тоді як Інтерферометр Маха–Цендера розділяє світло на два різні шляхи і знову їх об’єднує. Ці шляхи є нерозрізнюваними і виникає інтерференція амплітуд. Це дозволяє отримувати високостабільні заплутані стани.

Джерела на основі напівпровідникових квантових точок. Альтернативним підходом є використання квантових точок, у яких заплутані фотони генеруються внаслідок каскадного випромінювання. Процес включає збудження екситонного стану, послідовне випромінювання двох фотонів. формування заплутаного стану. Перевагою таких джерел є детермінованість генерації і можливість інтеграції у фотонні чіпи.

Інтегровані фотонні джерела. Сучасні технології дозволяють реалізувати джерела заплутаних фотонів на інтегрованих платформах, таких як кремнієва фотоніка, хвилеводи, мікрорезонатори. У таких системах використовується нелінійність третього порядку $\chi^{(3)}$, що призводить до процесів чотирихвильового змішування. Це дозволяє створювати компактні джерела та інтегрувати їх у квантові мережі.

Якість джерела заплутаних фотонів визначається такими характеристиками: яскравість – кількість генерованих пар; ступінь заплутаності – визначається через Bell-параметр; когерентність – часові та спектральні властивості; чистота стану – відсутність змішаності.

Наведемо фізичні інтерпретації:

1. Джерело як генератор квантових кореляцій: заплутаність формується у момент генерації фотонної пари.

2. Роль нерозрізнюваності: будь-яка інформація про шлях генерації руйнує заплутаність.

3. Інженерія квантових станів: зміна параметрів системи дозволяє керувати типом заплутаності.

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо такі приклади.

1. Джерело на основі SPDC (BBO-кристал). Лазерна накачка проходить через нелінійний кристал (наприклад, BBO), у якому відбувається SPDC:

$$|\, p\rangle \rightarrow |\, s\rangle\, |\, i\rangle. \qquad (6.48)$$

За відповідного фазового синхронізму генеруються фотонні пари, які можуть перебувати у заплутаному стані. Це є найбільш поширений тип лабораторних джерел.

2. Джерело Саньєка. Накачка розділяється на два протилежні напрямки в інтерферометрі Саньєка. У кожному напрямку відбувається SPDC, і результати інтерферують. В результаті формується стабільний заплутаний стан:

$$|\, \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\, HH\rangle + |\, VV\rangle).$$

Це джерело характеризується високою стабільністю і широко використовується у квантових комунікаціях.

3. Джерело на основі квантових точок. У напівпровідниковій квантовій точці відбувається каскадний перехід:

$$|XX\rangle \rightarrow |X\rangle \rightarrow |0\rangle, \tag{6.49}$$

що супроводжується випромінюванням двох фотонів. Ці фотони можуть бути заплутаними за поляризацією. Такий підхід забезпечує детерміновану генерацію фотонів, на відміну від SPDC.

4. Інтегроване фотонне джерело. У хвилеводах використовується процес чотирихвильового змішування:

$$\omega_p + \omega_p \rightarrow \omega_s + \omega_i\,, \tag{6.50}$$

Це дозволяє створювати компактні джерела заплутаних фотонів, інтегровані у фотонні чіпи.

Експериментальні джерела заплутаних фотонів є ключовим елементом сучасних квантових технологій. Найбільш поширеними є джерела на основі SPDC, які забезпечують високу якість заплутаних станів. Водночас розвиток напівпровідникових і інтегрованих платформ відкриває нові можливості для створення компактних і масштабованих квантових систем. Різні типи джерел дозволяють реалізовувати широкий спектр квантових станів і адаптувати їх до конкретних задач квантової комунікації, обчислень і метрології. Таким чином, експериментальні джерела формують основу практичної реалізації квантових інформаційних процесів. Однак для повноцінного аналізу квантових систем необхідно не лише встановити наявність заплутаності, але й кількісно її охарактеризувати. Таким чином, від розгляду способів генерації заплутаних фотонів логічно перейти до введення кількісних характеристик квантової заплутаності, які дозволяють не лише констатувати її наявність, але й дати точну числову оцінку, порівнювати різні стани між собою та аналізувати їхні інформаційні можливості.

Квантова заплутаність не є безпосередньо вимірюваною величиною, оскільки вона не відповідає жодному оператору вимірювання. Натомість її

наявність і ступінь визначаються через властивості квантового стану, зокрема його матриці густини та кореляційних функцій. Таким чином, характеризація заплутаності базується на аналізі структури стану та статистичних властивостей результатів вимірювань.

Квантовий стан двофотонної системи описується матрицею густини:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid. \tag{6.51}$$

Стан називається сепарабельним, якщо його можна подати у вигляді

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \tag{6.52}$$

Якщо таке подання неможливе, стан є заплутаним.

Однією з основних кількісних характеристик є ентропія фон Неймана $S(\rho)$ (5.65). Для чистого стану заплутаність визначається ентропією редукованої матриці

$$S(\rho_A) = S(\rho_B). \tag{6.53}$$

Чим більша ентропія, тим вищий ступінь заплутаності. Для двокубітних систем широко використовується величина конкурентності C:

$$C = max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \tag{6.54}$$

де λ_i – власні значення спеціальної матриці. Значення C = 0 відповідає відсутності заплутаності, значення C = 1 – максимальна заплутаність.

Мінімальні ресурси, необхідні для створення даного стану визначаються величиною

$$E_F = h\left(\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{C}^2}}{2}\right), \tag{6.55}$$

де h – бінарна ентропія.

У експериментальних умовах часто як міру заплутаності використовують Белл-параметр

$$S \leq 2.$$

Порушення цієї нерівності (S > 2) є ознакою заплутаності. Для повної характеризації стану використовується квантова томографія – метод

реконструкції матриці густини на основі результатів вимірювань. Цей підхід дозволяє відновити повний стан системи та обчислити всі характеристики заплутаності.

Фізичні інтерпретації.

1. Заплутаність як ресурс: вона визначає можливості квантових інформаційних протоколів.

2. Ентропія як міра невизначеності: зростання ентропії відповідає збільшенню заплутаності.

3. Кореляції як експериментальний критерій: Белл-тести дають практичну перевірку заплутаності.

Застосування розглянутих підходів проілюструємо на наступних прикладах.

1. Максимально заплутаний стан (Bell-стан). Розглянемо стан

$$| \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| HH\rangle + | VV\rangle). \tag{6.56}$$

Редукована матриця густини для підсистеми є максимально змішаною:

$$\rho_A = \frac{1}{2} I. \tag{6.57}$$

Ентропія фон Неймана:

$$S(\rho_A) = log_2 2. \tag{6.58}$$

Конкурентність C = 1. Це відповідає максимально можливій заплутаності двокубітної системи.

2. Частково заплутаний стан. Розглянемо:

$$| \Psi\rangle = \alpha | HH\rangle + \beta | VV\rangle, \quad | \alpha |^2 + | \beta |^2 = 1.$$

Якщо $|\alpha| \neq |\beta|$, стан є частково заплутаним. Конкурентність $C = 2|\alpha\beta|$. Таким чином, ступінь заплутаності визначається співвідношенням амплітуд.

3. Змішаний стан (вплив шуму). Розглянемо стан:

$$\rho = p | \Phi^+\rangle \langle \Phi^+ | + (1-p)\frac{I}{4}. \tag{6.59}$$

Це так званий стан Вернера. При зменшенні p конкурентність зменшується і заплутаність зникає при певному порозі. Цей приклад демонструє вплив шуму на квантові кореляції.

4. Bell-порушення. Для заплутаного стану $S=2\sqrt{2}$. Для класичних станів $S \leq 2$. Це дозволяє експериментально оцінити заплутаність через кореляції вимірювань.

Кількісні характеристики заплутаності є визначальними для аналізу квантових систем, що дозволяє перейти від якісного опису до кількісного. Вона базується на аналізі матриці густини, ентропійних характеристик та кореляційних властивостей системи. Різні міри заплутаності відображають різні аспекти квантових кореляцій і дозволяють оцінити ефективність квантових інформаційних процесів. Експериментальні методи, зокрема Bell-тести та квантова томографія, забезпечують практичну реалізацію цих підходів. Таким чином, кількісні характеристики заплутаності завершують побудову повної фізичної картини генерації, опису та використання заплутаних фотонів.

6.5. Прикладне застосування заплутаних фотонних станів

Заплутаність квантових станів є фундаментальним ресурсом сучасної квантової теорії інформації, що не має класичного аналога. Вона проявляється у вигляді кореляцій між частинами складеної системи, які не можуть бути пояснені жодною локальною теорією прихованих параметрів. Особливу роль відіграють фотонні реалізації заплутаності, оскільки фотони є природними носіями інформації в оптичних каналах зв'язку, практично не взаємодіють із середовищем і можуть передаватися на великі відстані. У межах квантової механіки це робить їх ідеальними кандидатами для побудови квантових комунікаційних систем.

Формально заплутаний стан двох фотонів описується вектором у тензорному добутку гільбертових просторів:

$$|\Psi\rangle \in \text{Ĥ}_A \otimes \text{Ĥ}_B. \qquad (6.60)$$

Типовим прикладом є один із станів Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle), \tag{6.61}$$

де $|H\rangle$ та $|V\rangle$ позначають горизонтальну і вертикальну поляризації. Такий стан не може бути представлений як добуток станів окремих фотонів $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B$, що і є ознакою заплутаності. Вимірювання поляризації одного фотона миттєво визначає результат для іншого, незалежно від відстані між ними, що безпосередньо пов'язано з порушенням нерівностей Белла. Фізична реалізація таких станів зазвичай здійснюється через спонтанне параметричне розсіяння (SPDC) у нелінійних кристалах. При цьому фотон високої енергії у нелінійному кристалі розпадається на пару фотонів нижчої енергії, тобто фотон «накачки» з частотою ω_p розпадається на два фотони з частотами ω_s і ω_i, що задовольняють умови збереження енергії та імпульсу. Ці умови забезпечують кореляції не лише в поляризації, але й у частоті, імпульсі та часі народження фотонів, що відкриває можливість багатовимірного кодування квантової інформації.

Переходячи від фундаментального опису до прикладних аспектів, слід підкреслити, що заплутаність виступає ресурсом, який може бути використаний для реалізації задач, принципово недоступних у класичних системах. Одним із базових прикладів є квантова телепортація. У цьому протоколі невідомий квантовий стан переноситься від одного об'єкта до іншого за допомогою спільного заплутаного стану і класичного каналу зв'язку. У цьому протоколі використовується три системи: A, B і C. Нехай система A перебуває у стані $|\psi\rangle$, який необхідно передати системі C. Якщо системи B і C перебувають у заплутаному стані, то виконання спільного вимірювання Белла над системами A і B дозволяє перенести стан $|\psi\rangle$ на систему C з точністю до унітарного перетворення, тобто стан системи C переходить у $|\psi\rangle$. Таким чином, квантова інформація переноситься без фізичної передачі носія стану.

Безпосередньо пов'язаним із телепортацією є протокол надщільного кодування. Якщо дві сторони попередньо мають заплутану пару, одна з них може застосувати до свого фотона один із чотирьох унітарних операторів (наприклад,

матриці Паулі), після чого передати його іншій стороні. Виконавши спільне вимірювання, приймач може відновити два біти класичної інформації. Таким чином, заплутаність дозволяє подвоїти інформаційну пропускну здатність каналу.

Наступною важливою областю є квантова криптографія. На відміну від протоколів, що використовують одиночні фотони, протоколи на основі заплутаності (наприклад, E91) дозволяють безпосередньо перевіряти безпеку через порушення нерівностей Белла. Якщо спостережувані кореляції перевищують класичну межу, це гарантує відсутність стороннього втручання. Більш того, сучасні підходи, такі як device-independent (пристрій-незалежна) криптографія, дозволяють забезпечити безпеку навіть без довіри до внутрішньої будови пристроїв.

Крім задач комунікації, заплутані фотонні стани знаходять застосування у квантовій метрології. Слід зазначити, що корельованим флуктуаціям заплутані фотонні стани дозволяють перевищувати класичні межі точності вимірювань. У класичному випадку точність обмежується так званою стандартною квантовою межею:

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{6.62}$$

де N – кількість фотонів. Використання заплутаних станів, зокрема так званих NOON-станів

$$|\, NOON\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\, N,0\rangle + |\, 0,N\rangle), \tag{6.63}$$

дозволяє досягти граничної (Гейзенбергової) межі:

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{N}. \tag{6.64}$$

Це має критичне значення для задач інтерферометрії, гравітаційних вимірювань та оптичної сенсорики.

Ще одним перспективним напрямком є квантова візуалізація. Заплутані фотони дозволяють реалізувати методи, такі як «ghost imaging» (примарна

(кореляційна) візуалізація), у яких зображення формується на основі кореляцій між фотонами, один з яких взаємодіє з об’єктом, а інший – ні. Це відкриває можливості для зйомки в умовах низької освітленості або через непрозорі середовища.

Ще одним напрямком є квантові мережі, де заплутаність використовується як ресурс для побудови розподілених квантових систем. Основною проблемою є втрати у каналах зв’язку, які експоненційно зростають із відстанню. Для її вирішення використовуються квантові повторювачі, які реалізують процедури очищення заплутаності (entanglement purification) та перестановки заплутаності (entanglement swapping). Остання дозволяє створювати заплутаність між віддаленими вузлами, які ніколи не взаємодіяли безпосередньо.

З математичної точки зору заплутаність характеризується через неможливість представлення матриці густини у вигляді

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B . \tag{6.65}$$

Якщо таке представлення існує, стан ρ_{AB} є сепарабельним; якщо ні – заплутаним. Для кількісної оцінки використовуються різні міри, зокрема: ентропія заплутаності; конкуренція (concurrence); негативність (negativity). Ці величини дозволяють оцінити «ступінь» заплутаності та її придатність для різних задач.

Практична реалізація квантових технологій на основі фотонів стикається з низкою технічних проблем. Основними з них є втрати у каналах зв’язку, декогеренція, обмежена ефективність детекторів та складність масштабування систем. Для їх подолання розробляються нові технології, включаючи інтегральну фотоніку, де всі елементи (джерела, інтерферометри, детектори) розміщуються на одному чіпі. Це забезпечує стабільність і відкриває шлях до масового виробництва квантових пристроїв.

Окрему роль відіграє використання багатовимірної заплутаності, де інформація кодується не лише в поляризації, але й у часових бінах, орбітальному

моменті імпульсу та частоті. Це дозволяє значно збільшити пропускну здатність квантових каналів.

Фундаментально важливим є також зв’язок між заплутаністю і нелокальністю. Хоча всі нелокальні стани є заплутаними, не всі заплутані стани демонструють порушення нерівностей Белла. Це підкреслює багатогранність поняття заплутаності та його різні аспекти. Таким чином, можна зазначити, що заплутані фотонні стани є універсальним ресурсом квантових технологій, який не має класичного аналога. Вони лежать в основі квантових комунікацій, криптографії, метрології, візуалізації та мереж. Їх дослідження поєднує фундаментальні питання природи реальності з практичними задачами створення нових інформаційних технологій, що визначають розвиток сучасної науки і техніки.

РОЗДІЛ 7. ПРОТОКОЛИ ТЕЛЕПОРТАЦІЇ ТА ПЕРЕДАЧІ КВАНТОВИХ СТАНІВ

7.1. Математичний формалізм та алгоритм базового протоколу телепортації

Квантова телепортація є одним із найяскравіших і водночас найбільш концептуально глибоких явищ сучасної квантової фізики та квантової інформатики. Незважаючи на свою назву, вона не має нічого спільного з миттєвим переміщенням матеріальних об'єктів у просторі, як це часто зображається в науковій фантастиці. Натомість квантова телепортація – це протокол передачі квантового стану від однієї фізичної системи до іншої без прямого переміщення носія цього стану. Основною метою телепортації є відтворення невідомого квантового стану в іншому місці з максимальною точністю, використовуючи ресурси квантової заплутаності та класичної комунікації. Вперше теоретично цей протокол було запропоновано в 1993 році групою дослідників під керівництвом Чарльза Беннетта.

Ключовим елементом телепортації є квантова заплутаність – специфічний тип кореляції між квантовими системами, який не має класичного аналога. Заплутані частинки поводяться як єдина система незалежно від відстані між ними, що дозволяє реалізувати передачу квантової інформації в непрямий спосіб.

Для розуміння квантової телепортації необхідно спочатку чітко усвідомити, що таке квантовий стан та як він описується математично. У квантовій механіці стан найпростішої системи – кубіта – задається у вигляді суперпозиції базисних станів (1.75). Цей стан є невідомим, тобто його параметри не відомі передавачу. Саме передача такого стану і є задачею квантової телепортації. Однак важливо підкреслити, що безпосередньо виміряти стан і передати його класичними засобами неможливо через фундаментальні обмеження квантової механіки, зокрема через руйнування суперпозиції при вимірюванні та теорему про заборону клонування.

Квантова телепортація базується на трьох ключових ресурсах: невідомий квантовий стан, який потрібно передати; пара заплутаних кубітів, розподілених між двома сторонами; класичний канал зв'язку. Нехай існують два учасники протоколу – традиційно їх називають Аліса та Боб. Аліса має кубіт у стані $|\psi\rangle$, який потрібно передати Бобу. Крім того, Аліса і Боб заздалегідь поділяють пару заплутаних кубітів. Телепортація відбувається у кілька кроків:

Аліса виконує спільне вимірювання свого кубіта та своєї частини заплутаної пари. В результаті система переходить у один із чотирьох можливих станів. Аліса передає Бобу два класичних біти інформації. Боб застосовує відповідну унітарну операцію до свого кубіта. В результаті Боб отримує точну копію стану $|\psi\rangle$.

Схематичне зображення процесу квантової телепортації наведено на рис. 7.1.

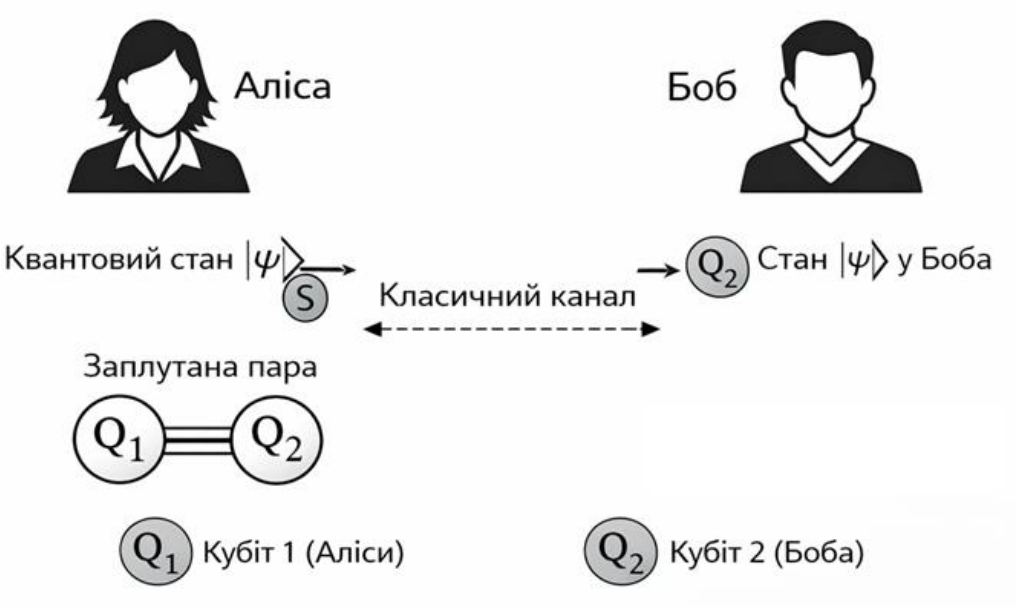


Рис. 7.1. Загальна схема квантової телепортації

На рисунку зображено принципову схему реалізації протоколу квантової телепортації між двома учасниками – Алісою та Бобом. Квантовий стан $|\psi\rangle$ це стан кубіта, який знаходиться у Аліси. Заплутана пара кубітів Q_1 і Q_2 створюється заздалегідь. Один кубіт Q_1 знаходиться у Аліси, другий кубіт Q_2 – у Боба. Пара перебуває у заплутаному стані (наприклад, стан Белла). Аліса

виконує спільне вимірювання над своїм кубітом $|\psi\rangle$ і кубітом Q_1 (блок S). В результаті стан $|\psi\rangle$ руйнується. Аліса через класичний канал передає Бобу результат вимірювання (2 біти). Цей канал є звичайним (не квантовим). Передача не є миттєвою. Боб застосовує відповідну квантову операцію до свого кубіта Q_2. Після цього його кубіт переходить у стан $|\psi\rangle$. Цей процес використовує заплутаність і класичну інформацію.

Фундаментальна причина працездатності протоколу полягає у властивостях заплутаності. Початковий стан всієї системи (трьох кубітів) можна записати як

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi+\rangle, \qquad (7.1)$$

де $\otimes$ – тензорний добуток (комбінування систем); перший множник – це стан, що передається; другий множник – заплутана пара. Після математичних перетворень цей стан можна представити як суперпозицію станів Белла, що дозволяє перенести інформацію про α та β на кубіт Боба.

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, звернемося до прикладів.

1. Телепортація базисного стану. Нехай:

$$|\psi\rangle = |0\rangle.$$

У цьому випадку: $\alpha = 1, \beta = 0$. Після виконання протоколу Боб отримає стан $|0\rangle$ незалежно від результату вимірювання Аліси, але з урахуванням відповідної корекції. Це демонструє, що протокол працює навіть для простих станів.

2. Телепортація суперпозиції. Розглянемо стан:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

де $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Цей стан є максимальною суперпозицією. Після телепортації Боб отримає точно такий самий стан, включаючи фазові співвідношення між компонентами. Це принципово важливо, оскільки класичні методи не дозволяють передати фазову інформацію.

3. Узагальнений стан. Нехай:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

Після вимірювання Аліси можливі чотири результати, і стан Боба набуває вигляду:

$$\alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle$$
$$\alpha \mid 0\rangle - \beta \mid 1\rangle$$
$$\beta \mid 0\rangle + \alpha \mid 1\rangle$$
$$\beta \mid 0\rangle + \alpha \mid 1\rangle$$

Боб застосовує відповідні оператори Паулі: I – тотожний оператор: X – бітове заперечення; Z – фазове заперечення; XZ – комбінація. Після цього він отримує точний стан $\mid \psi\rangle$.

Квантова телепортація є фундаментальним протоколом у квантовій передачі інформації, який демонструє унікальні можливості квантових систем. Вона передає стан, а не матерію. Однак її неможливо здійснити без класичного каналу зв'язку. Таким чином, квантова телепортація поєднує три ключові елементи: квантову заплутаність, квантові вимірювання та класичну передачу інформації.

Для строгого опису процесу телепортації необхідно перейти до математичного формалізму, який дозволяє кількісно описати еволюцію квантового стану та роль заплутаності. Математичний формалізм квантової телепортації основну увагу звертає на строгий математичний опис процесу, що базується на лінійній алгебрі, теорії гільбертових просторів і властивостях квантових операторів. Саме математичний підхід дозволяє довести коректність телепортації, зрозуміти роль базису Белла, формалізувати взаємодію між квантовими та класичними каналами, узагальнити протокол на складніші системи.

У квантовій механіці стан системи описується вектором у гільбертовому просторі. Для кубіта цей простір є двовимірним, а для системи з кількох кубітів – тензорним добутком відповідних просторів. Нехай маємо стан, що передається

$$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle.$$

Заплутаний стан двох кубітів (стан Белла):

$$| \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| 00\rangle + | 11\rangle).$$

Загальний стан системи з трьох кубітів записується як

$$| \Psi\rangle = | \psi\rangle \otimes | \Phi^+\rangle. \tag{7.2}$$

Розпишемо стан у стандартному базисі

$$| \Psi\rangle = (\alpha | 0\rangle + \beta | 1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(| 00\rangle + | 11\rangle) = \tag{7.3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha | 000\rangle + \alpha | 011\rangle + \beta | 100\rangle + \beta | 111\rangle),$$

де $| abc\rangle = | a\rangle \otimes | b\rangle \otimes | c\rangle$; перші два кубіти належать Алісі, третій – Бобу.

Для аналізу телепортації зручно перейти до базису Белла:

$$\Phi^+ = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\Phi^- = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\Psi^+ = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$\Psi^- = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$$

Тоді загальний стан можна записати як:

$$| \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[| \Phi^+\rangle(\alpha | 0\rangle + \beta | 1\rangle) + | \Phi^-\rangle(\alpha | 0\rangle - \tag{7.4}$$

$$\beta | 1\rangle) + | \Phi^+\rangle(\beta | 0\rangle + \alpha | 1\rangle) + | \Phi^-\rangle(\beta | 0\rangle - \alpha | 1\rangle)].$$

Цей вираз є центральним результатом математичного формалізму телепортації. Кожен доданок відповідає можливому результату вимірювання в базисі Белла. Для опису корекції квантового стану в протоколі телепортації використовуються оператори Паулі, які є базовими однокубітними операторами:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

де I – тотожний оператор, нічого не змінює; оператор X – змінює $X | 0\rangle = | 1\rangle, X | 1\rangle = | 0\rangle$; Z – змінює фазу стану $Z | 0\rangle = | 0\rangle$, $Z | 1\rangle = -| 1\rangle$; XZ – комбінація X і Z. Ці оператори використовуються для відновлення початкового стану кубіта Боба після отримання результату вимірювання. Відповідність між результатом

вимірювання у базисі Белла, станом кубіта Боба та відповідним оператором Паулі наведено у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1. Відповідність між результатом вимірювання BSM та станом Боба

Результат вимірювання (BSM)	Стан кубіта Боба (до корекції)	Операція Боба
$\|\Phi^+\rangle = (\|00\rangle + \|11\rangle)/\sqrt{2}$	$\|00\rangle +$	$11\rangle)/\sqrt{2}$
$\|\Phi^-\rangle = (\|00\rangle - \|11\rangle)/\sqrt{2}$	$\|00\rangle -$	$11\rangle)/\sqrt{2}$
$\|\Psi^+\rangle = (\|01\rangle + \|10\rangle)/\sqrt{2}$	$\|01\rangle +$	$10\rangle)/\sqrt{2}$
$\|\Psi^-\rangle = (\|01\rangle - \|10\rangle)/\sqrt{2}$	$\|01\rangle -$	$10\rangle)/\sqrt{2}$

У першому стовпчику (результат вимірювання (BSM) наведено те, що отримує Аліса після вимірювання двох своїх кубітів. Наприклад: Φ^+ означає стан $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$; Ψ^- означає стан $(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$. Стан кубіта Боба (другий стовпчик) – це стан, який автоматично отримує Боб після вимірювання, але ще до виправлення. Наприклад: $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$ – це «переплутаний» варіант початкового стану. Операція Боба (третій стовпчик) полягає у наступному:

Якщо результат BSM – $|\Phi^+\rangle$, то Боб уже має $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ і нічого робити не треба, тобто слід застосувати оператор I.

Якщо результат BSM – $|\Phi^-\rangle$, то треба застосувати оператор Z, і тоді Боб має $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

Якщо результат BSM – $|\Psi^+\rangle$, то треба застосувати оператор X, і тоді Боб має $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$.

Якщо результат BSM – $|\Psi^-\rangle$, то треба застосувати оператор XZ, і тоді і тоді Боб має $\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle$.

Основна ідея така: Аліса виконує вимірювання (BSM); Аліса отримує один з результатів (Φ^+, Φ^-, Ψ^+ або Ψ^-); передає його Бобу; Боб застосовує відповідний оператор і отримує точно той самий стан $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$. Таким чином, стан Боба повністю визначається результатом вимірювання Аліси.

Телепортація є унітарно еквівалентною операцією, що переводить:

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \longrightarrow (\text{класична інформація}) \otimes |\psi\rangle. \qquad (7.6)$$

При цьому стан Аліси руйнується після вимірювання; стан Боба стає ідентичним початковому. Передача відбувається через кореляції. Це узгоджується з теоремою про заборону клонування.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1: Перевірка для конкретного стану. Нехай $|\psi\rangle = |0\rangle$. Тоді $\alpha = 1,\ \beta = 0$

Після розкладу залишаються лише відповідні члени з $|0\rangle$. Після телепортації Боб отримує той самий стан.

2. Стан із фазою.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Тут важливо, що знак «–» зберігається у формалізмі. Оператор Z відповідає за фазову корекцію.

3. Узагальнений аналіз. Нехай:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

З формули видно, що інформація про α і β повністю переходить до Боба. Коефіцієнти не змінюються, лише можуть переставлятисґ або змінювати знак. Це означає, що телепортація є лінійним відображенням, що зберігає структуру стану.

Математичний формалізм квантової телепортації демонструє, що цей процес є визначеним і повністю узгодженим із законами квантової механіки. Основні результати, що випливають з математичного формалізму такі: телепортація базується на розкладі стану у базисі Белла; квантова інформація передається через кореляції, а не фізичний перенос; класична інформація визначає необхідну корекцію; процес є унітарно керованим і математично

строгим. Таким чином, телепортація є не лише фізичним явищем, а й математичною конструкцією, яка лежить в основі сучасних квантових технологій і теорії квантових комунікацій.

Отриманий математичний апарат дає змогу безпосередньо сформулювати базовий протокол квантової телепортації як послідовність конкретних фізичних операцій. Розглянемо повну процедуру телепортації одного кубіта, включаючи всі математичні перетворення, квантові операції та класичну комунікацію. Особлива увага приділяється поетапному аналізу стану системи та фізичній інтерпретації кожного кроку. Розглянемо задачу: необхідно передати невідомий квантовий стан кубіта від відправника (Аліси) до отримувача (Боба), не переміщуючи сам кубіт. Нехай стан кубіта, який потрібно телепортувати, має вигляд:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

Аліса та Боб попередньо мають заплутану пару кубітів у стані Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

де перший кубіт належить Алісі, другий – Бобу. Таким чином, у системі є три кубіти: кубіт із невідомим станом; кубіт Аліси (із заплутаної пари); кубіт Боба. Базовий протокол квантової телепортації складається з шести етапів.

1. Початковий стан системи. Повний стан трьох кубітів задається як тензорний добуток:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle. \qquad (7.7)$$

Розпишемо його явно:

$$|\Psi 0\rangle = (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes 21(|00\rangle + |11\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta\,|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|100\rangle + \beta\,|111\rangle)$$

де $|abc\rangle$ – тензорний стан трьох кубітів: перший кубіт – стан, що телепортується, другий – кубіт Аліси, третій – кубіт Боба.

2. Застосування операції CNOT. CNOT (Controlled-NOT, контрольоване заперечення) – це базова двокубітна квантова операція (квантовий гейт), яка широко використовується у квантових обчисленнях і протоколах, зокрема в квантовій телепортації. Аліса застосовує двокубітну операцію CNOT, де перший кубіт – керуючий (control), другий – керований (target). Правило дії: якщо керуючий кубіт дорівнює $|1\rangle$, то другий інвертується; якщо керуючий кубіт дорівнює $|0\rangle$, то другий не змінюється.

Після застосування CNOT отримуємо:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|110\rangle + \beta\,|101\rangle). \tag{7.8}$$

3. Застосування операції Адамара. До першого кубіта застосовується оператор Адамара:

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \tag{7.9}$$

Після цього стан переходить у суперпозицію, яку можна переписати у вигляді:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) + |01\rangle(\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle) + |10\rangle(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle) + |11\rangle(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)]. \tag{7.10}$$

де перші два кубіти – система Аліси; третій – кубіт Боба.

4. Вимірювання. Аліса вимірює свої два кубіти в обчислювальному базисі. Можливі результати: 00, 01, 10, 11. Після вимірювання система колапсує до одного з чотирьох станів, а стан Боба відповідно стає:

Результат	Стан Боба
00	α
01	α
10	α
11	α

5. Класична передача. Аліса передає Бобу 2 класичних біти, що відповідають результату вимірювання.

6. Відновлення стану. Боб застосовує відповідні оператори: I – нічого не робити; X – змінює $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$; Z – змінює фазу $1\rangle \rightarrow -|1\rangle$.

Таким чином, отримуємо:

Біти	Операція
00	I
01	X
10	Z
11	XZ

Після цього Боб отримує точний стан:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

Схематичне зображення квантової телепортації наведено на рис. 7.2.

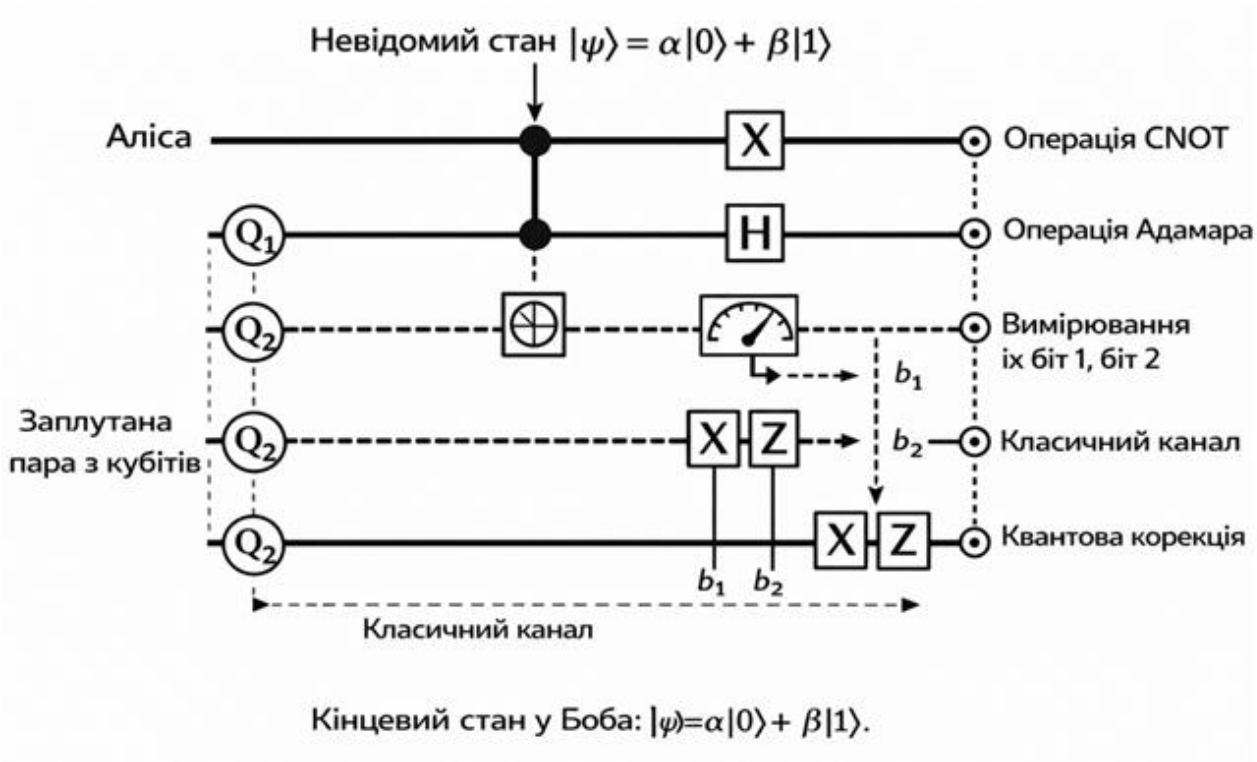


Рис. 7.2. Схематичне зображення квантової телепортації

Для кращого розуміння розглянемо кілька прикладів застосування розглянутого протоколу.

1. Простий стан.

$$|\psi\rangle = |1\rangle$$

де $\alpha = 0,\ \beta = 1$. Незалежно від результату вимірювання, після корекції Боб отримує $|1\rangle$.

2. Рівномірна суперпозиція.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Цей стан демонструє передачу фазової інформації. Після протоколу Боб відтворює точну суперпозицію.

3. Складний комплексний стан.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$$

де i – уявна одиниця

Після телепортації зберігається не лише амплітуда, але й фазовий зсув, що є критично важливим для квантових обчислень.

Базовий протокол квантової телепортації демонструє унікальне поєднання квантових і класичних ресурсів. Його ключові особливості: передача невідомого квантового стану без його вимірювання; використання заплутаності як ресурсу; необхідність класичної комунікації; повне відновлення стану з точністю до унітарного перетворення. Цей протокол є фундаментом для побудови квантових мереж, квантових повторювачів та розподілених квантових обчислень. Він також ілюструє глибокі принципи квантової механіки, зокрема взаємозв'язок між вимірюванням, інформацією та фізичною реальністю.

7.2. Принципи реалізації телепортації та роль вимірювання у базисі Белла

Розглянувши базовий протокол квантової телепортації як послідовність конкретних операцій – підготовку заплутаної пари, виконання спільного вимірювання та застосування умовних перетворень – можна побачити, що його ефективність визначається не лише самою схемою, але й глибинними

принципами, на яких вона ґрунтується. Зокрема, ключову роль відіграє спосіб, у який інформація про початковий стан «перекодовується» у кореляції між підсистемами. Це природно підводить до необхідності більш детального аналізу механізму реалізації телепортації. Адже для повного розуміння процесу важливо з'ясувати, які саме фізичні умови забезпечують перенесення квантового стану без його прямої передачі, і чому саме така послідовність операцій приводить до відновлення стану в іншій точці простору. У цьому контексті особливого значення набуває роль вимірювання у базисі Белла, яке фактично здійснює перехід від локального опису стану до глобальних кореляцій заплутаної системи. Саме це вимірювання не лише забезпечує вилучення необхідної класичної інформації, але й визначає, яке унітарне перетворення має бути застосоване для відновлення початкового стану. Таким чином, від розгляду базового протоколу логічно перейти до аналізу принципів його реалізації та центральної ролі вимірювання у базисі Белла в процесі квантової телепортації.

Вимірювання у базисі Белла (Bell State Measurement, BSM) є основним елементом квантової телепортації та багатьох інших протоколів квантової інформатики. Воно дозволяє визначити, у якому з чотирьох максимально заплутаних станів перебуває система двох кубітів. Саме BSM є тим елементом, який забезпечує перенесення квантової інформації, встановлює кореляцію між результатом вимірювання і станом Боба і переводить квантову інформацію у класичну форму. Розглянемо, як саме відбувається передача квантового стану з фізичної точки зору.

Нехай Аліса має квантову систему у невідомому стані $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle,$$

де $|\psi\rangle$ – стан кубіта; $|0\rangle,|1\rangle$ – базисні стани; $\alpha, \beta \in C$ – комплексні амплітуди; $|\alpha|^2+|\beta|^2= 1$. Аліса та Боб також мають спільну пару частинок, що перебувають у заплутаному стані Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle),$$

де $|\Phi^+\rangle$ – заплутаний стан Белла.

Завдання полягає в тому, щоб передати стан $|\psi\rangle$ від Аліси до Боба. Процедура телепортації складається з кількох етапів.

1. Формування спільного стану. Система з трьох кубітів описується тензорним добутком

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle.$$

2. Вимірювання Аліси. Аліса виконує спільне вимірювання двох своїх кубітів у базисі Белла. У результаті вона отримує один із чотирьох можливих результатів.

3. Передача класичної інформації. Аліса передає Бобу два класичних біти, що відповідають результату її вимірювання.

4. Операція Боба. На основі отриманої інформації Боб застосовує відповідне унітарне перетворення до свого кубіта, після чого його стан стає $|\psi\rangle$. При цьому початковий стан у Аліси зникає внаслідок вимірювання, а стан у Боба відтворюється з точністю до унітарного перетворення.

Таким чином, на відміну від класичної передачі, у квантовій телепортації інформація не переноситься фізичним носієм. Стан перекодується у кореляції між системами, а заплутаність виступає як ресурс передачі. Система переходить у стан, де інформація про $|\psi\rangle$ розподілена між кількома кубітами. Отже, телепортація не порушує теорему про заборону клонування, оскільки копія стану не створюється, відбувається його перенесення.

Вимірювання у базисі Белла – це вимірювання у базисі:

$$\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}. \quad (7.11)$$

Це повний ортонормований базис для двох кубітів. Кожен стан є максимально заплутаним. Після виконання BSM система проєктується на один із станів Белла. Квантова інформація переходить у вигляд класичного результату вимірювання та умовного стану Боба. Математично це описується як:

$$|\Psi\rangle \rightarrow |Bell_k\rangle \otimes U_k |\psi\rangle, \quad (7.12)$$

де $|Bell_k\rangle$ – один із чотирьох максимально заплутаних станів двох кубітів. Він виникає як результат вимірювання у базисі Белла. Індекс k просто нумерує ці стани: $k \in \{0,1,2,3\}$; U_k – відповідний оператор корекції.

Основна ідея чому BSM забезпечує передачу стану полягає у наступному: BSM не «зчитує» стан $|\psi\rangle$. Воно перенаправляє інформацію про нього. Це можливо завдяки лінійності квантової механіки, властивостям заплутаних станів, ортогональності базису Белла. Після BSM стан Боба стає $U_k|\psi\rangle$, де $U_k \in \{I, X, Z, XZ\}$. Інформація про $|\psi\rangle$ вже локалізована у Боба, але у «зашумленому» вигляді (з точністю до U_k). Для відновлення потрібна класична інформація. Результат BSM – це 2 біти: $k \in \{00,01,10,11\}$. Ці біти визначають оператор U_k. Без цієї інформації

$$\rho_B = \frac{I}{2}, \tag{7.13}$$

де ρ_B – стан Боба; I – одиничний оператор. Тобто інформація «прихована» у кореляціях.

Після розгляду теоретичних аспектів вимірювання у базисі Белла перейдемо до його фізичної реалізації у реальних квантових системах. Слід зазначити, що на практиці реалізація BSM є складною задачею, оскільки необхідно розрізняти заплутані стани, квантові системи піддаються шуму і не всі фізичні платформи дозволяють виконати повне BSM. BSM реалізує проєкційне вимірювання:

$$\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}. \tag{7.14}$$

Ці стани утворюють повний базис двокубітного простору. Кожен із них є максимально заплутаним. Тому практична реалізація залежить від фізичної природи кубітів.

1. Фотонні реалізації (квантова оптика). У фотонних системах кубіти кодуються через поляризацію (H/V) або шляхи проходження фотона. BSM реалізується через інтерференцію фотонів на дільнику променя. Основний ефект наступний: два однакові фотони взаємодіють на дільнику, їхні хвильові функції інтерферують. В результаті деякі стани Белла дають різні детекторні сигнали. Обмеження: у стандартній лінійній оптиці можна розрізнити лише 2 з 4 станів Белла.

2. Іони в пастках. Кубіти $|0\rangle$, $|1\rangle$ реалізуються як енергетичні рівні іона. Реалізація BSM здійснюється через використання лазерних імпульсів, контрольовані квантові операції і повний контроль над взаємодією. BSM виконується у два кроки: перехід до базису Белла (через CNOT + Hadamard); вимірювання у стандартному базисі. Переваги: повне розрізнення всіх 4 станів, висока точність.

3. Надпровідникові кубіти. Кубіти – це квантові стани струму, реалізовані на мікросхемах. BSM виконується через квантові гейти (CNOT, CZ) і подальше вимірювання. Використовуються мікрохвильові резонатори і квантові логічні операції.

4. Гібридні реалізації. Комбінуються різні системи: фотони + атоми; фотони + надпровідники. Мета – передача між різними платформами, створення квантових мереж.

Фізична реалізація BSM є основним етапом квантової телепортації. У реальних експериментах не всі стани Белла можна розрізнити. Ефективність становить < 100%. Виникають помилки. Все це впливає на точність телепортації.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1. Інтерпретація результату BSM. Якщо результат $|\Phi^+\rangle$, тоді стан Боба:

$$\beta\ |\ 0\rangle + \alpha\ |\ 1\rangle$$

І застосування оператора X відновлює стан.

2. Відсутність класичної передачі. Якщо результат вимірювання Белла не передається Бобу класичним каналом зв'язку, то він не знає, яку саме унітарну корекцію необхідно виконати над своїм кубітом. У цьому випадку стан Боба описується максимально змішаною матрицею густини $\rho_B = \frac{I}{2}$. Такий стан відповідає повній відсутності інформації про телепортований квантовий стан і характеризується однаковими ймовірностями всіх можливих результатів вимірювання. Отже, квантова заплутаність сама по собі не забезпечує передачу інформації; для завершення процедури телепортації необхідна передача результату вимірювання Белла класичним каналом зв'язку.

3. Фізична інтерпретація. BSM можна розглядати як «перенесення стану через заплутаність» без передачі енергії або частинок.

Розгляд квантової телепортації з точки зору фізичного змісту показує, що ключову роль відіграє вимірювання BSM.

Таким чином, вимірювання у базисі Белла є механізмом перенесення квантової інформації. Воно дозволяє передавати квантовий стан між віддаленими системами без фізичного переносу носія, однак вимагає наявності заплутаності та класичного каналу зв'язку. Квантова телепортація узгоджується з усіма розглянутими раніше обмеженнями: заборона клонування – стан не дублюється, а переноситься; неможливість надсвітлової передачі – передача потребує класичного каналу; обмеження вимірювання – інформація про стан не отримується безпосередньо; межа Голєво – класична інформація, що передається, є обмеженою. Таким чином, телепортація не порушує фундаментальні закони, а використовує їх у узгодженій формі. Вимірювання у базисі Белла є центральним елементом, який перетворює квантову телепортацію з математичної процедури у фізично реалізований процес передачі інформації.

Квантова телепортація може розглядатися не лише як фізичний протокол передачі стану, але і як спеціальний випадок квантового каналу – математичного об'єкта, що описує еволюцію квантових станів у відкритих системах. Такий підхід дозволяє формалізувати телепортацію у рамках теорії квантових операцій та повністю додатних слідозберігаючих відображень (CPTP). Розглянемо телепортацію як канал передачі інформації. Проаналізуємо її властивості, обмеження та роль класичної інформації у процесі. У квантовій теорії інформації стан системи описується матрицею густини:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid, \tag{7.15}$$

де p_i – ймовірності, $\sum_i pi = 1$; $\mid \psi_i\rangle$ – вектори стану. Для чистого стану:

$$\rho = \mid \psi\rangle\langle\psi \mid. \tag{7.16}$$

Квантовий канал задається відображенням:

$$\rho_{out} = \mathcal{E}(\rho_{in}), \tag{7.17}$$

де ρ_{in} – вхідний стан; ρ_{out} – вихідний стан; $\mathcal{E}$ – CPTP-відображення (completely positive trace-preserving). В ідеальному протоколі квантової телепортації реалізується відображення:

$$\rho_{out} = \rho_{in}. \tag{7.18}$$

Це означає, що телепортація еквівалентна тотожному квантовому каналу, незважаючи на відсутність фізичного перенесення частинки. Схематичне представлення телепортації як квантового каналу наведено на рис. 7.3.

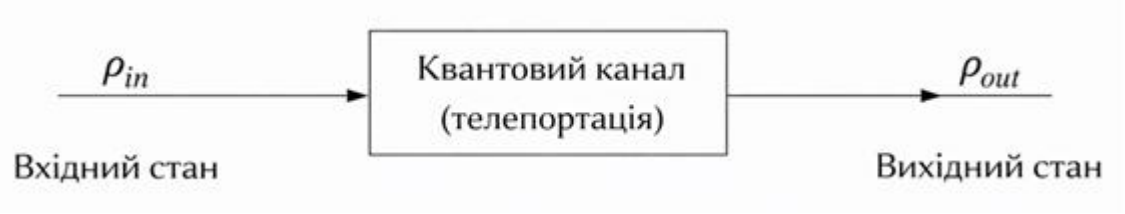


Рис. 7.3. Квантова телепортація як квантовий канал

Будь-який квантовий канал можна записати у формі операторів Крауса:

$$\rho_{out} = \sum_k E_k \rho_{in} E_{k.}^{\dagger} \tag{7.19}$$

де E_k – оператори Крауса; $E_k^{\dagger}$ – ермітово-спряжені оператори.

Виконується умова:

$$\sum_k E_k^{\dagger} E_k = I. \tag{7.20}$$

У випадку телепортації $E_k \in \{\mathrm{I}, \mathrm{X}, \mathrm{Z}, \mathrm{XZ}\}$, де I, X, Z, – оператори Паулі; XZ – їх композиція. Індекс k відповідає результатам вимірювання у базисі Белла. Після врахування результатів вимірювання та застосування відповідних операторів Паулі канал редукується до тотожного.

Телепортація включає два типи ресурсів: квантовий ресурс – заплутаний стан і класичний канал – передача двох бітів інформації. Без класичного каналу стан Боба описується як змішаний:

$$\rho_{out} = \frac{I}{2}, \tag{7.21}$$

де I – одиничний оператор. Це відповідає деполяризуючому каналу, який повністю руйнує інформацію про початковий стан. Лише після отримання класичних бітів Боб може виконати відповідну корекцію і відновити стан. Структуру квантової телепортації як каналу передачі інформації показано на рис. 7.4.



Рис. 7.4. Структура квантової телепортації як каналу передачі інформації

Розглянемо складену систему ρ_{ABC} , де A – це кубіт, що передається; B – кубіт Аліси; C – кубіт Боба. У протоколі телепортації беруть участь три кубіти: кубіт A, який містить початковий стан ρ_{in}, кубіт B, що належить Алісі та входить до складу заплутаної пари, і кубіт C, який перебуває у Боба. Після виконання вимірювання Белла над кубітами A та B, передачі результатів вимірювання класичним каналом та відповідної унітарної корекції кубіт C переходить у стан

$$\rho_C = \rho_{in}$$

де ρ_C – матриця густини кубіта C, який знаходиться у Боба; ρ_{in} – матриця густини початкового квантового стану кубіта A, який необхідно телепортувати від Аліси до Боба. Це означає, що кубіт Боба набуває точно такого самого квантового стану, який спочатку мав кубіт A. При цьому початковий стан кубіта A руйнується внаслідок вимірювання, тому квантова інформація переноситься від A до C без порушення теореми про неможливість клонування квантових станів.

Квантова телепортація має такі характеристики: передає один кубіт квантової інформації; використовує одну заплутану пару; потребує передачі двох класичних бітів; належить до класу LOCC (Local Operations and Classical

Communication – локальні операції та класична комунікація). Це демонструє, що заплутаність є фундаментальним ресурсом квантової передачі інформації.

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, звернемося до прикладів.

1. Відсутність класичної передачі. Якщо Боб не отримує результат вимірювання від Аліси, то

$$\rho_{out} = \frac{I}{2}.$$

Стан є повністю змішаним, і інформація втрачається.

2. Ідеальний канал. Після отримання класичних бітів

$$\rho_{out} = \rho_{in}$$

Стан повністю відновлюється без змін. Це означає, що телепортація еквівалентна ідеальному каналу.

3. Зашумлений канал. У реальних умовах, коли заплутаність не є неідеальною:

$$\rho_{out} \to p\rho_{in} + (1-p)\frac{I}{2}, \tag{7.22}$$

де $p \in [0,1]$ – параметр якості каналу; $\frac{I}{2}$ – повністю змішаний стан. Це відповідає реальним експериментам.

Інтерпретація квантової телепортації як квантового каналу дозволяє формалізувати процес передачі стану, описати його через оператори Крауса, зрозуміти роль класичної інформації, дослідити вплив шуму та втрат. Таким чином, квантова телепортація є фундаментальним прикладом того, як абстрактні математичні конструкції квантового каналу реалізуються у фізичних системах і лежать в основі сучасних квантових технологій.

7.3. Надщільне кодування та обмін заплутаністю

Розглянувши принципи реалізації квантової телепортації та ключову роль вимірювання у базисі Белла, можна побачити, що саме перехід до цього спеціального базису дозволяє ефективно “перекодувати” інформацію про стан у кореляції між частинами заплутаної системи. Вимірювання у базисі Белла

виступає центральним елементом протоколу, оскільки воно перетворює локальну квантову інформацію на класичні дані, які визначають подальші операції відновлення стану. Однак значення базису Белла не обмежується лише телепортацією. Його використання відкриває ширший клас квантово-інформаційних протоколів, у яких заплутаність виступає як ключовий ресурс для передачі та перетворення інформації. Зокрема, ті самі принципи дозволяють реалізувати ефективні схеми кодування класичної інформації та здійснювати перерозподіл заплутаності між різними підсистемами. Зокрема, одним із основних протоколів квантової теорії інформації, який демонструє можливість ефективнішої передачі класичної інформації за рахунок використання квантових ресурсів є надщільне кодування. На відміну від класичних каналів, де один біт інформації передається одним фізичним носієм, у квантовому випадку можлива передача більшого обсягу інформації при використанні заплутаних станів. Цей протокол ілюструє принципову відмінність між класичною та квантовою інформацією, а також показує, що квантові системи можуть забезпечувати інформаційні переваги без порушення фундаментальних обмежень, розглянутих у попередніх підрозділах.

Надщільне кодування тісно пов’язане з квантовою телепортацією і разом з нею формує базовий набір квантових комунікаційних протоколів. У класичній теорії інформації передача двох бітів інформації потребує використання щонайменше двох незалежних фізичних носіїв. У квантовому випадку ситуація може бути змінена за рахунок використання попередньо створеної заплутаності. Інтуїтивно виникає питання: чи можна, використовуючи квантові кореляції, передати більше інформації, ніж дозволяє класична схема, не порушуючи при цьому фундаментальних обмежень квантової механіки? Відповідь на це питання дає протокол надщільного кодування.

Нехай два спостерігачі, Аліса та Боб, спільно володіють парою кубітів, що перебувають у заплутаному стані Белла:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

Аліса має один кубіт, а Боб – інший. Завдання полягає в тому, щоб Аліса передала Бобу два класичних біти інформації, використовуючи передачу лише одного кубіта.

Процедура надщільного кодування складається з таких етапів.

1. Кодування інформації Алісою. Аліса кодує два класичних біти, застосовуючи до свого кубіта один із чотирьох унітарних операторів: I, X, Z, XZ, де I – тотожний оператор; X і Z – оператори Паулі; XZ – композиція операторів. Кожна з цих операцій переводить початковий стан у один із чотирьох ортогональних станів Белла.

2. Передача кубіта. Аліса передає свій кубіт Бобу через квантовий канал.

3. Декодування Бобом. Боб виконує спільне вимірювання двох кубітів у базисі Белла, тобто наборі ортогональних заплутаних станів, та однозначно визначає, яку операцію застосувала Аліса, а отже які два біти інформації були передані.

Надщільне кодування демонструє, що попередньо створена квантова заплутаність дозволяє ефективніше використовувати фізичні ресурси каналу. Передача одного кубіта, доповнена заплутаністю, еквівалентна передачі двох класичних бітів. При цьому сама заплутаність не передає інформацію. Вона виступає як ресурс, що підвищує ефективність кодування. Передача інформації відбувається лише після фізичного надсилання кубіта.

Надщільне кодування не порушує жодного з фундаментальних обмежень квантової інформації: теорема про неможливість надсвітлової передачі (інформація передається лише після фізичної передачі кубіта); межа Голєво (збільшення ефективності досягається за рахунок використання заплутаності, а не порушення обмеження); заборона клонування (процес не передбачає копіювання квантових станів); обмеження вимірювання (декодування можливе лише для ортогональних станів Белла). Таким чином, протокол узгоджується із загальною системою фундаментальних обмежень квантової інформації.

Для кращого розуміння розглянемо інтуїтивні пояснення.

1. Заплутаність як інформаційний резерв: частина інформації вже «закладена» у спільному стані системи до початку передачі.

2. Кодування через зміну глобального стану: локальна операція Аліси змінює глобальний стан системи, що дозволяє Бобу відновити інформацію.

3. Обсяг переданої інформації перевищує кількість фізично переданих ресурсів: передається один кубіт, але завдяки заплутаності декодуються два біти.

Для пояснення принципу надщільного кодування та його переваг розглянемо характерні приклади.

1. Класична межа передачі. У класичному випадку один біт інформації передається одним фізичним носієм (наприклад, фотоном): $0 \rightarrow |H\rangle,\ 1 \rightarrow |V\rangle$. Висновок: 1 фотон → 1 біт.

2. Заплутана пара як ресурс. Нехай два користувачі мають заплутаний стан:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle),$$

Один із них (Аліса) застосовує локальні унітарні операції: I, σ_x,σ_z, і σ_y. Це перетворює стан у один із чотирьох ортогональних станів Белла.

3. Передача двох бітів. Аліса надсилає лише один фотон Бобу. Боб виконує Bell-вимірювання і визначає стан:

$$|\Phi^{\pm}\rangle, |\Psi^{\pm}\rangle.$$

Це дозволяє відновити 2 біти інформації.

4. Чому це працює? Заплутаність забезпечує попередньо розподілену кореляцію, можливість кодування у глобальному стані. Інформація «розподілена» між двома частинками.

5. Обмеження. Без заплутаності неможливо передати більше 1 біта. При шумі зменшується розрізнюваність станів, падає ефективність протоколу.

Надщільне кодування є яскравим прикладом того, як квантові ефекти можуть підвищувати ефективність передачі інформації. Воно демонструє, що квантова заплутаність може збільшити ефективність передачі інформації понад класичні межі. Цей результат узгоджується із загальною структурою

фундаментальних обмежень квантової інформації та водночас підкреслює відмінності між класичною і квантовою теоріями інформації. Разом із квантовою телепортацією надщільне кодування формує основу сучасних квантових комунікаційних протоколів.

Протокол надщільного кодування, через використання квантової заплутаності дозволяє суттєво підвищити ефективність передачі класичної інформації, забезпечуючи передачу двох класичних бітів за допомогою одного кубіта. Цей результат демонструє, що попередньо підготовлені заплутані стани можуть виступати як ресурс, який змінює інформаційні можливості квантових каналів. Проте надщільне кодування є лише одним із прикладів використання заплутаності для передачі інформації. Воно описує ситуацію, коли інформація кодується і передається в одному напрямку, але не охоплює більш загальних сценаріїв взаємодії між учасниками квантового обміну. Це природно підводить до ширшого класу протоколів, у яких квантові стани не просто передаються, а обмінюються між сторонами з використанням спільних ресурсів і узгоджених операцій. Протоколи обміну станами є природним розширенням квантової телепортації в рамках квантової інформатики. Якщо телепортація дозволяє передати квантовий стан від однієї системи до іншої, то обмін станами забезпечує взаємний обмін квантовими станами між двома або більше системами. Особливе місце займає процес обміну заплутаністю – механізм, який дозволяє створити заплутаність між частинками, що ніколи безпосередньо не взаємодіяли. Це є фундаментальною ідеєю для побудови квантових мереж та квантового інтернету.

Для розуміння протоколів обміну станами необхідно розглянути взаємодію кількох заплутаних систем, роль вимірювання у базисі Белла, унітарні перетворення багатокубітних станів.

Нехай маємо дві незалежні заплутані пари:

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \tag{7.23}$$

$$|\Phi^+\rangle_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \tag{7.24}$$

де A, B, C, D – чотири кубіти. Індекси позначають, які кубіти входять до пари.

Основна ідея обміну заплутаністю полягає у тому, що кубіти A і D **с**тають заплутаними, хоча вони ніколи не взаємодіяли безпосередньо. Це досягається шляхом виконання вимірювання над кубітами B і C. Загальний стан системи:

$$|\Psi\rangle = |\Phi^+\rangle_{AB} \otimes |\Phi^+\rangle_{CD}. \tag{7.25}$$

Розкриємо:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})(|00\rangle_{CD} + |11\rangle_{CD}) = \tag{7.26}$$

$$= \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle),$$

де порядок кубітів: A, B, C, D.

Схематичне представлення процесу обміну заплутаністю наведено на рис. 7.5.



Рис. 7.5. Схема обміну заплутаністю між кубітами

На рисунку показано дві незалежні заплутані пари, які існують до вимірювання: кубіти A–B у стані $|\Phi\rangle_{AB}$ і кубіти C–D у стані $|\Phi\rangle_{CD}$. Виконується вимірювання у базисі Белла над кубітами B і C. Після вимірювання відбувається колапс підсистеми BC. Система переходить у $|\Phi\rangle_{AD}$. В результаті кубіти A і D стають заплутаними. Колапс означає, що вимірювання над B і C руйнує їхній попередній стан і фіксує результат. Відбувається перенесення заплутаності: до

вимірювання кубіт A заплутаний з B і кубіт C заплутаний з D. Після вимірювання кубіт A заплутаний з D, а B і C більше не утворюють окрему заплутану пару. Тобто заплутаність може виникати між частинками, які ніколи не взаємодіяли. Отже, вимірювання перерозподіляє заплутаність. Однак, слід зазначити, що це не передача інформації швидше світла, результат стає відомим лише після класичної передачі.

Перепишемо стан у базисі Белла для кубітів B і C:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}[|\Phi^+\rangle_{BC}\,|\Phi^+\rangle_{AD} + |\Phi^-\rangle_{BC}\,|\Phi^-\rangle_{AD} + \\ + |\Psi^+\rangle_{BC}\,|\Psi^+\rangle_{AD} + |\Psi^-\rangle_{BC}\,|\Psi^-\rangle_{AD}]. \tag{7.27}$$

Цей вираз означає, що результат вимірювання кубітів B і C визначає стан кубітів A і D. Після виконання вимірювання у базисі Белла підсистема BC колапсує (переходить) до одного зі станів Белла. А підсистема AD переходить у відповідний заплутаний стан. Таким чином, кубіти A і D стають заплутаними, хоча вони ніколи безпосередньо не взаємодіяли. Наприклад $|\Phi^+\rangle_{BC} \Rightarrow |\Phi^+\rangle_{AD}$.

Нехай маємо два довільні стани:

$$|\psi\rangle_A = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \tag{7.28}$$

$$|\phi\rangle_B = \gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle, \tag{7.29}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$ – амплітуди; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1;\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

Обмін станами означає:

$$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \longrightarrow |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \tag{7.30}$$

Це реалізується через телепортацію в обидві сторони або через спеціальні SWAP-операції.

Оператор обміну визначається як:

$$SWAP(|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B) = |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \tag{7.31}$$

У матричному вигляді:

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Цей оператор є унітарним і переставляє стани двох кубітів.

Схематичне представлення операції обміну станами наведено на рис. 7.6.

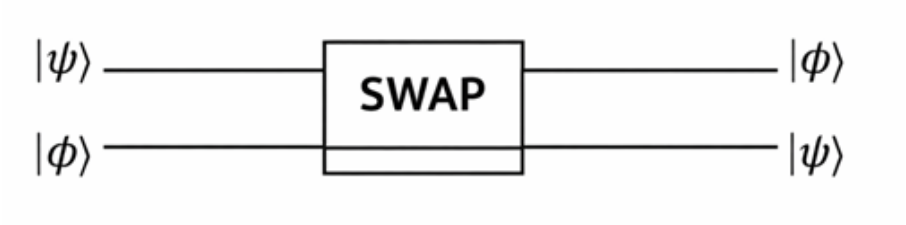


Рис. 7.6. Схема SWAP-операції: перестановка квантових станів двох кубітів

На рисунку показано, що оператор SWAP переставляє місцями квантові стани двох кубітів. Якщо до застосування оператора верхній кубіт перебував у стані $|\psi\rangle$, а нижній – у стані $|\phi\rangle$, то після виконання SWAP перший кубіт переходить у стан $|\phi\rangle$, а другий – у стан $|\psi\rangle$. При цьому стани не копіюються, а лише міняються місцями, що узгоджується з теоремою про заборону клонування. Обмін станами може бути реалізований через двосторонню телепортацію, через унітарний оператор SWAP або через послідовність квантових гейтів (наприклад, три CNOT-операції).

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, звернемося до прикладів.

1. Обмін заплутаністю. Дві незалежні пари $|\Phi^+\rangle_{AB}$ і $|\Phi^+\rangle_{CD}$ після вимірювання B і C переходять у $|\Phi^+\rangle_{AD}$. Нова заплутаність виникає без прямої взаємодії.

2. Обмін двох станів. Нехай маємо $|\psi\rangle_A = |0\rangle$, $|\phi\rangle_B = |1\rangle$. Після SWAP отримуємо $|0\rangle\,|1\rangle \rightarrow |1\rangle\,|0\rangle$

3. Узагальнений випадок. Нехай маємо два стани:

$$|\psi_A\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

$$|\phi_B\rangle = \gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle$$

Після обміну отримуємо $|\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$. Коефіцієнти зберігаються, лише змінюється розташування

Протоколи обміну станами є фундаментальним елементом квантових технологій. Вони дозволяють створювати заплутаність на відстані, реалізують обмін інформацією без копіювання, лежать в основі квантових мереж і повторювачів, можуть бути реалізовані як унітарні перетворення. Таким чином, протоколи обміну станами розширюють можливості квантової телепортації і є необхідним інструментом для побудови масштабованих квантових систем.

7.4. Протоколи передачі багатокубітних станів

Квантова телепортація одного кубіта є базовим протоколом у квантовій інформатиці. Проте для практичних застосувань таких як квантові обчислення, квантові мережі та розподілені квантові алгоритми, необхідно передавати багатокубітні системи та заплутані стани. Телепортація більш складних станів дозволяє передавати квантові регістри, переносити заплутаність між вузлами мережі, реалізовувати розподілені квантові обчислення. Разом з тим такі процеси є значно складнішими, ніж телепортація одного кубіта, оскільки потребують більших ресурсів і точнішого контролю над квантовими операціями.

Багатокубітні стани описуються у тензорному просторі:

$$Ĥ^{\otimes n} = Ĥ \otimes Ĥ \otimes \cdots \otimes Ĥ, \tag{7.32}$$

де n – кількість кубітів; $Ĥ$ – гільбертів простір одного кубіта; $\otimes$ – тензорний добуток. Наприклад, загальний двокубітний стан має вигляд:

$$| \Psi\rangle = \alpha_{00} | 00\rangle + \alpha_{01} | 01\rangle + \alpha_{10} | 10\rangle + \alpha_{11} | 11\rangle, \tag{7.33}$$

де $\alpha_{ij} \in C$ – амплітуди. При цьому виконується умова нормування:

$$\sum | \alpha_{ij} |^2 = 1. \tag{7.34}$$

1. Телепортація багатокубітного стану. Телепортація n – кубітного стану вимагає n заплутаних пар, 2n класичних бітів і виконання незалежної телепортації кожного кубіта. Формально $\rho_{out} = \rho_{in}$, тобто стан переноситься без змін (в ідеальному випадку). Узагальнена схема телепортації багатокубітного стану наведена на рис. 7.7.

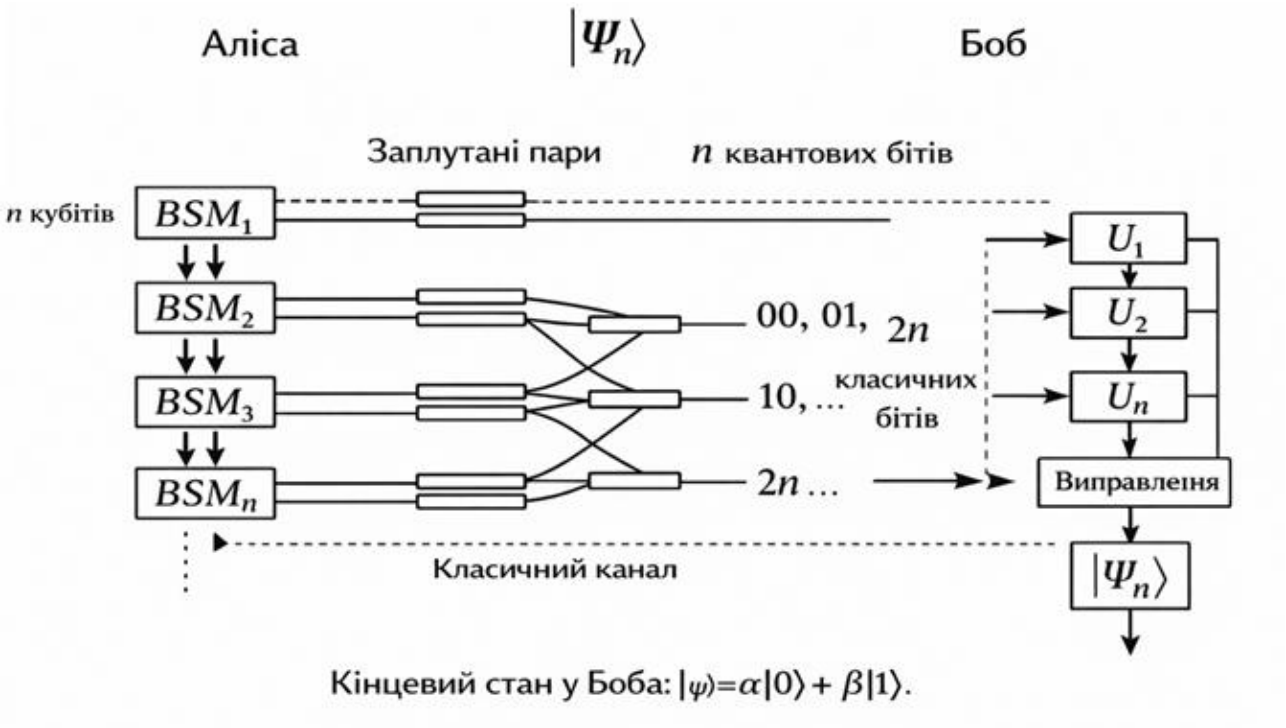


Рис. 7.7. Схема телепортації багатокубітного квантового стану

Схема ілюструє процес телепортації n-кубітного стану $|\Psi n\rangle$. Аліса має n кубітів (вхідний стан), n заплутаних пар (ресурс телепортації). Виконуються n вимірювань Белла (BSM_1, …, BSM_n). Результати вимірювань передаються через класичний канал (2n бітів). Боб застосовує оператори корекції U_1,…, U_n. Телепортація багатокубітного стану реалізується як паралельна телепортація кожного кубіта окремо. В результаті $\rho_{out} = \rho_{in}$.

2. Телепортація двокубітного стану. Розглянемо стан

$$|\psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle. \qquad (7.35)$$

Нехай Аліса має цей стан і дві заплутані пари: $|\Phi^+\rangle_{A_1B_1}$ і $|\Phi^+\rangle_{A_2B_2}$. Загальний стан

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle_{A_1B_1} \otimes |\Phi^+\rangle_{A_2B_2}. \qquad (7.36)$$

Після виконання двох вимірювань в базисі Белла і передачі 4 класичних бітів Боб отримує початковий стан.

3. Телепортація заплутаних станів.

а. Беллівські стани. Беллівські стани, як зазаначалося раніше, – це чотири максимально заплутані стани двох кубітів, які утворюють ортонормований базис:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Беллівські стани – це максимально заплутані пари кубітів. Це означає, що стан кожного кубіта окремо невизначений, але між ними існує ідеальна кореляція. Якщо виміряти один кубіт, то стан другого визначається миттєво, але без передачі інформації. Телепортація однієї частини такого стану призводить до перенесення заплутаності на інший вузол..

б. GHZ-стани (Greenberger–Horne–Zeilinger). GHZ-стани – це багатокубітні заплутані стани, в яких усі кубіти перебувають у спільній суперпозиції типу «всі 0 або всі 1». Для трьох кубітів:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \tag{7.37}$$

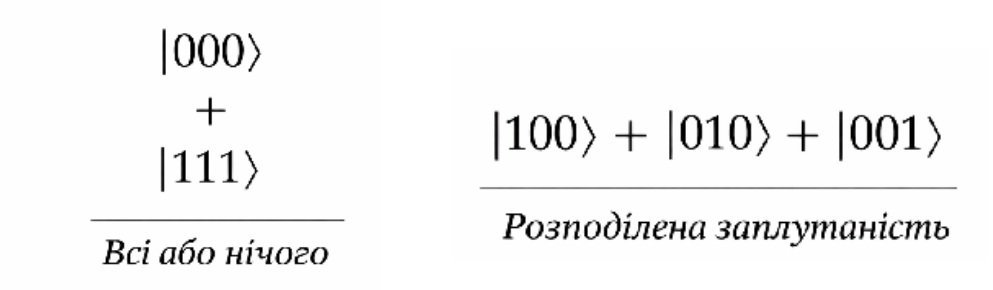
де всі кубіти одночасно у стані 0 або всі одночасно у стані 1. Це глобально заплутаний стан трьох кубітів. Якщо виміряти один кубіт, то одразу визначаються всі інші, тобто система поводиться як єдине ціле Телепортація одного кубіта переносить заплутаність до нового вузла. Причому, якщо втратити один кубіт, заплутаність повністю зникає і залишаються незалежні стани.

в. W-стани. W-стани – це заплутані стани, в яких одиничне збудження розподілене між кубітами, що забезпечує більшу стійкість до втрат. Для трьох кубітів:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \tag{7.38}$$

Це стан типу: «один збуджений кубіт, але невідомо який». Один кубіт у стані 1, інші – у стані 0, але суперпозиція всіх варіантів. У цьому випадку заплутаність розподілена більш рівномірно між усіма кубітами і є більш стійкою до втрат. Якщо втратити один кубіт, заплутаність не зникає, інші залишаються заплутаними. Слід зазначити, що GHZ і W — це два фундаментально різні типи заплутаності: GHZ – сильні, але крихкі, W – слабші, але стійкі.

Порівняння основних типів багатокубітної заплутаності наведено на рис. 7.8.



а б

Рис. 7.8. Порівняння GHZ- та W-станів:

На рисунку 7.8, а подано суперпозицію станів $|\,000\rangle+|\,111\rangle$. Це відповідає GHZ-стану трьох кубітів:

$$|\,\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,000\rangle+|\,111\rangle). \qquad (7.39)$$

У цьому стані всі кубіти поводяться як **єдина система:** якщо виміряти один кубіт і отримати 0, то всі інші також будуть у стані 0; якщо отримано 1, то всі кубіти будуть у стані 1. Стан має глобальну заплутаність, але є нестійким: втрата або вимірювання одного кубіта повністю руйнує заплутаність. GHZ-стан – це заплутаність типу «всі разом або ніхто».

На рисунку 7.8, б подано суперпозицію станів $|\,100\rangle+|\,010\rangle+|\,001\rangle$. Це відповідає W-стану трьох кубітів:

$$| \mathrm{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(| 100\rangle + | 010\rangle + | 001\rangle). \tag{7.40}$$

У цьому стані один кубіт перебуває у стані 1, але невідомо, який саме. Всі варіанти існують одночасно (суперпозиція). Заплутаність є розподіленою, стан є стійким: навіть після втрати одного кубіта, заплутаність частково зберігається. W-стан – це розподілена заплутаність між усіма кубітами.

Телепортація багатокубітного стану описується як

$$| \Psi\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_k | Bell_k\rangle \otimes U_k | \psi\rangle, \tag{7.41}$$

де U_k – тензорні добутки операторів Паулі; k – набір результатів вимірювання. Після вимірювання: $| \psi\rangle \to U_k | \psi\rangle$, а після корекції: $| \psi\rangle \to | \psi\rangle$.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1. Телепортація двох кубітів.

$$| \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| 00\rangle + | 11\rangle).$$

Використовується 2 пари, передається 4 біти і стан повністю відновлюється

2. Телепортація GHZ-стану.

$$| GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| 000\rangle + | 111\rangle).$$

Після телепортації одного кубіта новий вузол включається у заплутаність.

Схема перенесення частини заплутаного стану наведена на рис. 7.9.

Схема ілюструє процес телепортації кубіта, який є частиною заплутаної системи. У Аліси кубіт у стані $| \psi\rangle = \alpha | 0\rangle + \beta | 1\rangle$. Заплутана пара $|\psi_{AB}\rangle$. Виконуються операції Адамара (H), CNOT. Здійснюється вимірювання і отримуються біти $a, b \in \{0,1\}$. Результати вимірювання (0/1) передаються через **класичний канал.** У Боба є кубіт із заплутаної пари. Він застосовує оператор U_{ij}. В результаті заплутаність переноситься до Боба і виникає новий стан $| \psi_B\rangle = \alpha | 0_B\rangle + \beta | 1_B\rangle$.

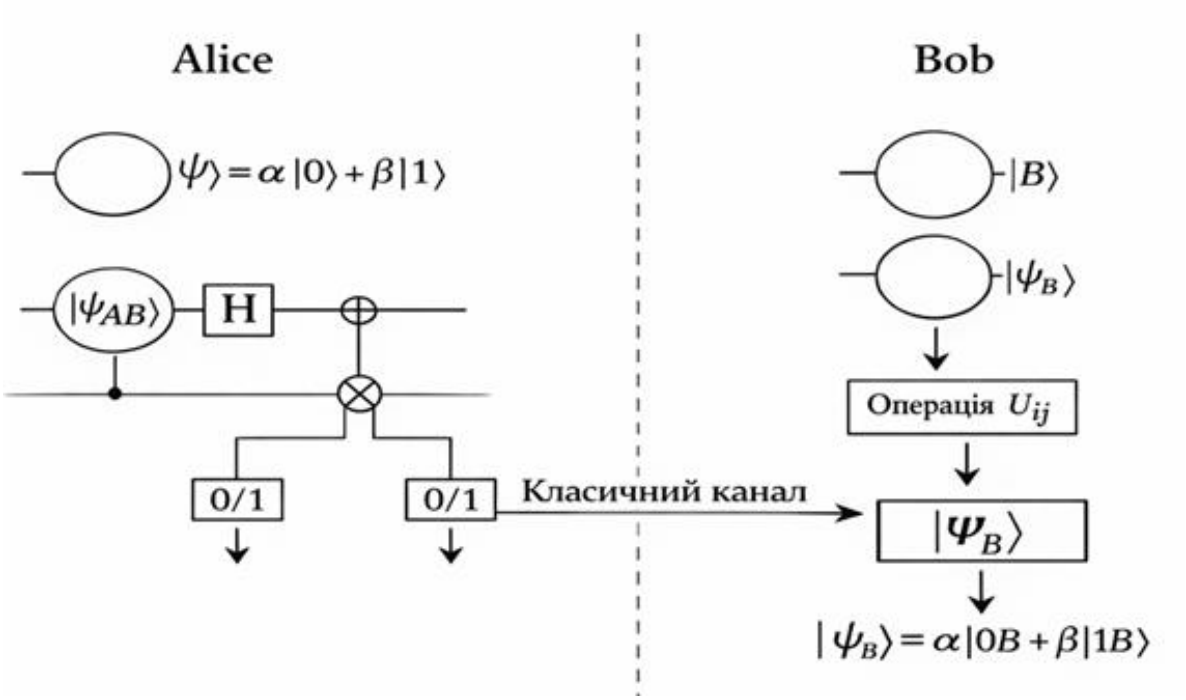


Рис. 7.9. Телепортація частини заплутаного стану: після вимірювання результати передаються класичним каналом, що дозволяє Бобу виконати відповідну унітарну корекцію.

Таким чином телепортується не просто кубіт, а частина заплутаної системи. Телепортація не руйнує заплутаність, вона її перерозподіляє. В результаті початкова заплутаність переноситься і новий кубіт Боба стає носієм стану. Таким чином можна переносити квантові кореляції між різними вузлами. Важливо зазначити, що квантовий стан не передається напряму. Він відновлюється у Боба через заплутаність і класичну інформацію.

3. Вплив шуму. Під дією шуму квантовий стан частково зберігається, а частково замінюється випадковим станом:

$$\rho_{out} = p\rho_{in} + (1-p)\frac{I}{2^n}.$$

де ρ_{in} – початковий квантовий стан; ρ_{out} – стан після проходження через шумовий канал; p – імовірність збереження квантової інформації; $(1-p)$ – імовірність впливу шуму; I – одиничний оператор; n – кількість кубітів; $1/2^n$ –

максимально змішаний стан n-кубітної системи. Це означає, що з імовірністю p система залишається у правильному стані ρ_{in}, а з імовірністю $(1-p)$ інформація повністю втрачається і стан перетворюється на випадковий. Тому вихідний стан є сумішшю корисного сигналу і випадкового шуму. Величина $1/2^n$ відповідає повній втраті інформації про систему та рівноймовірному розподілу між усіма базисними станами n-кубітного простору. Зі збільшенням кількості кубітів зростає число квантових ступенів свободи та міжкубітних кореляцій, тому багатокубітні і особливо заплутані стани виявляються значно чутливішими до шуму порівняно з окремими кубітами.

Телепортація багатокубітних і заплутаних станів є визначальним етапом розвитку квантових технологій. Вона дозволяє передавати складні квантові системи забезпечує розподіл заплутаності у мережах, лежить в основі квантового інтернету. З наведених даних випливають такі висновки: ресурсні витрати масштабуються з кількістю кубітів; заплутаність є критичним ресурсом; складні стани більш чутливі до шуму; телепортація зберігає квантові кореляції. Таким чином, багатокубітна телепортація є необхідним інструментом для побудови масштабованих квантових систем і реалізації складних квантових алгоритмів.

7.5. Експериментальна реалізація телепортації на апаратних платформах

Квантова телепортація, спочатку запропонована як теоретичний протокол, швидко стала об’єктом інтенсивних експериментальних досліджень у квантовій інформатиці. Її реалізація в лабораторних умовах дозволила не лише перевірити фундаментальні принципи квантової механіки, зокрема заплутаність, але й продемонструвати реальну можливість передачі квантових станів у фізичних системах. Перші експерименти з квантової телепортації були здійснені у 1997 році групою під керівництвом Антона Цайлінгера, з використанням фотонів. З того часу квантову телепортацію вдалося реалізувати на різних фізичних платформах, що стало важливим кроком до створення квантових мереж і квантового інтернету.

Експериментальна реалізація квантової телепортації вимагає виконання трьох основних умов: генерація заплутаних станів; виконання квантових операцій і вимірювань (зокрема вимірювання у базисі белла); передача класичної інформації. Узагальнена структура експериментальної реалізації квантової телепортації наведена на рис. 7.10.



Рис. 7.10. Узагальнена схема експериментальної реалізації квантової телепортації

На рисунку зображено типову структуру експерименту квантової телепортації. Джерело заплутаних пар створює пару квантових частинок у заплутаному стані. Аліса (A) виконує вимірювання у базисі Белла (BSM). Класичний канал передає результати вимірювання (два біти b_1, b_2). Боб (B) застосовує відповідну унітарну операцію для відновлення стану. Схема показує, що телепортація реалізується через поєднання квантового ресурсу (заплутаність) і класичної передачі інформації.

У реальних умовах квантові стани описуються матрицею густини:

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i\rangle\langle\psi_i \mid, \tag{7.42}$$

де p_i – ймовірності, $\sum_i p_i = 1$; $\mid \psi_i\rangle$ – квантові стани. Внаслідок шуму експериментально отриманий стан має вигляд:

$$\rho_{out} = p\rho_{in} + (1-p)\rho_{noise}, \tag{7.43}$$

де $p \in [0,1]$ – параметр, який характеризує якість передачі; ρ_{noise} – шумова компонента.

Саме фізична реалізація визначає, наскільки великим буде p, тобто наскільки добре працює телепортація. Це природно приводить до питання: які фізичні системи найкраще підходять для реалізації телепортації? Розглянемо їх.

1. Фотонні реалізації. Фотони є найбільш поширеною платформою для телепортації завдяки слабкій взаємодії з навколишнім середовищем, можливості передачі на великі відстані та зручності реалізації оптичних схем. Заплутані фотонні пари генеруються за допомогою процесу спонтанного параметричного перетворення (SPDC).Основна схема така: джерело генерує пару заплутаних фотонів, один фотон передається Бобу, інший використовується Алісою для вимірювання Белла. Саме фотонні системи дозволили вперше реалізувати телепортацію на великі відстані – від лабораторних експериментів до супутникових каналів. Хоча фотони ідеально підходять для передачі інформації, вони менш зручні для довготривалого зберігання станів. Тому виникає потреба у системах з кращим контролем і стабільністю

2. Іони в пастках. Іонні системи є одними з найбільш контрольованих квантових платформ. Вони забезпечують високий контроль над квантовими станами, тривалий час когерентності та високу точність операцій. Квантові стани реалізуються як внутрішні енергетичні рівні іонів: $|0\rangle, |1\rangle$. Квантові операції здійснюються за допомогою лазерних імпульсів. Переваги: висока точність (фіделіті $F > 0{,}95$), тривалий час когерентності, точний контроль операцій. Недоліки: складність масштабування, технічна складність реалізації великих систем. Таким чином, іонні пастки ідеальні для точних лабораторних експериментів, але менш придатні для великих мереж.

3. Надпровідникові кубіти. Щоб реалізувати масштабовані квантові системи, необхідні технології, які можна інтегрувати у електронні схеми. Такими є надпровідникові кубіти. Надпровідникові кубіти використовуються у сучасних квантових комп'ютерах (IBM, Google). Стан кубіта описується як

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

де $|0\rangle, |1\rangle$ – базисні стани, що відповідають різним струмовим або зарядовим конфігураціям.

Переваги: масштабованість, можливість інтеграції у мікросхеми, швидкі квантові операції. Недоліки: коротший час когерентності, чутливість до шуму. Ця платформа є найбільш перспективною для квантових комп'ютерів, але вимагає боротьби з декогеренцією.

На рис. 7.11 наведено порівняння основних фізичних платформ, які застосовуються для реалізації квантової телепортації.

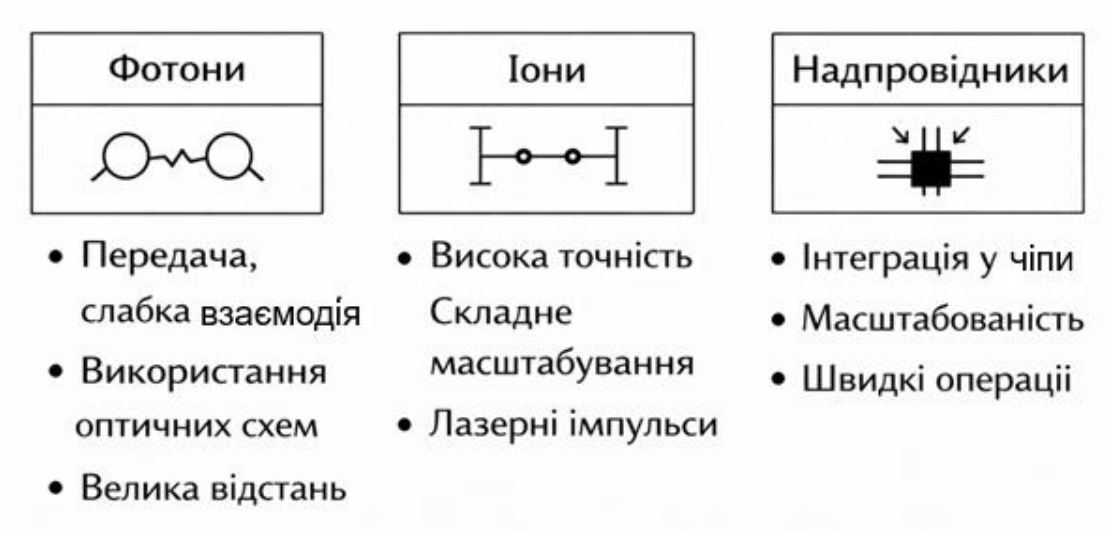


Рис. 7.11. Порівняння фізичних платформ для реалізації квантової телепортації

Рисунок демонструє три основні фізичні платформи: фотони, іони, надпровідникові кубіти. Кожна платформа реалізує один і той самий протокол телепортації, але використовує різні фізичні механізми. Отже, не існує «універсальної» системи кожна платформа має свої переваги та обмеження

Окремим важливим напрямом є передача квантових станів на великі відстані. Експерименти продемонстрували телепортацію через оптоволокно, через атмосферу, між супутниками та наземними станціями. Зокрема, супутникові експерименти показали можливість передачі квантових станів на відстані понад 1000 км. Це є ключовим кроком до створення глобального квантового інтернету.

Якість телепортації визначається через міру близькості двох квантових станів (фіделіті F):

$$F = \langle \psi \mid \rho_{out} \mid \psi \rangle, \qquad (7.44)$$

де $\mid \psi\rangle$ – ідеальний стан; $F \in [0,1]$; ρ_{out} – отриманий стан. Ця величина визначає якість передачі або відтворення квантової інформації. При $F = 1$ – ідеальна телепортація; при $F < 1$ – наявність шуму.

Для кращого розуміння розглянемо кілька прикладів розглянутого матеріалу.

1. Фотонна телепортація. Використано фотони. Досягнута висока якість передачі ($F \approx 0{,}8 - 0{,}9$). Обмеження: втрати світла у волоконних лініях.

2. Іонні системи. Точність (F > 0.95). Висока стабільність. Обмеження: складність масштабування

3. Супутникова телепортація. Відстань понад 1000 км. Підтверджена глобальна передача квантових станів;. Обмеження: атмосферні втрати та технічні складності.

Експериментальні реалізації квантової телепортації підтверджують її фундаментальну роль у сучасній науці та технологіях. Зокрема, телепортація реалізована на різних фізичних платформах, досягнута висока точність передачі, забезпечена передачу на великі відстані, підтверджена визначальна роль заплутаності. Водночас залишаються проблеми такі, як: шум і декогеренція, втрати сигналу, складність масштабування. Таким чином, квантова телепортація перейшла від теоретичної концепції до реального інструменту квантових технологій і є основою майбутніх квантових мереж.

Розглянувши експериментальну реалізацію квантової телепортації на різних апаратних платформах, можна переконатися, що цей процес уже не є суто теоретичною конструкцією, а успішно відтворюється в реальних фізичних системах із контрольованими параметрами. Досягнення стабільної генерації заплутаних станів, виконання вимірювань у базисі Белла та передача класичної інформації підтверджують практичну здійсненність телепортації в лабораторних умовах. Проте сама по собі експериментальна реалізація є лише проміжним етапом, який відкриває ширші можливості для використання цього явища. Адже ключове питання полягає не лише в тому, як реалізувати телепортацію, а й у

тому, які задачі вона дозволяє розв'язувати та які переваги надає у порівнянні з класичними методами передачі інформації. Тому після аналізу апаратних аспектів квантової телепортації логічно перейти до розгляду її застосувань, де теоретичні принципи та експериментальні досягнення знаходять практичне використання у квантових комунікаціях, обчисленнях і інформаційній безпеці.

Квантова телепортація, яка спочатку розглядалася як суто теоретичний протокол у квантовій інформатиці, сьогодні перетворилася на один із основних інструментів сучасних квантових технологій. Вона дозволяє передавати квантові стани без фізичного переміщення носія інформації, що відкриває принципово нові можливості для обробки, передачі та захисту інформації. Застосування телепортації виходять далеко за межі теоретичних моделей і охоплюють такі напрямки, як квантові мережі, квантова криптографія, розподілені квантові обчислення та створення квантового інтернету. На відміну від класичних методів, телепортація використовує заплутаність і класичний канал, що робить її фундаментом майбутніх квантових систем зв'язку та обчислень.

У загальному вигляді телепортація реалізує відображення:

$$| \psi\rangle \longrightarrow | \psi\rangle, \qquad (7.45)$$

де $| \psi\rangle = \alpha | 0\rangle + \beta | 1\rangle$ – довільний квантовий стан; $\alpha, \beta \in C$ – амплітуди; $| \alpha |^2 + | \beta |^2 = 1$.

Саме ця властивість – передача стану без його копіювання – робить телепортацію універсальним інструментом передачі квантової інформації, що лежить в основі її практичних застосувань. Це природно приводить до питання: де саме ця властивість використовується на практиці?

Першою і найбільш природною сферою застосування є квантові мережі. Квантова телепортація є базовим механізмом функціонування квантових мереж. У таких мережах вузли обмінюються квантовими станами, заплутаність розподіляється між віддаленими системами. Телепортація забезпечує передачу інформації між вузлами. По суті, телепортація виконує роль «квантового каналу зв'язку» (рис. 7.12).

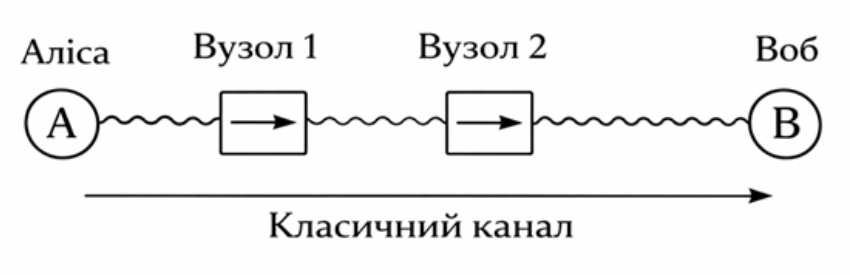


Рис. 7.12. Квантова мережа з використанням телепортації

Якщо можна передавати квантові стани, виникає наступне питання: чи можна зробити цю передачу захищеною? Телепортація використовується у квантовій криптографії для створення абсолютно захищених каналів зв'язку. Основна ідея полягає в наступному: будь-яке втручання змінює стан системи і це дозволяє виявити перехоплення. Таким чином, телепортація забезпечує не лише передачу, але й контроль безпеки (рис. 7.13).



Рис. 7.13. Захищений канал передачі інформації з використанням квантової телепортації

Однак при передачі на великі відстані виникає проблема втрат. Це приводить до використання спеціальних пристроїв. Для передачі інформації на великі відстані та подолання втрат сигналу використовуються квантові повторювачі. Їх робота базується на телепортації та обміні заплутаністю. Принцип дії квантових повторювачів наступний: канал розбивається на ділянки,

заплутаність відновлюється на кожному етапі, телепортація передає стан далі. Це дозволяє передавати квантову інформацію на значні відстані (рис. 7.14).



Рис. 7.14. Передача квантової інформації через квантові повторювачі

Якщо об’єднати кілька вузлів і повторювачів, можна не лише передавати інформацію, а й виконувати обчислення. Тобто телепортація дозволяє організувати обчислення між віддаленими квантовими процесорами. У цьому випадку різні частини алгоритму виконуються на різних вузлах, квантові стани передаються між ними через телепортацію і обчислення продовжується без втрати інформації. Це відкриває шлях до масштабованих квантових систем (рис. 7.15).

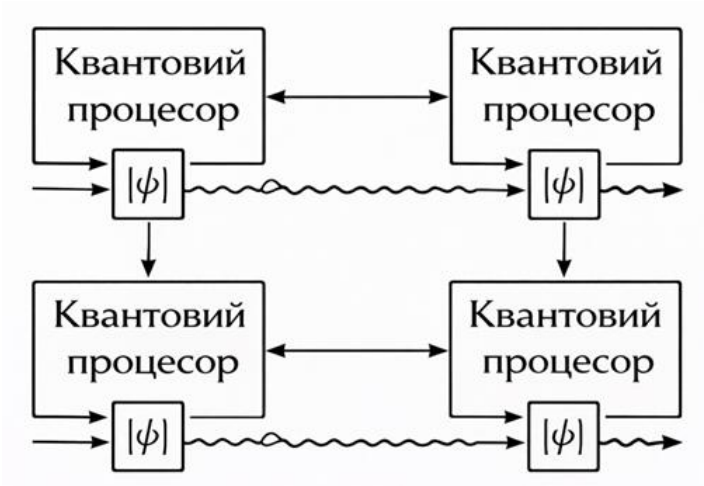


Рис. 7.15. Обмін квантовими станами між квантовими процесорами

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, розглянемо деякі приклади.

1. Захищена передача. Стан $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ передається через телепортацію. Якщо відбувається перехоплення, то стан змінюється і це одразу виявляється.

2. Передача через повторювач.

$$|\psi\rangle \to \text{вузол1} \to \text{вузол2} \to \text{Боб}$$

Кожен етап використовує телепортацію, втрати компенсуються

3.Розподілене обчислення. Квантовий алгоритм:

$$|\psi\rangle \to U\,|\psi\rangle, \qquad (7.46)$$

де U – унітарний оператор.

Телепортація дозволяє передати стан між вузлами і продовжити обчислення.

Таким чином, квантова телепортація переходить від теоретичної концепції до практичного інструменту, що визначає розвиток інформаційних технологій нового покоління.

РОЗДІЛ 8. АНАЛІЗ КВАНТОВИХ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ ТА ФІЗИКА ВТРАТ

8.1. Математичний формалізм та класифікація квантових каналів

У сучасній квантовій теорії інформації центральним об'єктом дослідження є не лише квантові стани, але й процеси їх перетворення, передачі та деградації під впливом зовнішніх факторів. На відміну від класичної інформації, квантова інформація кодується у станах квантових систем і під час передачі може зазнавати різноманітних змін, пов'язаних із фізичними властивостями середовища або особливостями взаємодії між квантовими об'єктами. Такі зміни можуть мати як детермінований, так і випадковий характер і приводити до втрати когерентності та появи шумів. Саме тому виникає необхідність у формальному описі процесів, які змінюють квантові стани під час їхньої еволюції або передачі. Саме для опису таких процесів вводиться поняття квантового каналу, який узагальнює як ідеальну еволюцію, так і всі можливі неідеальні впливи.

Квантовий канал – це фізичне або абстрактне середовище, через яке передається квантова інформація. Квантові канали є універсальним інструментом сучасної квантової теорії інформації. Вони використовуються для аналізу квантових комунікаційних систем, моделювання шуму у квантових обчислювальних пристроях та дослідження еволюції квантових станів у реальних фізичних умовах. У класичній теорії інформації канал зв'язку розглядається як механізм передачі повідомлень від відправника до приймача. Під час передачі сигнал може зазнавати спотворень або втрат, що призводить до появи помилок. Аналогічна ситуація виникає і у квантових системах. Проте, на відміну від класичних каналів зв'язку, де передається бітова інформація, в квантових системах процес передачі має значно складнішу структуру, оскільки квантові стани описуються матрицями густини, а їхня еволюція підпорядковується законам квантової механіки. Тому розуміння основ квантових каналів є ключовим для розвитку таких технологій, як квантова криптографія, квантова телепортація та майбутній квантовий інтернет.

Формально квантовий канал описується як відображення, яке перетворює початкову матрицю густини системи у нову матрицю густини. Наприклад, нехай квантова система описується матрицею густини ρ, яка є лінійним оператором у гільбертовому просторі Ĥ. Вона задовольняє три ключові властивості: $\rho \geq 0$ (додатна визначеність), $\rho = \rho^{\dagger}$ (ермітовість) та $Tr(\rho) = 1$ (нормування). Тут Tr позначає слід оператора, тобто суму його діагональних елементів у довільному ортонормованому базисі. Після проходження через квантовий канал стан системи змінюється і описується новою матрицею густини ρ':

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho), \tag{8.1}$$

де ρ – початковий стан, ρ' – стан після проходження каналу, $\mathcal{E}$ – квантовий канал (операція). Таке відображення повинно задовольняти кілька важливих умов, що забезпечують його фізичну коректність. По-перше, канал має бути лінійним, оскільки квантові стани можуть утворювати статистичні суміші, тобто

$$\mathcal{E}(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) = p\mathcal{E}(\rho_1) + (1-p)\mathcal{E}(\rho_2), \tag{8.2}$$

де ρ_1, ρ_2 – матриці густини, які описують два можливі стани системи; p – ймовірність ($0 \leq p \leq 1$). Це означає, що з ймовірністю p система знаходиться в стані ρ_1, а з ймовірністю $(1-p)$ – у стані ρ_2. Вираз $p\rho_1 + (1-p)\rho_2$ – це статистична суміш двох станів. Фізично це означає, що система випадково перебуває в одному з них, але ми не знаємо, в якому саме. Ця рівність означає наступне: якщо система є випадковою сумішшю станів, то канал діє на кожен стан окремо, а потім результати змішуються з тими ж ймовірностями. Вся формула визначає лінійність каналу. По-друге важливо, щоб відображення не перетворювало фізично допустимі стани на нефізичні. Це приводить до вимоги додатності, тобто якщо $\rho \geq 0$, то $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$. Проте навіть ця умова виявляється недостатньою при розгляді складених систем. Наприклад,, нехай маємо складену систему A+B, де A – система, через яку проходить канал, B – інша (допоміжна) система (наприклад, заплутаний партнер). Необхідно, щоб для будь-якої допоміжної системи:

$$(\mathcal{E} \otimes I)(\rho_{AB}) \geq 0, \tag{8.3}$$

де $\mathcal{E} \otimes I$ – дія каналу на складену систему; I – тотожне відображення на підсистемі A; ρ_{AB} – стан складеної системи. Разом $(\mathcal{E} \otimes I)(\rho_{AB})$ означає: до частини A застосовується канал, а частина B залишається без змін, як є. Ця вимога називається повною додатністю. Вона гарантує, що канал не створює нефізичних станів навіть у присутності заплутаності.

Окрім цього, канал повинен зберігати нормування:

$$Tr\big(\mathcal{E}(\rho)\big) = Tr(\rho) = 1. \tag{8.4}$$

Такі відображення називаються повністю додатними слідзберігаючими (CPTP, Completely Positive Trace-Preserving). Саме вони і визначають клас фізично допустимих квантових каналів. Після встановлення загальних умов природно постає питання: як конструктивно задавати такі канали. Відповідь дає фундаментальне представлення, відоме як операторна сума або представлення Крауса:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_a E_a \rho E_a^\dagger, \tag{8.5}$$

де E_a – оператори Крауса, а $E_a^\dagger$ – їх ермітово спряжені оператори. Умова слідзбереження набуває вигляду

$$\sum_a E_a E_a^\dagger = I. \tag{8.6}$$

де I – одиничний оператор у просторі Ĥ. Ця умова гарантує збереження нормування матриці густини після дії каналу. Оператори Крауса можна інтерпретувати як математичне представлення різних можливих фізичних процесів, які можуть відбуватися з квантовою системою. Кожен оператор E_k відповідає певному можливому фізичному процесу (перетворенню квантового стану) внаслідок взаємодії із середовищем або вимірювання. Сумування за індексом a означає, що кінцевий стан системи є статистичною сумішшю результатів різних можливих перетворень. Такий підхід дозволяє описувати широкий спектр фізичних явищ, включаючи шум, втрати енергії та випадкові флуктуації.

Попри зручність цього представлення, воно не завжди дає безпосереднє фізичне пояснення природи каналу, оскільки будь-який квантовий канал можна інтерпретувати як комплекс система + середовище. Для цього доцільно розглянути більш фундаментальний опис, що базується на унітарній еволюції розширеної системи. Згідно з теоремою Стайнспрінга, будь-який квантовий канал можна представити у вигляді

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = Tr_E\left(U(\rho \otimes \rho_E)U^\dagger\right), \qquad (8.7)$$

де ρ – вхідний квантовий стан системи; ρ' – вихідний квантовий стан системи після дій каналу; ρ_E – початковий стан середовища (волокно, атмосфера, шум); $\rho \otimes \rho_E$ – об'єднаний стан системи із середовищем; U – унітарний оператор, що описує спільну еволюцію системи і середовища, причому $U^\dagger U = 1$; $U^\dagger$ – спряжено-транспонований оператор до U (аналог U^{-1}); $U(\rho \otimes \rho_E)U^\dagger$ – це стан після взаємодії; Tr_E – часткове трасування по середовищу. Операція часткового трасування означає, що ми відкидаємо ступені свободи середовища, залишаючи лише ефективний стан системи.

Процес дії квантового каналу можна подати у вигляді схеми

початковий стан ρ



кінцевий стан ρ'

Ця схема відображає процес трансформації квантового стану під впливом фізичного середовища або квантової операції. Таким чином, будь-який квантовий канал можна інтерпретувати як результат взаємодії із середовищем з подальшою втратою інформації про нього.

З огляду на це, стає зрозуміло, що шум у квантових системах не є фундаментально випадковим, а виникає через втрату контролю над частиною

системи. Проте для аналізу властивостей каналів та їх порівняння часто зручно використовувати інший підхід, пов'язаний із матрицею Чоя. Ідея матриці Чоя така: замість того, щоб вивчати, як канал діє на всі можливі стани, ми «кодуємо» весь канал в одному операторі. Матриця Чоя каналу $\mathcal{E}$ визначається як

$$J_{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \otimes I)(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|), \quad (8.8)$$

де $J_{\mathcal{E}}$ – матриця Чоя; $\mathcal{E}$ – квантовий канал; I – тотожне відображення; $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle \otimes |i\rangle$ – максимально заплутаний стан у просторі розмірності d. Знаючи $J_{\mathcal{E}}$, можна відновити $\mathcal{E}(\rho)$. Матриця Чоя є повністю додатною. Це – математичний опис будь-якого фізично допустимого квантового каналу. Причому канал є фізично допустимим тоді і тільки тоді, коли $J_{\mathcal{E}} \geq 0$. Ліва частина цього запису означає, що канал є повністю додатним, трасозберігаючим. Права частина означає, що матриця Чоя є додатнім оператором. Загалом це означає наступне: щоб перевірити фізичність каналу не треба перевіряти всі стани, достатньо перевірити одну матрицю – матрицю Чоя. Якщо канал повністю додатній – матриця Чоя додатна, якщо матриця Чоя додатна – канал повністю додатній. Це повна еквівалентність: матриця Чоя задовольняє умову трасозбереження: $Tr_{\text{вих}} J_{\mathcal{E}}) = I$, де $Tr_{\text{вих.}}$ – це трасування по виходу. Таким чином матриця Чоя дозволяє перевести задачу аналізу каналів у задачу дослідження операторів. Це представлення широко використовується в квантовій томографії і чисельних методах.

Математичний формалізм квантових каналів базується на понятті повністю додатних слідзберігаючих відображень, які описують усі фізично допустимі перетворення квантових станів. На основі математичного формалізму виділяють кілька типів квантових каналів.

1. Унітарні квантові канали. Унітарний квантовий канал – це найпростіший тип квантового каналу, який описує ідеальну (безшумну) еволюцію квантової системи. Він задається відображенням

$$\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^{\dagger}, \quad (8.9)$$

де ρ – матриця густини стану; U – унітарний оператор; $U^\dagger$ – оператор, ермітово спряжений до U. Унітарність означає $UU^\dagger = I$. Формальне визначення показує структуру каналу, однак для розуміння його ролі в квантовій теорії необхідно з'ясувати, який саме фізичний процес він описує. Унітарний канал описує еволюцію замкненої квантової системи, відсутність взаємодії з середовищем і збереження всієї квантової інформації. Це ідеалізований випадок, коли немає шуму, немає втрат, немає декогеренції. Хоча унітарний канал має просту форму, його можна вписати в загальний формалізм квантових каналів. Унітарний канал має лише один оператор Крауса: $\mathcal{E}(\rho) = E_1 \rho E_1^\dagger$, де $E_1 = U$. Тобто канал має лише один можливий «сценарій» еволюції стану, і немає випадковості або шуму.

Такий простий вигляд каналу визначає його фундаментальні властивості, які суттєво відрізняють його від шумових каналів. Зокрема унітарний канал є **оборотним**, тобто $\mathcal{E}^{-1}(\rho) = U\rho U^\dagger$. Це означає, що інформація не втрачається. Якщо стан чистий $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, то $\mathcal{E}(\rho) = |\psi'\rangle\langle\psi'|$, тобто чисті стани залишаються чистими. Ентропія фон Неймана не змінюється, тобто

$$S\big(E(\rho)\big) = S(\rho). \tag{8.10}$$

Таким чином, унітарні квантові канали є фундаментальним класом каналів, що описують ідеальну еволюцію квантових систем. Вони повністю зберігають інформацію, є оборотними, не змінюють ентропію, відповідають розв'язкам рівняння Шредінгера. Унітарний канал – це ідеальна квантова операція без втрат.

2. Деполяризуючий канал. Деполяризуючий канал – це один із базових шумових квантових каналів, який описує процес, у якому квантова система частково або повністю втрачає інформацію про свій початковий стан, переходячи до максимально змішаного стану. Формально для системи розмірності d:

$$\rho' = (1-p)\rho + \frac{I}{d}p, \tag{8.11}$$

де ρ – початкова матриця густини; ρ' – матриця густини після дії шуму; $p \in [0,1]$ – параметр шуму; I – одиничний оператор; d – розмірність гільбертового простору; $\frac{I}{d}$ – максимально змішаний стан. При $p = 0$ стан системи не

змінюється. При $p = 1$ система переходить у повністю змішаний стан, тобто система повністю втрачає інформацію.

Для кубіта:

$$\rho' = (1 - p)\rho + \frac{I}{2}p. \tag{8.12}$$

Це означає, що будь-який стан зміщується до центру сфери Блоха.

Щодо властивостей, то деполяризуючий канал є повністю додатним і слідзберігаючим. Канал є унітарно інваріантним, тобто однаково діє у будь-якому базисі. Деполяризуючий канал має обмежену класичну і квантову пропускну здатність. При великому p квантова пропускна здатність $\to 0$. Деполяризуючий канал є фундаментальною моделлю шуму в квантових системах. Він описує втрату всієї інформації про стан, має просте математичне представлення, широко використовується в теорії квантових каналів і виправлення помилок.

3. Дефазуючий канал. Дефазуючий канал (або фазовий канал) – це квантовий канал, який описує процес втрати когерентності квантового стану без зміни його класичних ймовірностей. Формально для кубіта він задається як:

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-\lambda)\rho_{01} \\ (1-\lambda)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

де ρ – матриця густини; ρ_{ij} – її елементи; $\lambda \in [0,1]$ – параметр дефазування. Тут діагональні елементи (ймовірності) залишаються незмінними, тоді як недіагональні (когерентність) зменшуються як

$$\rho_{01} \to (1-\lambda)\rho_{01}, \tag{8.14}$$

Це означає втрату квантової когерентності без зміни ймовірностей. Таким чином, дефазуючий канал описує втрату фазової інформації внаслідок взаємодії з середовищем. При $\lambda = 1$

$$\rho \to \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & \rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

стан стає повністю класичним, зникає будь-яка когерентність. Інакше кажучи, система зберігає «класичну» інформацію, але втрачає «квантову».

Основні властивості каналу наступні: канал є фізично допустимим; він є необоротним, тобто інформація про фази втрачається; ймовірності не змінюються; квантові ефекти зникають; заплутаність зменшується. Дефазування виникає через флуктуації фаз, шум середовища, нестабільність лазерів, теплові процеси. Він є основним у квантових комп'ютерах, квантовій криптографії і виправленні помилок.

4. Канал амплітудного затухання. Канал амплітудного затухання описує фізичний процес втрати енергії квантовою системою, наприклад спонтанне випромінювання фотона атомом або релаксацію кубіта збудженого стану. Для кубіта він задається у вигляді:

$$E(\rho) = \sum_{i=0}^{1} E_i \rho E_i^{\dagger} , \tag{8.16}$$

де оператори Крауса:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.17}$$

а $\gamma \in [0,1]$ – параметр затухання (ймовірність втрати енергії)

Канал описує процес $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, тобто збуджений стан $|1\rangle$ переходить в основний $|0\rangle$. При цьому система випромінює енергію в середовище. Це модель спонтанного випромінювання або релаксації в квантових системах. Канал є повністю додатним і слідзберігаючим, необоротним при $\gamma > 0$ (інформація про стан $|1\rangle$ частково втрачається). Заплутаність при малих γ частково зменшується, при великих γ – зникає. Канал виникає в атомних системах (спонтанне випромінювання), у фотоніці (втрати фотонів), в надпровідникових кубітах і квантових точках. Основними особливостями каналу амплітудного затухання є асиметричність, зменшення енергії, наявність привілейованого стану $|0\rangle$, зменшення когерентності та заплутаності.

Окремий клас становлять канали вимірювання, які описують колапс квантового стану внаслідок спостереження. Вони, як правило, є незворотними і супроводжуються втратою когерентності.

Таким чином, різні типи квантових каналів відповідають різним фізичним механізмам: від ідеальної еволюції до повної втрати інформації. Це дозволяє використовувати їх як універсальний інструмент для моделювання реальних квантових систем.

Розглянемо простий приклад. Нехай кубіт знаходиться у стані

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Після дії дефазуючого каналу позадіагональні елементи зменшуються, що означає втрату інтерференційних властивостей. У випадку деполяризуючого каналу стан наближається до $\frac{I}{2}$, тобто повністю випадкового.

Загалом квантові канали визначають, як інформація передається, спотворюється і відновлюється. Вони лежать в основі таких понять, як квантова пропускна здатність, квантове кодування та виправлення помилок. Математичний опис квантових каналів базується на строгому формалізмі CPTP-відображень, який забезпечує фізичну коректність перетворень, дозволяє описувати шум та втрати, є універсальним для різних реалізацій. Основними інструментами є представлення Крауса, унітарне розширення та матриця Чоя, що дозволяють аналізувати канали з різних точок зору. Класифікація каналів показує, що різні типи шумів і еволюцій мають чітке математичне відображення.

8.2. Механізми виникнення втрат у волоконних та атмосферних лініях

У реальних квантових каналах передача інформації ніколи не відбувається ідеально. Взаємодія квантової системи з навколишнім середовищем призводить до втрат енергії, шуму та декогеренції. Ці процеси мають фундаментальну природу і є невід’ємною частиною квантової динаміки відкритих систем. Фізика втрат визначає ключові характеристики квантових каналів, зокрема дальність передачі, точність відтворення станів, можливість збереження заплутаності. Тому її розуміння є критично важливим для побудови ефективних квантових комунікаційних систем.

Втрати в квантових каналах проявляються через різні фізичні механізми, які можна умовно поділити на: базові процеси взаємодії світла з середовищем; ефекти, характерні для конкретних середовищ (волокно, атмосфера); динамічні флуктуації параметрів каналу. Такий поділ дозволяє системно розглянути як універсальні, так і специфічні аспекти втрат.

Втрати енергії квантового сигналу зумовлені такими фундаментальними фізичними процесами:

1. Поглинання. Механізм: фотон взаємодіє з матеріалом і передає свою енергію середовищу. В результаті відбувається зменшення інтенсивності сигналу, зникнення фотонів.

2. Розсіювання. Механізм: світло відхиляється від початкового напрямку. Виділяють такі види розсіювання: релеївське – на малих неоднорідностях, Мі-розсіювання – на більших структурах. В результаті частина сигналу виходить із каналу.

3. Дифракція. Механізм: пучок світла розширюється при поширенні. В результаті відбувається зменшення густини енергії, втрати на приймачі

4. Атмосферні ефекти. Вони включають поглинання газами і турбулентність. В результаті – нестабільність сигналу.

Ці механізми проявляються по-різному залежно від середовища передачі. Найбільш поширеним каналом є оптичне волокно, тому доцільно розглянути його особливості детальніше. У волоконній оптиці втрати описуються експоненційним законом:

$$I(L) = I_0 e^{-\alpha L}, \qquad (8.19)$$

де I_0 – початкова інтенсивність сигналу: α – коефіцієнт затухання, L – довжина волокна. Мінімальні втрати спостерігаються у телекомунікаційних вікнах (≈1550 нм), де коефіцієнт затухання мінімальний. Втрати накопичуються з відстанню і це обмежує дальність квантової передачі.

Окрім втрат інтенсивності, у волокні виникають ефекти, що змінюють структуру квантового сигналу. Це такі ефекти:

1. Хроматична дисперсія. Механізм: різні частоти поширюються з різною швидкістю. В результаті відбувається розширення імпульсів і перекриття сигналів.

2. Поляризаційна модова дисперсія (PMD). Вона виникає через двопроменезаломлення і проявляється в тому, що різні поляризації рухаються по-різному. В результаті – спотворення квантових станів, зменшення когерентності.

На відміну від стаціонарних ефектів, у реальних каналах також присутні часові флуктуації, які призводять до нестабільності параметрів сигналу. Основними з них є:

1. Фазовий дрейф, тобто зміна оптичної довжини шляху і температурні коливання. Результат – порушення інтерференції.

2. Поляризаційний дрейф – це випадкова еволюція поляризації. Результат – помилки у поляризаційних кубітах.

Ці ефекти мають статистичний характер, тобто є випадковими і залежать від часу. Подібні процеси проявляються ще сильніше у каналах, де світло поширюється у відкритому середовищі.

У каналах вільного простору мають місце такі види втрат.

1. Геометричні втрати. Механізм: пучок розширюється і лише частина світла потрапляє в детектор.

2. Турбулентність, зумовлена флуктуаціями показника заломлення. Результат – фазові спотворення, «мерехтіння» сигналу.

Найбільш складним випадком є передача через атмосферу на великі відстані, що реалізується у супутникових системах. Окрім великої відстані перевагою супутникових квантових каналів є менші втрати, ніж у волокні. В той же час важливого значення набувають атмосферні ефекти: турбулентність і фазові флуктуації. Для подолання цих негативних явищ застосовують адаптивну оптику. Адаптивна оптика – це технологія, яка дозволяє в реальному часі виправляти спотворення світлового сигналу, що виникають під час його проходження через середовище (найчастіше атмосферу). Світлова хвиля,

проходячи через середовище (наприклад, повітря), деформується через викривлення хвильового фронту. Адаптивна оптика ці деформації вимірює і компенсує у реальному часі, що покращує якість сигналу. У квантових системах адаптивна оптика допомагає зберігати когерентність, підтримувати інтерференцію і передавати заплутані стани. Таким чином, адаптивна оптика забезпечує динамічну корекцію хвильового фронту світла, компенсуючи атмосферні спотворення і підвищуючи якість квантової передачі інформації.

Наведемо декілька прикладів для пояснення розглянутого матеріалу.

1. Волоконна передача фотонів. Фотон передається на 100 км. Відбуваються значні втрати і ймовірність детекції різко падає, що призводить до обмеження дальності QKD.

2. Інтерферометричний експеримент. Фазовий дрейф зменшує видимість інтерференції і призводить до помилок

3. Супутниковий канал. Передача між Землею і супутником. Втрати менші, ніж у волокні, але сильні атмосферні спотворення.

Фізика втрат у квантових каналах є складним поєднанням фундаментальних процесів взаємодії світла з середовищем, специфічних ефектів конкретних каналів і динамічних флуктуацій параметрів. Ці процеси визначають ефективність передачі квантової інформації, межі дальності, стабільність квантових протоколів. Розуміння фізики втрат створює основу для розробки моделей каналів, методів компенсації та квантових мереж майбутнього.

Вплив розглянутих фізичних механізмів втрат у квантових каналах не обмежується лише зменшенням інтенсивності сигналу. У квантових системах втрати мають глибші наслідки, оскільки вони безпосередньо впливають на структуру квантового стану. На відміну від класичних систем, де втрата сигналу означає лише зниження потужності, у квантових каналах втрати призводять до руйнування суперпозиції, деградації заплутаності, появи квантового шуму. Ці явища об’єднуються поняттям квантових ефектів втрат. Щоб зрозуміти ці ефекти, необхідно розглянути, як взаємодія із середовищем змінює квантовий стан. Це включає три ключові аспекти: декогеренцію, тобто втрату квантових

фазових зв’язків; змішування станів – перехід від чистих станів до змішаних; втрату заплутаності, тобто руйнування квантових кореляцій; квантовий шум – це будь-який процес, що випадково змінює квантовий стан і порушує його когерентність або енергію.

Розглянемо ці явища послідовно.

1. Декогеренція. Декогеренція – це процес втрати когерентності квантового стану внаслідок взаємодії із середовищем. Суть явища: квантовий стан характеризується не лише ймовірностями, а й фазовими зв’язками між компонентами. Декогеренція руйнує ці зв’язки. Таким чином система «втрачає фазу» і квантова інтерференція зникає.

2. Змішування квантових станів. Декогеренція є окремим випадком більш загального процесу – переходу квантових станів у статистичні суміші. У результаті втрат чистий стан переходить у змішаний (рис. 8.5):

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow \sum_i p_i \rho_i. \tag{8.20}$$

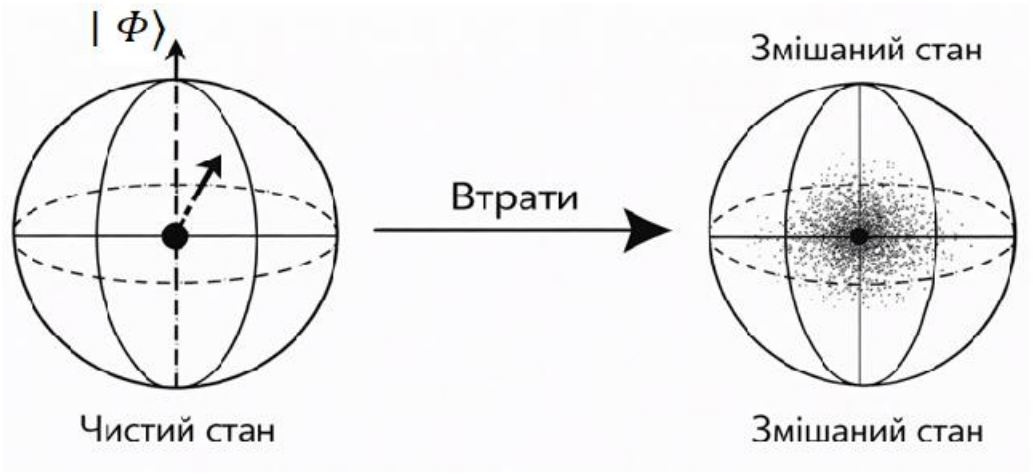


Рис. 8.5. Перехід від чистого до змішаного квантового стану

Втрати призводять до розширення області станів на сфері Блоха, що відповідає переходу від чистого стану до статистичної суміші. Причина цього в тому, що система заплутується із середовищем і частина інформації стає недоступною. Як наслідок, зростає ентропія, зменшується визначеність стану.

3. Втрата заплутаності. Якщо система була частиною заплутаної пари, втрати впливають не лише на локальний стан, а й на квантові кореляції між системами. Заплутаність є визначальним ресурсом квантових технологій, але вона дуже чутлива до втрат. Наприклад, початковий стан:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Після втрат один із кубітів взаємодіє із середовищем і кореляції слабшають (рис. 8.6).



Рис. 8.6. Деградація заплутаності під дією втрат

Початковий заплутаний стан (наприклад, стан Белла) переходить у менш заплутаний або змішаний стан внаслідок взаємодії із середовищем. Отже, стан стає змішаним і менш заплутаним. Слід звернути увагу на такий ефект як раптова смерть заплутаності (entanglement sudden death), тобто заплутаність може зникнути повністю за скінченний час. Втрати і декогеренцію можна розглядати як прояв квантового шуму, який є фундаментальним обмеженням передачі інформації.

4. Квантовий шум. Квантовий шум – це фундаментальний наслідок неконтрольованої взаємодії квантової системи з середовищем. Він призводить до декогеренції, змішування станів і втрати заплутаності. Все це обмежеує передачу квантової інформації. Основними типами квантового шуму є фазовий шум (декогеренція), який руйнує суперпозицію; амплітудний шум, пов’язаний з втратою енергії, і деполяризаційний шум. Квантовий шум обмежує дальність передачі, зменшує точність, створює помилки. На відміну від класичного шуму

квантовий шум змінює сам квантовий стан, а не лише сигнал. Розглянуті ефекти проявляються в реальних експериментальних системах і визначають ефективність квантових протоколів.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведені теоретичні положення.

1. *Декогеренція у волоконному каналі.* Фотон у суперпозиції проходить через волокно. При цьому фаза змінюється випадково і інтерференція зникає. Результат – втрата квантової інформації.

2. Змішування стану через втрати. В цьому випадку при передачі частина фотонів втрачається і стан описується статистичною сумішшю.

3. Деградація заплутаності. У парі заплутаних фотонів один проходить через шумний канал, через це кореляції зменшуються. Це обмежує квантову криптографію.

Таким чином, квантові ефекти втрат є фундаментальними процесами, що визначають поведінку квантових каналів. Вони проявляються у вигляді декогеренції, змішування станів, втрати заплутаності, квантового шуму. Ці ефекти суттєво відрізняють квантові канали від класичних і накладають принципові обмеження на передачу інформації. Розуміння цих явищ є необхідною передумовою для аналізу пропускної здатності каналів, розробки методів захисту інформації, побудови масштабованих квантових мереж.

8.3. Моделі каналів із втратами та межі пропускної здатності інформації

Для кількісного аналізу та проєктування квантових систем необхідно мати зручні математичні моделі, які дозволяють описувати фізичну природу втрат та їхній вплив на квантові стани у компактній та універсальній формі. Моделі квантових каналів із втратами виконують подвійну роль. З одного боку, вони узагальнюють фізичні процеси у вигляді математичних відображень, а з іншого – дозволяють аналізувати інформаційні характеристики каналів.

Фізично втрати виникають через взаємодію системи із середовищем, що вже було описано у вигляді:

$$\mathcal{E}(\rho) = Tr_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^{\dagger}]\,. \qquad (8.21)$$

Однак для практичних задач така форма є надто загальною. Тому вводяться спеціалізовані моделі, які відображають типові механізми втрат, а саме: модель дільника пучка (beam splitter); канал амплітудного затухання; бозонний канал втрат (lossy bosonic channel); опис через середовище (stinespring dilation).

Розглянемо їх послідовно.

1. Модель дільника пучка (Beam Splitter Model). Це одна з найважливіших моделей для фотонних каналів. Ідея полягає у наступному: канал втрат моделюється як взаємодія сигналу з «вакуумним» середовищем через дільник пучка. Математично модель описується виразом:

$$a_{out} = \sqrt{\eta}a_{in} + \sqrt{1-\eta}a_{env,} \qquad (8.22)$$

де η – коефіцієнт пропускання; $1-\eta$ – втрати; a_{in} – квантовий оператор поля на вході, тобто це сигнал, який передається (наприклад: фотон у волокні); a_{out} – це вихідний оператор, тобто поле після проходження каналу. Фізично – це те, що доходить до детектора; a_{env} – це оператор середовища або квантове поле середовища (зазвичай вакуум або тепловий шум). Наведене рівняння означає наступне: частина сигналу проходить, а частина замінюється середовищем. Модель дільника пучка є особливо наочною для фотонних систем, але для кубітів зручніше використовувати дискретні операторні моделі.

2. Канал амплітудного затухання. У реальних квантових системах енергія не зберігається ідеально. Наприклад, фотон може загубитися у волокні, атом може перейти із збудженого стану в основний, квантовий сигнал може «затухати» з часом. Саме такі процеси описує канал амплітудного затухання. Щоб зрозуміти цей канал, достатньо уявити дуже просту систему – кубіт із двома станами: $|0\rangle$ – «немає енергії» і $|1\rangle$ – «є енергія». Канал описує процес $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, тобто система втрачає енергію. Канал описує два варіанти розвитку подій: нічого не сталося. Стан залишився тим самим, але трохи «ослаб»; відбулася втрата. Система втратила енергію, здійснився перехід $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Саме ці два сценарії і описують оператори Крауса

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.23)$$

Цей канал описує втрати фотонів, релаксацію атомів, загасання сигналу. У волоконній оптиці це головний тип втрат. У квантовій криптографії він визначає дальність передачі. Канал амплітудного затухання моделює процеси, при яких квантова система втрачає енергію, що проявляється у переході стану $|1\rangle$ в $|0\rangle$ з певною ймовірністю. Таким чином, канал амплітудного затухання є базовою моделлю втрат енергії. Для опису більш складних систем (наприклад, світлових полів) використовується більш загальна модель – бозонний канал втрат.

3. Бозонний канал втрат (Lossy Bosonic Channel). У попередньому пункті ми розглядали кубіт як систему з двома станами. Але у квантовому зв'язку найчастіше працюють не з кубітами, а зі світлом. Світло – це не «0 або 1», а 0, 1, 2, 3, … фотонів. Тому потрібна модель, яка описує, що відбувається зі світлом, коли воно проходить через канал із втратами. При цьому частина фотонів доходить до детектора, а частина – втрачається**.** Для опису бозонного каналу втрат використовується коефіцієнт пропускання η. При $\eta = 1$ нічого не втрачається, при $\eta = 0{,}5$ – проходить половина, а при $\eta = 0$ – все втрачено. І це відбувається випадково. Для квантового стану це означає, що сигнал не просто слабшає, але ще змінюється і сам квантовий стан. Як наслідок, зменшується число фотонів, зникає когерентність, руйнується заплутаність. Отже, бозонний канал втрат – це узагальнення каналу амплітудного затухання. Ця модель узагальнює процес втрат на квантові стани світла, описуючи випадкове зменшення числа фотонів унаслідок взаємодії із середовищем. Бозонний канал втрат використовується практично всюди: у квантовій оптиці, квантовій криптографії, лазерних каналах, у супутниковому зв'язку. Таким чином, бозонний канал втрат є базовою моделлю для опису передачі світла в реальних умовах. Він дозволяє враховувати як втрати енергії, так і вплив середовища на квантовий стан. Усі наведені моделі можуть бути отримані з більш загального підходу – опису через взаємодію із середовищем.

4. Опис через середовище (Stinespring dilation). Будь-який квантовий канал можна пояснити як взаємодію системи із середовищем. Система ніколи не ізольована. Завжди є повітря, матеріал, теплове середовище. Коли система з ними взаємодіє, то частина інформації «йде назовні» і ми її втрачаємо.

Основна формула

$$\mathcal{E}(\rho) = Tr_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^{\dagger}]\,. \qquad (8.24)$$

Проаналізуємо цю формулу. Спочатку була тільки система ρ. Після взаємодії з середовищем стає $\rho \otimes \rho_{env}$, тобто система + середовище разом. Вираз $U(\rho \otimes \rho_{env})U^{\dagger}$ означає, що система і середовище обмінюються енергією і заплутуються. Операція Tr_{env} означає, що не вимірюємо середовище, не знаємо, що з ним сталося. В результаті стан стає змішаним, з'являється шум. Саме це і є $\mathcal{E}(\rho)$ – квантовий канал. Опис через середовище (розширення Стайнспрінга) інтерпретує будь-який квантовий канал як результат унітарної взаємодії системи із середовищем з подальшою втратою інформації про середовище. Такий підхід дозволяє зрозуміти походження всіх квантових каналів і об'єднує різні моделі в єдину теоретичну картину.

Моделі квантових каналів із втратами є ключовим інструментом для опису реальних квантових систем. Вони дозволяють пов'язати фізичні процеси з математичними моделями, аналізувати вплив втрат на квантові стани, оцінювати ефективність квантових протоколів. Різні підходи дають взаємодоповнюючі уявлення про природу втрат. Ці моделі є основою для подальшого аналізу пропускної здатності каналів, методів компенсації втрат і побудови квантових мереж.

Як було показано квантові канали через втрати, шум, декогеренцію впливають на переданий стан: виникають. Проте природно виникає ключове практичне питання: скільки інформації можна передати через квантовий канал? Це питання і приводить до поняття пропускної здатності квантового каналу. У класичній теорії зв'язку пропускна здатність визначає максимальну кількість інформації, яку можна передати без помилок. У квантовому випадку ситуація

складніша, оскільки інформація може бути класичною або квантовою, канал впливає на суперпозиції і заплутаність, вимірювання змінює стан системи. Через ці особливості в квантовій теорії існує не одна, а кілька типів пропускної здатності: класична пропускна здатність; квантова пропускна здатність; приватна (секретна) пропускна здатність. Кожна з них відповідає різному типу інформації та різним задачам.

Розглянемо кожну з них більш детально

1. Класична пропускна здатність. Класична пропускна здатність квантового каналу – це максимальна кількість класичної інформації (бітів), яку можна надійно передати через квантовий канал за одне його використання з довільно малою ймовірністю помилки. Це відповідь на питання: скільки бітів можна передати через канал без помилок? Ми кодуємо класичні біти у квантові стани, тобто використовуємо їх як «носії» класичної інформації: $|0\rangle \rightarrow 0, \quad |1\rangle \rightarrow 1$. Канал їх спотворює, а приймач намагається їх розрізнити. Пропускна здатність – це максимум того, що можна передати надійно. У квантовому випадку стани можуть бути неортогональні, їх не завжди можна ідеально відрізнити. Тому існує фундаментальне обмеження. Максимальна кількість інформації обмежена так званою межою Холево:

$$\chi = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i), \tag{8.25}$$

де $S(\rho)$ – квантова ентропія (фон Неймана). Тобто, канал не дозволяє витягнути всю інформацію, яка «закодована» у квантовому стані. Однак квантовий канал може передавати не лише класичну, а і квантову інформацію.

2. Квантова пропускна здатність. Квантова пропускна здатність квантового каналу – це максимальна кількість квантової інформації (кубітів), яку можна надійно передати через канал за одне його використання з довільно малою ймовірністю помилки. Це відповідь на питання: скільки кубітів можна передати так, щоб зберегти їх квантову природу (суперпозицію і заплутаність)? Квантова інформація – це не просто біти, а суперпозиції, квантові стани, заплутаність. Тому потрібно передати стан так, щоб його можна було відновити. На відміну

від класичної інформації квантову інформацію не можна копіювати і не можна просто виміряти без втрати. Квантова інформація дуже чутлива: шум руйнує когерентність, а втрати знищують заплутаність. Якщо шум занадто великий, то квантова пропускна здатність дорівнює нулю. Квантова пропускна здатність пов'язана з так званою когерентною інформацією I_c:

$$I_c = S\big(\mathcal{E}(\rho)\big) - S(\rho, \mathcal{E}), \tag{8.26}$$

де ρ – це вхідний квантовий стан, тобто те, що ми передаємо. Це може бути кубіт або складніша система; $\mathcal{E}$ – квантовий канал, який описує шум, втрати і змінює стан; $\mathcal{E}(\rho)$ – це вихідний стан, це те, що отримує приймач вже після впливу каналу; $S\big(\mathcal{E}(\rho)\big)$ – ентропія вихідного стану (скільки невизначеності після каналу); $S(\rho, E) = S(\rho_{env})$ – ентропія середовища після взаємодії. Ця величина показує, скільки інформації забрав канал.

Головна ідея формули така:

$I_c =$ (що залишилось) – (що втрачено) $=$ корисна квантова інформація

Іноді записують:

$$I_c = S(B) - S(E), \tag{8.27}$$

де B – отримувач; E – середовище.

Когерентна інформація визначається як різниця між ентропією вихідного стану та ентропією середовища і характеризує кількість квантової інформації, що зберігається після дії каналу. Слід мати на увазі, що деякі канали можуть передавати класичну інформацію, але не можуть передавати квантову. Таким чином, квантова пропускна здатність – це максимальна кількість кубітів, яку можна передати через квантовий канал без втрати квантових властивостей.

Окрім передачі інформації, у квантових системах важливою є також її захищеність. Для цього використовується приватна (секретна) пропускна здатність.

3. Приватна (секретна) пропускна здатність. Приватна (секретна) пропускна здатність квантового каналу – це максимальна кількість класичної інформації, яку можна надійно передати через квантовий канал так, щоб вона

залишалася недоступною для стороннього спостерігача (зловмисника). Це відповідь на питання: скільки інформації можна передати не просто без помилок, а ще й так, щоб її не міг перехопити сторонній спостерігач? У квантовому каналі завжди є отримувач (Боб) і середовище (умовний зловмисник). Інформація розподіляється між ними: частина доходить до отримувача, а частина «витікає» в середовище. Завдання наступне: максимізувати інформацію у отримувача і мінімізувати інформацію у зловмисника. Якщо отримувач знає багато, а зловмисник майже нічого, то канал має високу секретну пропускну здатність.

Приватна пропускна здатність P визначається рівнянням:

$$P \sim I(\text{отримувач}) - I(\text{зловмисник}). \qquad (8.28)$$

Таким чином, приватна пропускна здатність – це максимальна кількість інформації, яку можна передати через квантовий канал так, щоб вона залишалася секретною від сторонніх. Слід зазначити, що канал може добре передавати інформацію, але погано її захищати. І навпаки, навіть шумний канал може бути безпечним. Приватна пропускна здатність використовується у квантовій криптографії (QKD), захищених каналах зв'язку і для генерації секретного ключа. Таким чином, один і той самий канал має різні можливості залежно від того, що саме ми передаємо.

При розгляді пропускної здатності важливим є питання впливу втрат і шуму на пропускну здатність квантового каналу. Цей вплив полягає у зменшенні максимальної кількості інформації (класичної, квантової або секретної), яку можна надійно передати через канал. Будь-який реальний канал втрачає частину сигналу і додає шум. В результаті інформація частково губиться, а частково спотворюється. Втрати означають, що фотони зникають, сигнал не доходить. Шум означає, що сигнал змінюється, виникають помилки. В цьому випадку, класична пропускна здатність зменшується, оскільки важче розрізняти стани і більше помилок.

Квантова пропускна здатність дуже чутлива до впливу шуму, так як декогеренція руйнує суперпозицію, а втрати руйнують заплутаність. Що стосується приватної пропускної здатності, то вона залежить від витоку

інформації: шум може допомагати (маскує сигнал), але втрати зменшують корисну інформацію. Отже, чим більше втрат і шуму, тим менше інформації доходить до отримувача. Наприклад, у волоконному каналі зі збільшенням довжини експоненціально зменшується кількість фотонів. Тому пропускна здатність швидко падає з відстанню. Причому існує максимальна відстань, після якої передача квантової інформації стає неможливою.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Ідеальний канал. Немає шуму. Максимальна пропускна здатність.

2. Волоконний канал. Чим довший кабель, тим більше втрат. Менше фотонів доходить. Падає пропускна здатність, обмежена швидкість передачі.

3. Шумний канал. Сигнал сильно спотворений, сильна декогеренція, передача кубітів неможлива, квантова пропускна здатність прямує до нуля.

4. Фазовий шум. Суперпозиція руйнується, квантова інформація втрачається.

5. Квантова криптографія. Навіть при шумі можна передавати ключ, але втрати зменшують швидкість ключа, а шум обмежує безпеку.

Пропускна здатність квантових каналів є фундаментальною характеристикою, що визначає ефективність передачі інформації. Вона залежить від типу інформації (класична чи квантова), рівня шуму і втрат, властивостей каналу. Квантові канали мають різні типи пропускної здатності, але існують фундаментальні межі передачі інформації, а шум і втрати накладають принципові обмеження.

8.4. Межа PLOB та фундаментальні обмеження безповторювачних каналів

У класичних системах зв’язку втрати сигналу можна частково компенсувати підсиленням. У квантових системах така стратегія не працює через принципову заборону клонування квантових станів. Тому при передачі квантової інформації через оптичне волокно або інший фізичний канал виникає фундаментальне питання: яка максимальна кількість інформації може бути

передана, якщо сигнал поступово втрачається? Це питання стає особливо критичним для квантової криптографії (QKD), квантових мереж і розподілу заплутаності. Особливо важливою є ситуація, коли передача здійснюється без використання квантових повторювачів, тобто без проміжного відновлення або підсилення квантового сигналу. Такі канали називаються безповторювачними (repeaterless channels), і саме вони лежать в основі сучасних оптичних ліній зв'язку. Фундаментальне обмеження для таких каналів встановлює так звана межа PLOB (Pirandola–Laurenza–Ottaviani–Banchi).

Межа PLOB **–** це верхня границя швидкості передавання квантової інформації, заплутаності або секретного ключа через квантовий канал без використання квантових повторювачів, яка не може бути перевищена жодним протоколом, навіть із застосуванням найзагальніших LOCC-операцій. Ця межа є принциповою, оскільки вона не залежить від конкретного протоколу і накладає універсальні обмеження на всі можливі схеми зв'язку без повторювачів. Щоб зрозуміти природу межі PLOB, необхідно спочатку розглянути загальні характеристики квантових каналів, поняття пропускної здатності та роль втрат у квантових системах. Лише після цього можна перейти до строгого формулювання межі та її математичного доведення.

Квантовий канал описується відображенням

$$\mathcal{E} : \rho \to \mathcal{E}(\rho), \tag{8.29}$$

де ρ – матриця густини; $\mathcal{E}$ – CPTP-відображення (повністю додатне та слідзберігаюче). Двокрапка означає, що оператор $\mathcal{E}$ розглядається як відображення (квантовий канал), яке діє на матрицю густини ρ та переводить її у новий стан $\mathcal{E}(\rho)$. Пропускна здатність каналу характеризує максимальну кількість інформації, яку можна передати за одне використання каналу. Як згадувалося вище, у квантовій теорії розглядають кілька типів пропускної здатності класичну (C), квантову (Q), секретний ключ (K). Однак у реальних фізичних системах, зокрема в оптичних волокнах, ключову роль відіграють втрати. Тому наступним кроком є розгляд спеціального класу каналів – втратних (lossy) каналів.

Основною моделлю є бозонний канал втрат, який описує передачу світла через оптичне волокно. Його параметр $\eta \in [0,1]$, де η – коефіцієнт пропускання. При $\eta = 1$ маємо ідеальний канал, при $\eta = 0$ – сигнал повністю зникає. Ймовірність того, що фотон дійде до приймача визначається як $P_{\text{успіх}} = \eta$. Це підводить до основного питання: яка максимальна швидкість передачі інформації через такий канал?

У загальному випадку сторони (Аліса і Боб) можуть використовувати локальні операції (LO) і класичний зв'язок (CC). Такі протоколи називаються LOCC (Local Operations and Classical Communication). Для аналізу максимальної пропускної здатності потрібно врахувати найбільш загальні LOCC-протоколи, що приводить до поняття двосторонньої пропускної здатності. Двостороння пропускна здатність позначається як

$$C_{\leftrightarrow}, Q_{\leftrightarrow}, \ K_{\leftrightarrow}, \tag{8.30}$$

де C – класична інформація; Q – квантова інформація; K – секретний ключ. Незважаючи на можливість використання складних протоколів, існує універсальна верхня межа – межа PLOB.

Для втратного каналу:

$$K \leq -log_2(1-\eta), \tag{8.31}$$

де K – максимальна швидкість генерації секретного ключа; η – коефіцієнт пропускання. Ця формула означає, що навіть ідеальний протокол не може передати більше інформації, ніж дозволяє ця межа. Пропускна здатність обмежена логарифмічно і при малих η:

$$K \approx \frac{\eta}{ln2}. \tag{8.32}$$

Щоб зрозуміти походження цієї межі, необхідно звернутися до ентропійних характеристик квантових станів. Основним інструментом є відносна ентропія заплутаності $E_R(\rho)$. Вона визначається як:

$$E_R(\rho) = \min_{\sigma \in SEP} S(\rho \parallel \sigma), \tag{8.33}$$

де σ – сепарабельний стан; $S(\rho \parallel \sigma)$ – квантова відносна ентропія:

$$S(\rho \parallel \sigma) = Tr(\rho log\rho - \rho log\sigma). \quad (8.34)$$

Ця величина дозволяє оцінити максимальну кількість заплутаності, яку можна передати через канал.

Основна ідея полягає в тому, що будь-який канал можна замінити на ресурсний стан + LOCC. Це дає

$$E(\rho) = \Lambda(\rho \otimes \sigma_E), \quad (8.35)$$

де Λ – LOCC; σ_E – ресурсний стан каналу. Це дозволяє звести задачу до аналізу одного стану. Використовуючи монотонність ентропії заплутаності

$$E_R\big(\Lambda(\rho)\big) \leq E_R(\rho), \quad (8.36)$$

Отримуємо

$$K \leq E_R(\sigma E). \quad (8.37)$$

Це означає, що швидкість передачі інформації експоненційно зменшується з відстанню. Для втратного каналу:

$$E_R \leq -log_2(1-\eta), \quad (8.38)$$

Тобто канал обмежує доступну заплутаність і це, в свою чергу, обмежує передачу інформації. Межа означає, що неможливо перевищити певну швидкість передачі і навіть найкращі протоколи обмежені втратами.

Як приклад розглянемо оптичне волокно. Для нього коефіцієнт пропускання

$$\eta = e^{-\alpha L}, \quad (8.39)$$

де L – довжина; α – коефіцієнт загасання. Тоді спостерігається експоненційне падіння швидкості:

$$K \sim e^{-\alpha L}. \quad (8.40)$$

Отже, для великих відстаней передача без повторювачів неефективна.

Таким чином, межа PLOB обмежує квантовий інтернет, показує необхідність квантових повторювачів і визначає межі квантової криптографії. Повторювачі дозволяють розбити канал на сегменти, відновити заплутаність і обійти межу PLOB. Межа PLOB застосовується до всіх безповторювачних каналів і будь-яких LOCC-протоколів.

Межа PLOB є фундаментальним результатом квантової теорії інформації, який встановлює універсальне обмеження на передачу квантової інформації через втратні канали без використання повторювачів. Вона базується на глибоких поняттях, таких як відносна ентропія заплутаності та телепортаційна симуляція каналів, і демонструє, що навіть найскладніші протоколи не можуть обійти фізичні обмеження, накладені природою. Головний висновок полягає в тому, що для масштабування квантових мереж необхідно виходити за межі безповторювачних каналів, використовуючи квантові повторювачі та розподілену обробку інформації.

8.5. Методи компенсації втрат та експериментальні реалізації каналів

Квантові протоколи – це конкретні алгоритми використання квантових каналів для передачі інформації, генерації ключів або розподілу заплутаності. Однак у реальних умовах ці протоколи завжди працюють не в ідеальному середовищі, а в каналах із втратами та шумом. На відміну від класичних систем, де втрати просто зменшують рівень сигналу, у квантових системах вони мають глибші наслідки, а саме: знищують квантові стани, руйнують заплутаність, змінюють статистику вимірювань. Тому розуміння впливу втрат на квантові протоколи є критично важливим для їх практичної реалізації. Втрати впливають на квантові протоколи на кількох рівнях: на рівні окремих квантових станів; на рівні вимірювань і статистики; на рівні протоколу в цілому (ефективність, безпека).

Розглянемо ці ефекти послідовно.

1. Вплив втрат на квантові стани. Вплив втрат на квантові стани – це процес зміни або зникнення квантових станів унаслідок взаємодії з середовищем, що призводить до зменшення ймовірності їх передачі, втрати когерентності та переходу до змішаних станів. Це відповідь на питання: що відбувається з квантовим станом, коли частина сигналу губиться. Втрати означають, що фотон може не дійти до приймача або стан змінюється під час передачі. Був чіткий квантовий стан, а стало або нічого (втрата) або спотворений стан. В результаті

інформація частково або повністю втрачається. Втрати призводять до деградації квантових станів, зменшуючи їхню когерентність і переводячи чисті стани у змішані, що ускладнює передачу квантової інформації. Однак квантові протоколи працюють не з одним станом, а з багатьма переданими сигналами, тому важливо зрозуміти, як втрати впливають на результати вимірювань.

2. Вплив втрат на вимірювання. Вплив втрат на вимірювання – це зміна статистики результатів квантових вимірювань, зумовлена зменшенням кількості зареєстрованих квантових сигналів і появою невизначеності через втрату частини інформації в каналі. Це відповідь на питання: як втрати впливають на те, що ми реально бачимо на детекторі. Якщо сигнал втрачається, то детектор нічого не реєструє або отримує спотворені дані. В результаті зменшується кількість вимірювань, змінюється статистика.

Основними ефектами впливу втрат на вимірювання є: зменшення кількості подій: частина фотонів не доходить. Наприклад, було 100 сигналів, а стало 20 вимірювань. Чим менше даних, тим гірша точність; пропуски (відсутність сигналу): детектор не спрацьовує. Як наслідок з'являються «порожні» результати; спотворення статистики: результати вже не відображають реальний стан. Ми бачимо не повну картину; вплив на точність: менше даних – більша похибка; маскування шуму: втрати можуть приховувати помилки або ускладнювати їх виявлення. Втрати означають, що частина інформації не доходить до вимірювання, тому результат є неповним. Втрати призводять до зменшення кількості зареєстрованих подій і спотворення статистики вимірювань, що ускладнює відновлення переданої квантової інформації. Це безпосередньо впливає на роботу квантових протоколів, особливо тих, які базуються на статистичній перевірці.

3. Вплив втрат на квантову криптографію (QKD). Вплив втрат на квантову криптографію (QKD) – це зменшення ефективності, швидкості генерації ключа та рівня надійності протоколів розподілу ключів унаслідок втрати частини квантових сигналів під час передачі. Це відповідь на питання: як втрати впливають на безпечну передачу ключа. У квантовій криптографії

інформація передається через фотони, частина з них втрачається. В результаті менше корисних даних, складніше забезпечити безпеку.

Основними ефектами є:

1. Зменшення швидкості генерації ключа: менше фотонів доходить. Було багато сигналів, стало лише частина. Ключ формується повільніше. При великих втратах ключ може стати небезпечним, протокол може припинити роботу.

2. Зростання відносного шуму: при великих втратах частка шуму збільшується. В результаті знижується якість ключа.

3. Обмеження дальності передачі: зі збільшенням відстані втрати зростають. Після певної межі протокол перестає працювати.

4. Ускладнення виявлення підслуховування: втрати можуть маскувати атаки і ускладнювати аналіз.

5. Зменшення ефективності протоколу: потрібно більше сигналів, більше часу.

Таким чином, втрати у квантових каналах знижують швидкість і надійність протоколів квантового розподілу ключів, обмежуючи їх практичне застосування. Втрати особливо критичні, коли мова йде про передачу заплутаних станів.

4. Вплив втрат на заплутаність. Вплив втрат на заплутаність – це процес деградації або повного руйнування квантових кореляцій між частинками внаслідок втрати частини системи або взаємодії із середовищем під час передачі. Це відповідь на питання: що відбувається із заплутаними станами, коли частина сигналу губиться. Заплутаність – це дуже чутливий квантовий ресурс. Якщо одна з частинок втрачається або взаємодіє із середовищем, заплутаність слабшає або повністю зникає.

Основними ефектами впливу втрат на заплутаність є:

1. Втрата однієї частинки: якщо одна частинка з пари губиться, то заплутаність руйнується.

2. Декогеренція: навіть без повної втрати середовище руйнує кореляції.

3. Перехід до змішаного стану: заплутаний стан стає частково або повністю класичним.

4. Зменшення ступеня заплутаності: кореляції слабшають.

Втрати означають витік інформації у середовище. В результаті система втрачає квантові кореляції. Як наслідок, порушення роботи квантових протоколів, неможливість телепортації, зниження ефективності мереж. Для багатьох протоколів потрібна висока якість заплутаності, втрати її швидко руйнують. Для запобігання негативного впливу втрат на заплутаність використовують очищення заплутаності (entanglement purification), квантові повторювачі, оптимізацію каналів. Усе це призводить до фундаментальних обмежень на відстань і ефективність квантових протоколів.

5. Обмеження на дальність і ефективність. Обмеження на дальність і ефективність квантових каналів – це зменшення можливості передачі квантової інформації зі збільшенням відстані, зумовлене втратами, шумом та декогеренцією, що призводить до зниження пропускної здатності і якості передачі. Це відповідь на питання: чому квантову інформацію не можна передавати на будь-яку відстань без втрат якості.

Чим більша відстань, тим більше втрат, тим більше шуму. В результаті сигнал слабшає, інформація деградує.

Основними обмеженнями є: експоненціальне зростання втрат (у багатьох каналах (особливо у волокні) втрати зростають із відстанню); зниження пропускної здатності (менше сигналу – менше інформації); зростання впливу шуму (при слабкому сигналі шум стає більш помітним); руйнування заплутаності (на великих відстанях заплутаність не зберігається); порогові ефекти (існує межа, після якої передача квантової інформації стає неможливою). Наслідки цього такі: обмеження дальності квантових каналів, зниження швидкості передачі, необхідність використання повторювачів. Без додаткових технологій квантовий зв’язок має обмежену дальність. Таким чином, дальність і ефективність квантових каналів обмежуються накопиченням втрат і шуму, що призводить до деградації сигналу і встановлює практичні межі квантової передачі інформації.

Для кращого розуміння наведеного матеріалу розглянемо декілька прикладів.

1. Волоконний канал: фотони втрачаються, сигнал слабшає, QKD працює лише на обмеженій відстані.

2. Супутниковий зв'язок: втрати менші, але є атмосферні ефекти. Можливий глобальний зв'язок.

3. Протоколи із заплутаністю: якщо один фотон втрачений, заплутаність зникає.

Втрати є одним із головних факторів, що визначають роботу квантових протоколів. Вони суттєво впливають на ефективність і безпеку квантових протоколів, обмежуючи дальність передачі, швидкість генерації інформації та можливість збереження квантових кореляцій. На відміну від класичних систем, де втрати можна компенсувати підсиленням сигналу, у квантових системах це зробити напряму неможливо, оскільки квантові стани не можна довільно копіювати або підсилювати без спотворень. Тому виникає ключове питання: як зменшити вплив втрат без порушення квантових принципів? Методи компенсації втрат у квантових каналах можна умовно поділити на кілька груп: інженерні методи (покращення фізичного каналу); інформаційні методи (кодування і обробка); квантові методи (використання специфічних квантових ефектів).

Розглянемо ці методи.

1. Інженерні методи зменшення втрат. Інженерні методи зменшення втрат – це сукупність технічних рішень, спрямованих на покращення фізичних характеристик квантового каналу з метою мінімізації поглинання, розсіяння та інших механізмів втрат сигналу. Це відповідь на питання: як зробити сам канал кращим, щоб втрати виникали рідше. Основна ідея полягає не в зміні математики чи протоколу, а в покращенні фізичного середовища передачі. Для цього використовують такі підходи:

а. Оптимізація матеріалів, тобто використання високоякісного оптичного волокна, зменшення домішок і дефектів. Це забезпечує зменшення поглинання і розсіювання.

б. Вибір довжини хвилі, зокрема робота у телекомунікаційних вікнах прозорості (~1550 нм), що мінімізує втрати у волокні.

в. Покращення оптичних компонентів. Включає високоякісні з'єднання, низьковтратні лінзи і дзеркала.

г. Точне наведення пучка (для вільного простору). Для цього застосовують телескопи і методи стабілізації напрямку поширення сигналу.

д. Адаптивна оптика. За її допомогою здійснюється компенсація атмосферних спотворень і відновлення хвильового фронту.

Інженерні методи зменшення втрат базуються на вдосконаленні фізичних характеристик каналу передачі для мінімізації поглинання, розсіювання та інших механізмів деградації сигналу. Однак навіть ідеально налаштований канал не усуває втрати повністю. Тому використовуються інформаційні методи.

2. Інформаційні методи компенсації втрат: кодування і обробка. Інформаційні методи компенсації втрат у квантових каналах – це способи підвищення надійності передачі інформації за рахунок спеціального кодування, обробки та відновлення квантових станів без зміни фізичних властивостей каналу. Основна ідея кодування і корекції помилок полягає в тому, щоб передавати інформацію не в одному квантовому стані, а розподіляти її між кількома станами таким чином, щоб її можна було відновити навіть у разі часткових втрат або помилок. Для цього використовують декілька методів:

а. Квантові коди виправлення помилок – спеціальні схеми, які дозволяють виявляти помилки і виправляти їх без прямого вимірювання стану. Механізм такий: початковий стан кодується у більшу систему, канал вносить помилки, спеціальні операції визначають тип помилки, стан відновлюється. Наприклад один кубіт кодується у три: $|0\rangle \rightarrow |000\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |111\rangle$. Якщо один кубіт зміниться або втратиться, то можна визначити помилку і відновити стан.

б. Корекція втрат. У випадку втрат деякі кубіти просто зникають. Коди дозволяють відновити інформацію з тих, що залишились.

в. Надлишковість. Ці методи базуються на додаванні надлишкової інформації. Ідея така: чим більше кубітів, тим більше ресурсів, але більша надійність

Методи кодування і корекції помилок дозволяють підвищити стійкість квантової інформації до втрат і шуму шляхом використання надлишкових квантових представлень і спеціальних алгоритмів відновлення. Вони є основними інформаційними методами компенсації втрат, які забезпечують відновлення квантової інформації шляхом її розподілу між кількома фізичними носіями. Окрім корекції помилок, існують методи компенсації втрат, що працюють безпосередньо з квантовими властивостями каналів. Вони пов'язані із застосуванням квантових повторювачів.

3. Квантові повторювачі (Quantum Repeaters). Квантові повторювачі – це пристрої або протоколи, призначені для подолання втрат і шуму в квантових каналах шляхом розбиття довгої лінії зв'язку на коротші ділянки та відновлення квантової інформації між ними. Вони забезпечують відповідь на питання: як передати квантову інформацію на великі відстані, якщо сигнал постійно втрачається. Для цього один довгий канал розбивається на короткі ділянки. На кожній ділянці створюється заплутаність, виконується «зшивання» (entanglement swapping) і формується заплутаність на великій відстані. Тобто замість одного слабкого сигналу створюється багато коротких передач з проміжними вузлами. Таким чином сигнал передається з меншими втратами і значно збільшується дальність передачі. До недоліків слід віднести складну реалізацію. Квантові повторювачі дозволяють подолати обмеження дальності квантового зв'язку шляхом поетапного відновлення і розширення заплутаності між вузлами мережі. Вони використовуються в квантовому інтернеті, далекодійній квантовій криптографії, розподілі заплутаності. Ще один підхід до компенсації втрат полягає в тому, щоб не відновлювати стан, а передавати його іншим способом.

4. Квантова телепортація. Квантова телепортація – це процес передавання квантового стану від однієї системи до іншої на відстані за допомогою заплутаності та класичного каналу зв'язку без фізичного перенесення носія цього стану. Це відповідь на питання: як передати квантовий стан, не передаючи саму частинку. Процес включає три елементи: створюється заплутаність між двома частинками; відправник передає класичну інформацію; отримувач відновлює стан на приймачі. Особливості квантової телепортації: передається квантовий стан, а не об'єкт; потрібна заплутаність (без неї телепортація неможлива); потрібен класичний канал, через який передається додаткова інформація, (передача обмежена класичним каналом); стан руйнується у відправника (копії не залишається).

Квантова телепортація використовується у квантових мережах, квантових повторювачах, квантовому інтернеті, для передача станів на великі відстані. Квантова телепортація є фундаментальним протоколом передачі квантової інформації, що базується на заплутаності та класичній комунікації і не порушує обмежень теорії відносності. Окрім цього, існують методи, що оптимізують сам процес передачі.

5. Оптимізація протоколів передачі. Оптимізація протоколів передачі – це сукупність методів і підходів, спрямованих на підвищення ефективності та надійності квантової передачі інформації шляхом вибору найбільш стійких станів, параметрів і стратегій передачі з урахуванням характеристик каналу. Це відповідь на питання: як передавати інформацію «розумніше», щоб вона краще доходила через реальний (неідеальний) канал. Канал при цьому не змінюється, а передача підлаштовується під його властивості. Обираються такі параметри, які краще «виживають» у конкретному каналі і менше піддаються шуму і втратам. Основні напрямки оптимізації такі: вибір типу кодування (поляризаційне, фазове, часове); адаптивні протоколи (параметри змінюються в реальному часі); оптимізація параметрів передачі (довжина хвилі, потужність сигналу, частота імпульсів); фільтрація і відбір сигналів (відкидаються слабкі і спотворені сигнали); використання стійких квантових станів (обираються стани, які менш

чутливі до шуму). Важливо зазначити, що ці методи не зменшують фізичні втрати, але мінімізують їх вплив на результат. Оптимізація протоколів передачі дозволяє підвищити ефективність квантових каналів шляхом адаптації параметрів і стратегій передачі до умов середовища.

Для кращого розуміння викладеного матеріалу розглянемо окремі приклади.

1. Волоконна передача: використання 1550 нм, що забезпечує мінімальні втрати.

2. Супутниковий зв'язок: використання адаптивної оптики зменшує атмосферні спотворення.

3. Квантові повторювачі: збільшення дальності з десятків до сотень кілометрів.

Компенсація втрат є важливою задачею квантових технологій. Методи компенсації втрат базуються на покращенні фізичних характеристик каналу, використанні квантових кодів та спеціалізованих протоколів, що дозволяє частково відновлювати інформацію та збільшувати дальність квантової передачі. Жоден метод не є універсальним, але їх комбінація дозволяє значно покращити ефективність квантових каналів.

Розглянуті методи компенсації втрат дозволяють у теоретичному описі частково або повністю нейтралізувати негативний вплив шуму та загасання сигналу. Проте їхня ефективність визначається не лише математичними моделями, а й можливістю фізичної реалізації у конкретних технологічних умовах. Саме на цьому етапі виникає необхідність перейти від абстрактних схем до практичних систем, у яких враховуються обмеження джерел фотонів, ефективність детекторів, стабільність інтерференційних установок та втрати в реальних оптичних середовищах. Таким чином, природним продовженням аналізу методів компенсації втрат є розгляд експериментальних реалізацій квантових каналів, де теоретичні підходи перевіряються на практиці та набувають інженерного втілення. Експериментальні реалізації квантових каналів – це конкретні фізичні системи, у яких здійснюється передача квантових станів.

Саме вони визначають реальні обмеження дальності, рівень шуму, ефективність квантових протоколів. На сьогодні існує кілька основних платформ реалізації квантових каналів: волоконно-оптичні канали; канали у вільному просторі; супутникові канали; лабораторні (інтегровані) системи. Кожна з них має свої переваги, обмеження та області застосування. Розглянемо їх більш детально.

1. Волоконно-оптичні квантові канали. Волоконно-оптичні квантові канали – це фізичні системи передачі квантової інформації, у яких квантові стани світла (фотони) поширюються через оптичне волокно. Це відповідь на питання: як передати квантову інформацію через кабель. В таких каналах передача квантових станів світла через оптичне волокно. Процес відбувається таким чином: квантова інформація кодується у фотонах, фотони рухаються всередині оптичного волокна, на виході реєструються детектором. У волокні передаються одиничні фотони або слабкі лазерні імпульси. Інформація кодується у поляризації, фазі, часі (time-bin). У волокні відбуваються процеси поглинання, розсіювання, зміна фази. Це призводить до втрат фотонів, декогеренції. Це найзручніший канал, але не для дуже великих відстаней. Переваги: низькі втрати в діапазоні ~1550 нм, висока стабільність, сумісність із існуючою інфраструктурою. Недоліки: втрати зростають із відстанню, дисперсія сигналу, фазовий і поляризаційний дрейф. Волоконно-оптичні квантові канали є основною платформою для реалізації квантового зв’язку на середніх відстанях завдяки своїй стабільності та сумісності з сучасними телекомунікаційними технологіями.

2. Квантові канали у вільному просторі. Якщо потрібно передавати інформацію без волокна, використовують канали у відкритому середовищі. Квантові канали у вільному просторі – це системи передачі квантової інформації, у яких квантові стани світла (фотони) поширюються через відкритий простір (атмосферу або вакуум) без використання фізичних напрямних, таких як оптичне волокно. Це відповідь на питання: як передати квантову інформацію без кабелю, просто через повітря. Процес відбувається так: фотони випромінюються у простір, поширюються на відстань, приймаються детектором. Інформація

кодується у поляризації, фазі, часових імпульсах. У вільному просторі виникають флуктуації показника заломлення, спотворення хвильового фронту, розсіювання. Це призводить до шуму, втрат, декогеренції.

Квантові канали у вільному просторі використовується між будівлями, між наземними станціями, у супутниковому зв'язку. Переваги: відсутність втрат у матеріалі, можливість передачі на великі відстані, гнучкість розгортання. Недоліки: атмосферна турбулентність, розширення пучка, нестабільність сигналу. Для ще більших відстаней використовуються супутникові канали.

3. Супутникові квантові канали. Супутникові квантові канали – це системи передачі квантової інформації, у яких квантові стани світла передаються між наземними станціями та супутниками або між супутниками через атмосферу і космічний простір. Вони дозволяють створити глобальні квантові мережі і значно зменшують втрати порівняно з волокном. Процес відбувається так: фотони випромінюються із Землі або супутника, проходять через атмосферу, далі поширюються у вакуумі і приймаються на іншому боці. Основна особливість в тому, що більша частина шляху проходить у космосі (майже без втрат). Втрати виникають переважно в атмосфері. Переваги: низькі втрати на великих відстанях (у вакуумі немає поглинання і майже немає розсіювання). глобальне покриття (можна з'єднати континенти, віддалені регіони). Недоліки: атмосферні ефекти (турбулентність, поглинання, розсіювання); точність наведення (потрібно дуже точно спрямувати промінь, утримувати зв'язок); технічна складність (синхронізація, стабілізація, компенсація турбулентності, складні системи прийому).

Супутникові квантові канали використовується в глобальних квантових мережах, міжконтинентальному зв'язку, квантовій криптографії. Вони забезпечують передачу квантової інформації на великі відстані з меншими втратами, ніж у волоконних системах, і є основою для створення глобальних квантових мереж.

4. Лабораторні та інтегровані квантові канали. Окрім великих каналів, важливими є також компактні лабораторні системи. Лабораторні та інтегровані

квантові канали – це системи передачі квантової інформації, реалізовані на малих відстанях у контрольованих умовах або на інтегрованих фотонних платформах, де передача відбувається через оптичні елементи, хвилеводи або мікрочипи. Це відповідь на питання: як передавати квантову інформацію в лабораторії або на мікрорівні. Особливості даних каналів такі: квантові стани створюються і передаються у контрольованому середовищі , канал є коротким, але дуже точним, усі параметри можна регулювати. Такі канали реалізуються як лабораторні оптичні системи: оптичні столи, дзеркала, лінзи, інтерферометри. Використовуються для досліджень, тестування протоколів і як інтегровані фотонні канали: хвилеводи на чипі, фотонні інтегральні схеми. Квантові операції виконуються прямо на мікрочипі. У таких каналах мінімізується вплив зовнішнього середовища, контролюється фаза, поляризація і траєкторія фотонів. Це дозволяє досліджувати фундаментальні ефекти, тестувати нові технології. Переваги: високий контроль (стабільні умови, точне налаштування параметрів), малі втрати (короткі відстані, мінімальний вплив середовища), відтворюваність (однакові експерименти можна повторювати). Недоліки: обмежена дальність (не підходять для передачі на великі відстані), складність масштабування (складно перейти до великих мереж), технологічна складність (виготовлення чипів, інтеграція компонентів).

Лабораторні та інтегровані квантові канали використовуються в квантових обчисленнях, лабораторних експериментах, при розробці квантових протоколів, в інтегрованих квантових пристроях. Вони забезпечують високоточну передачу квантових станів у контрольованих умовах і є основою для досліджень та розвитку квантових технологій.

Таким чином, різні експериментальні платформи реалізують ті самі квантові канали, але в різних фізичних умовах і з різними обмеженнями. При цьому важливого значення набувають технологічні аспекти реалізації квантових каналів. тобто це сукупність фізичних пристроїв, технічних рішень і інженерних параметрів, які забезпечують генерацію, передачу, стабілізацію та детекцію квантових станів у практичних системах зв’язку. Це відповідь на питання: що

потрібно на практиці, щоб квантовий канал реально працював. Квантовий канал – це не лише середовище передачі, а ціла система, яка включає джерела квантових станів, елементи передачі, системи стабілізації, детектори. Якщо хоча б один елемент працює погано, весь канал стає неефективним.

Основні компоненти технологічних аспектів реалізації:

1. Джерела фотонів: призначені для створення фотонів. Розрізняють однофотонні джерела і лазерні імпульси. Забезпечують стабільність, контроль числа фотонів.

2. Системи передачі: забезпечують поширення сигналу. Це можуть бути оптичні волокна, атмосферні канали, супутникові системи.

3. Детектори **(**фотодетектори, надпровідні детектори): реєструють фотони. Основні характеристики: ефективність, рівень шуму, швидкість.

4. Стабілізація системи: підтримує правильні параметри сигналу. Стабілізується фаза, поляризація, час приходу сигналу.

5. Методи кодування: визначають, як записана інформація. Розрізняють такі типи кодування: поляризаційне, фазове, часове.

Основні проблеми практичної реалізації: недосконаліть компонентів (втрати у джерелах, шум у детекторах); нестабільність (зміни температури, вібрації, атмосферні ефекти); складність синхронізації, особливо на великих відстанях. Технологічні аспекти реалізації охоплюють фізичні компоненти і інженерні рішення, що забезпечують створення, передачу і детекцію квантової інформації у практичних квантових системах. Експериментальні квантові канали реалізуються у різних фізичних платформах, кожна з яких визначає компроміс між дальністю передачі, стабільністю та рівнем втрат. Волоконні канали – стабільні, але обмежені по дальності; канали у вільному просторі – гнучкі, але нестабільні; супутникові канали – перспективні для глобальних мереж; лабораторні системи – точні, але локальні. Разом вони формують основу сучасних квантових комунікацій.

РОЗДІЛ 9. МЕТОДИ ТА АПАРАТНІ ЗАСОБИ РЕЄСТРАЦІЇ ОДИНИЧНИХ ФОТОНІВ

9.1. Квантова теорія фотодетектування та статистика відліків

Квантова теорія фотодетектування та статистика відліків займають центральне місце в сучасній квантовій оптиці, оскільки саме через процес детектування відбувається перехід від квантового опису світла до експериментально спостережуваних результатів. У квантовій передачі інформації світло відіграє роль носія даних, а фотони – це елементарні «кванти», які ці дані переносять. Однак сама передача ще не означає отримання інформації: основним етапом є **детектування фотонів**. Детектування фотонів – це фізичний процес, у якому фотон (квант електромагнітного випромінювання) поглинається матеріалом детектора і перетворюється на вимірюваний електричний сигнал. У більш загальному вигляді детектування фотонів включає три основні етапи: поглинання фотона – фотон передає свою енергію електрону в матеріалі; генерація носіїв заряду або збурення системи (у напівпровідниках утворюється електрон-діркова пара, у надпровідниках руйнується надпровідний стан, у когерентних схемах змінюються параметри поля); формування сигналу – виникає електричний імпульс або зміна струму/напруги, який можна виміряти. Формула детектування:

$$\text{фотон} \rightarrow \text{взаємодія з матеріалом} \rightarrow \text{електричний сигнал}.$$

Цей процес має квантову природу, результат є ймовірнісним, може відбуватися на рівні одиничних фотонів і є основою роботи фотодетекторів. Отже, детектування фотонів – це фундаментальний процес, що забезпечує зв’язок між квантовими явищами світла і класичними вимірюваннями, і є основою всіх оптичних та квантових інформаційних технологій. На відміну від класичного підходу, де світло розглядається як неперервна електромагнітна хвиля, у квантовій теорії воно описується як сукупність дискретних квантів – фотонів. Це означає, що будь-яке вимірювання світлового поля має ймовірнісний характер, а результати детектування проявляються у вигляді випадкових подій,

так званих «кліків» фотодетектора. У квантовій оптиці часто доводиться працювати з надзвичайно слабкими сигналами, аж до одного фотона. У такому випадку детектор має «помітити» одиничну квантову подію, яка є випадковою і підпорядковується законам квантової механіки. Це ставить перед фізикою детектування одразу кілька складних завдань: як ефективно зареєструвати один фотон; як відрізнити його від шуму; як зробити це швидко та точно. Таким чином, фізика детектування фотонів є мостом між квантовим світом і класичними вимірюваннями. З фізичної точки зору, детектування фотона – це процес, у якому фотон поглинається матеріалом; його енергія передається електронам; виникає вимірюваний електричний сигнал. Інакше кажучи, детектор виконує перетворення:

фотон → електричний імпульс.

Цей процес є квантовим, тобто фотон або детектується, або ні, і результат має ймовірнісний характер. Отже, детектування фотонів є процесом перетворення квантового сигналу на класичний електричний імпульс. Однак таке формулювання лише описує явище на якісному рівні. Щоб глибше зрозуміти, як саме відбувається детектування одиничних фотонів, необхідно звернутися до квантової теорії фотодетектування. У квантовій оптиці електромагнітне поле розглядається як система квантових гармонічних осциляторів. Кожна мода поля може містити дискретну кількість енергії. Квантовий стан поля описується матрицею густини ρ, яка містить повну інформацію про статистичні властивості системи. Важливо підкреслити, що саме через операторний характер цих величин квантова теорія дозволяє враховувати як когерентні, так і некласичні стани світла.

Перехід від абстрактного опису поля до фізично вимірюваних величин здійснюється через оператор електричного поля, який розкладається на позитивно- та негативно-частотні компоненти поля, що позначаються як $\hat{E}^{(+)}(t)$ та $\hat{E}^{(-)}(t)$. Позитивно-частотна частина пов’язана з оператором знищення фотонів, а негативно-частотна – з оператором народження, причому $\hat{E}^{(-)}(t) =$

$\left(\hat{E}^{(+)}(t)\right)^{\dagger}$. Саме добуток цих операторів визначає інтенсивність світлового поля, яка в квантовому описі записується як оператор $\hat{I}(t) \propto \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t)$. Інтенсивність визначає ймовірність реєстрації фотона і кількість відліків детектора. Фізично це означає, що інтенсивність є не просто класичною величиною, а оператором, середнє значення якого визначає швидкість реєстрації фотонів детектором.

Цей підхід формалізується в теорії фотодетектування, запропонованій Глаубером, згідно з якою ймовірність $P(t)$ реєстрації фотона в момент часу t пропорційна середньому значенню оператора інтенсивності, тобто величині $\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t) \rangle$, де кутові дужки означають квантове середнє $\langle A \rangle = Tr(\rho A)$. В даному виразі А – це квантовий оператор спостережуваної величини, наприклад, оператор числа фотонів $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ або оператор інтенсивності світла; ρA – редукована (часткова) матриця густини підсистеми А. Це співвідношення має глибокий фізичний зміст: детектор «відчуває» не саме поле, а його кореляційні властивості, і саме вони визначають частоту виникнення відліків. Таким чином, фотодетектування виступає як квантове вимірювання, що зводить операторні величини до класичних статистичних результатів.

Однак для повного опису статистики відліків недостатньо знати лише середню інтенсивність. Необхідно враховувати також кореляції між подіями детектування, що приводить до введення кореляційних функцій вищих порядків. Найважливішою з них є функція другого порядку $g^{(2)}(\tau)$ яка визначається як нормоване середнє значення добутку чотирьох операторів поля в різні моменти часу:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\left\langle \hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t) \right\rangle}{\left\langle \hat{I}(t) \right\rangle^{2}}, \qquad (9.1)$$

де τ - це затримка в часі (часовий інтервал) між двома подіями детектування фотонів. Функція $g^{(2)}(\tau)$ визначає, наскільки ймовірно зареєструвати другий фотон через час τ після першого. Ця функція дозволяє дослідити, чи мають фотони тенденцію приходити разом (згущення) або, навпаки, уникати один

одного (антизгущення). Зокрема, значення $g^{(2)}(\tau) = 1$ для всіх τ відповідає когерентному світлу, характерному для лазера; $g^{(2)}(0) > 1$ – тепловому світлу зі згущенням фотонів, $g^{(2)}(0) = 0$ – одиночному фотону, а $g^{(2)}(0) < 1$ є ознакою некласичного світла, зокрема однофотонних станів, де реалізується антизгущення.

Ці кореляційні властивості безпосередньо пов'язані зі статистикою фотонних відліків, яка описується розподілом ймовірностей $P(n)$ отримання n фотонів за певний інтервал часу. Для різних квантових станів світла ця статистика має принципово різний вигляд. Наприклад, когерентний стан характеризується пуассонівським розподілом

$$P(n) = \frac{\bar{n}}{n!} e^{-\bar{n}}, \tag{9.2}$$

де $\bar{n}$ – середнє число фотонів. Такий розподіл означає, що фотони приходять незалежно один від одного, подібно до випадкових подій у класичній теорії. На противагу цьому, теплове світло описується бозе-ейнштейнівським розподілом, який демонструє підвищену ймовірність групового приходу фотонів:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}. \tag{9.3}$$

Особливим випадком є фоківські стани, для яких число фотонів точно визначене, і ймовірність $P(n)$ дорівнює одиниці лише для одного значення n, а для всіх інших дорівнює нулю, тобто

$$P(n) = \delta_{n,N}, \tag{9.4}$$

де $\delta_{n,N}$ – символ Кронекера; N – фіксоване число фотонів.

Важливо розуміти, що детектування фотона змінює стан системи і руйнує квантову суперпозицію. Це прояв загального принципу квантової механіки, який полягає в тому, що вимірювання впливає на систему. Наприклад до детекції поле може бути в суперпозиції станів. Після детекції стан «колапсує».

Для кращого розуміння наведеної інформації розглянемо кілька прикладів.

1. Лазерне світло. Лазер випромінює світло з Пуассонівською статистикою:. Це означає, що фотони приходять випадково, ле середнє значення стабільне. У детекторі це проявляється як флуктуації кількості імпульсів, але стабільна середня інтенсивність.

2. Одиничний фотон. Джерело генерує рівно один фотон. Детектор або спрацьовує, або ні. Неможливі випадки «два фотони одразу». Це приклад субпуассонівської статистики – чисто квантового явища.

3. Теплове світло. Світло від лампи має великі флуктуації, іноді багато фотонів, іноді мало. Це призводить до сильного шуму в детекторі і менш передбачуваного сигналу.

Розглянуті принципи фотодетектування знаходять широке застосування на практиці. Наприклад, у випадку лазерного випромінювання спостерігається пуассонівська статистика, яка підтверджує когерентний характер світла. У експериментах з одиночними фотонами, навпаки, вимірюється антизгущення, що є прямим доказом квантової природи світла. Такі вимірювання здійснюються, зокрема, за допомогою інтерферометричних схем, які дозволяють експериментально визначати кореляційні функції.

Таким чином, квантова теорія фотодетектування забезпечує цілісне розуміння процесу реєстрації світла, поєднуючи операторний опис квантового поля з імовірнісною природою вимірювань. Це дозволяє не лише описувати процес реєстрації фотонів, але й аналізувати їх статистичні властивості. Статистика відліків фотодетектора не є випадковою у звичайному сенсі, а відображає глибинні властивості квантового стану світла. Основний результат полягає в тому, що різні квантові стани світла мають принципово різну статистику відліків, що дозволяє експериментально відрізняти класичні та некласичні джерела.

9.2. Принципи роботи напівпровідникових лавинних фотодетекторів

Для практичної реалізації принципів фотодетектування необхідні фізичні пристрої, здатні перетворювати окремі фотони на вимірюваний сигнал.

Найбільш поширеним класом таких пристроїв є напівпровідникові фотодетектори. Їх популярність пояснюється кількома причинами: висока чутливість до світла; можливість інтеграції в електронні схеми; відносна простота виготовлення; широкий спектральний діапазон. Саме напівпровідникові детектори лежать в основі більшості сучасних систем квантової передачі інформації, зокрема в оптоволоконних мережах. Щоб зрозуміти принцип роботи напівпровідникових фотодетекторів, необхідно послідовно розглянути як фотон взаємодіє з напівпровідником, як утворюються носії заряду, як електричне поле забезпечує формування сигналу, які існують типи структур і матеріалів. Це дозволить побачити, як квантовий процес поглинання фотона переходить у класичний електричний сигнал.

Напівпровідники – це матеріали, електричні властивості яких визначаються їхньою енергетичною зонною структурою. У них існують валентна зона (заповнена електронами), зона провідності (вільні електрони), заборонена зона (енергетичний проміжок між ними) (рис. 9.1).

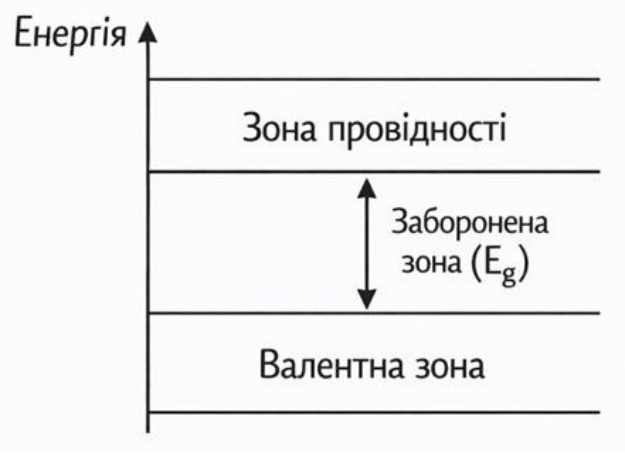


Рис. 9.1. Енергетична зонна структура напівпровідника

Основний параметр – ширина забороненої зони E_g. Фотон може бути поглинутий лише тоді, коли його енергія задовольняє умову:

$$h\nu \geq E_g. \tag{9.5}$$

Це означає, що матеріал «чутливий» лише до певного спектрального діапазону, а вибір матеріалу визначає робочу довжину хвилі детектора. Коли фотон потрапляє в напівпровідник відбуваються такі процеси: фотон передає свою енергію електрону, що знаходиться у валентній зоні; електрон переходить у зону провідності; у валентній зоні залишається «дірка». Таким чином утворюється електрон-діркова пара. Цей процес є основою фотодетектування: один фотон генерує одну пару носіїв (в ідеальному випадку).

Сам факт утворення носіїв ще не означає появу сигналу. Необхідно розділити електрон і дірку і змусити їх рухатися в різні сторони. Це забезпечується внутрішнім електричним полем у структурі p-n переходу (рис. 9.2).

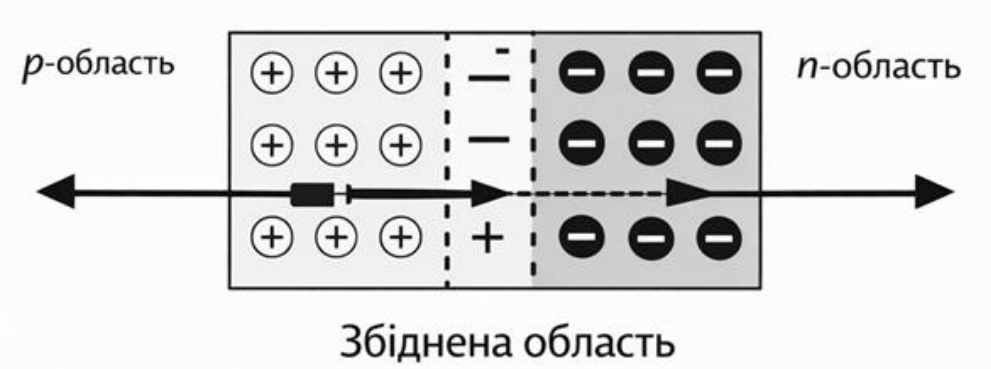


Рис. 9.2. Формування p-n переходу та збідненої області

У полі електрони рухаються в один бік, дірки – в інший. Цей рух створює електричний струм, який і реєструється.

Існують такі типи напівпровідникових фотодетекторів:

1. p-n фотодіоди. p-n фотодіоди – це напівпровідникові фотодетектори, принцип роботи яких базується на властивостях p-n переходу, у якому світло перетворюється на електричний струм. Це найпростіший тип детектора. Робота p-n фотодіода включає такі етапи (рис. 9.3): поглинання фотона (фотон потрапляє в напівпровідник і передає свою енергію електрону); генерація носіїв заряду (утворюється електрон-діркова пара); розділення носіїв (електричне поле в p-n переході «тягне» електрони в n-область, а дірки – в p-область); формування

струму (рух носіїв створює електричний струм (фотострум), який реєструється як сигнал).

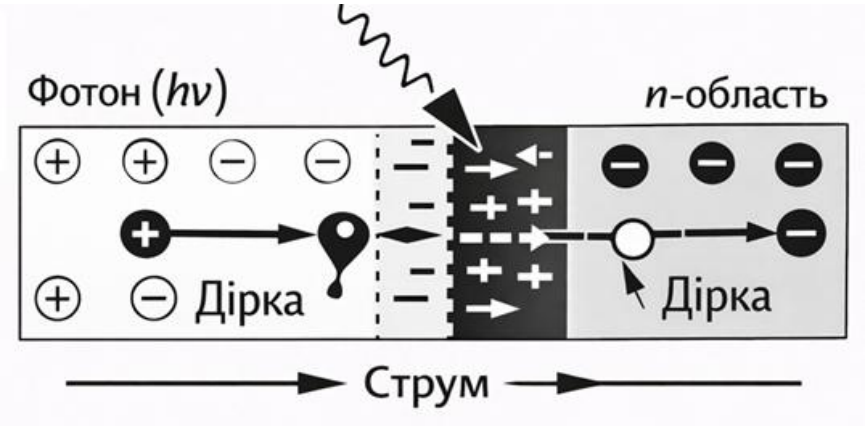


Рис. 9.3 Принцип роботи p-n фотодіода

Рисунок ілюструє принцип роботи p–n фотодіода, заснований на генерації носіїв заряду під дією світла та їх розділенні внутрішнім електричним полем p–n переходу. При падінні фотона з енергією $h\nu$ на область переходу відбувається його поглинання в напівпровіднику. У результаті цього процесу утворюється електрон-діркова пара. У p–n переході існує внутрішнє електричне поле, яке виникає в збідненій області на межі p- та n-областей. Це поле виконує ключову роль у роботі фотодіода: воно розділяє згенеровані носії заряду. Під дією електричного поля електрони рухаються в напрямку n-області; дірки – в напрямку p-області. Цей спрямований рух носіїв створює фотострум, який протікає у зовнішньому колі і може бути зареєстрований.

На рисунку показано, що генерація носіїв може відбуватися як безпосередньо в області переходу, так і поблизу нього. Носії, які потрапляють у збіднену область, ефективно захоплюються електричним полем і роблять внесок у струм. Таким чином, p–n фотодіод перетворює енергію світла на електричний сигнал за рахунок генерації та розділення носіїв заряду. Особливості p-n фотодіодів: простота конструкції, відносно низьке підсилення, сигнал пропорційний інтенсивності світла, відносно низький рівень шуму, використовується для сильних сигналів.

Режими роботи:

1. Фотогальванічний режим: без зовнішньої напруги, генерується власна напруга, використовується в сонячних елементах.

2. Фотопровідний режим: із зворотним зміщенням, підвищується швидкодія, покращується чутливість.

Переваги: стабільність роботи, низький шум, простота використання, довговічність. Недоліки: відсутність внутрішнього підсилення, низька чутливість до дуже слабких сигналів, не придатні для детектування одиничних фотонів. p-n фотодіоди знаходять застосування як оптичні датчики, вимірювальні прилади, сонячні батареї. Вони є базовими напівпровідниковими детекторами світла, які перетворюють фотони в електричний струм завдяки внутрішньому електричному полю переходу. Вони прості, надійні та широко застосовуються, але через відсутність підсилення не підходять для детектування дуже слабких або одиничних фотонних сигналів.

2. p-i-n фотодіоди. p-i-n фотодіоди – це напівпровідникові фотодетектори, у структурі яких між p- та n-областями введено додатковий власний шар, що значно покращує ефективність поглинання світла та швидкодію. p-i-n фотодіод складається з трьох шарів (рис.9.4): p-область з надлишком дірок; i-область – практично нелегований (чистий) напівпровідник; n-область з надлишком електронів.

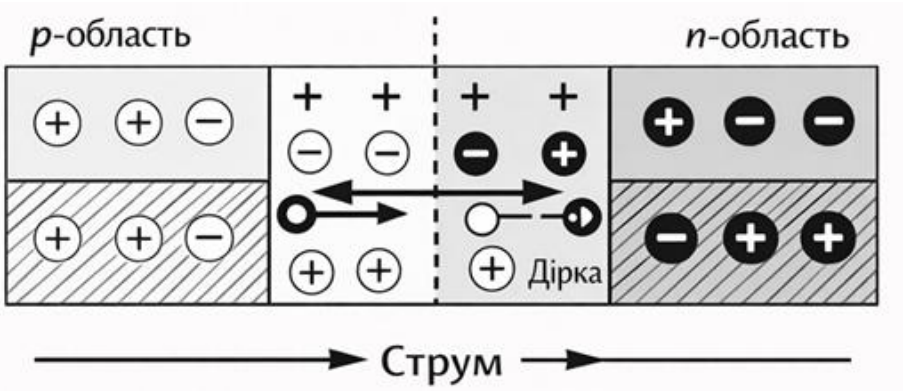


Рис. 9.4. Структура p-i-n фотодіода: стрілки показують рух носіїв

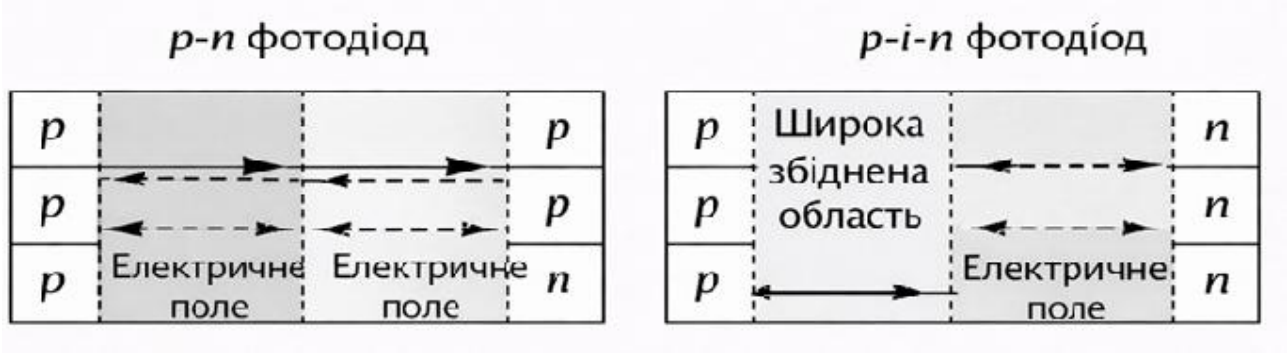
Рисунок 9.4 ілюструє будову p–i–n фотодіода, який складається з трьох основних областей: p-області, внутрішньої (i) області та n-області. Ліва частина

рисунка відповідає p-області, в якій основними носіями заряду є дірки. Права частина – n-область, де основними носіями є електрони. Між ними розташована широка внутрішня (i) область, яка практично не містить вільних носіїв заряду. Унаслідок прикладення зворотної напруги внутрішня область повністю збіднюється і в ній формується сильне електричне поле, яке є майже однорідним по всій її ширині. При поглинанні фотона в і-області утворюється електрон-діркова пара. Під дією електричного поля електрони рухаються в напрямку n-області; дірки – в напрямку p-області. Завдяки широкій і-області збільшується об'єм, у якому відбувається поглинання світла, що підвищує квантову ефективність детектора. Крім того, сильне поле забезпечує швидке розділення носіїв, що покращує швидкодію пристрою. Таким чином, p–i–n фотодіод забезпечує ефективне перетворення світлового сигналу в електричний завдяки поєднанню широкої області поглинання та сильного електричного поля.

Ця структура є розширеною версією p-n переходу. Принцип роботи фотодіода такий: поглинання фотона (фотон поглинається переважно в і-області); генерація носіїв (утворюється електрон-діркова пара); розділення носіїв (електричне поле, яке охоплює всю і-область швидко розділяє носії і зменшує рекомбінацію); формування сигналу (рух носіїв створює фотострум). Введення додаткового власного (intrinsic) шару дає кілька ключових переваг, зокрема: збільшується область поглинання світла, зменшується ймовірність рекомбінації, електричне поле діє на більшій відстані, покращується швидкодія.

Основні особливості p-i-n фотодіодів: вища квантова ефективність, ніж у p-n фотодіодів; швидша реакція на сигнал; краща чутливість; робота переважно в режимі зворотного зміщення. Наприклад, у волоконно-оптичних системах сигнал дуже швидкий, тому потрібна точна і швидка детекція. p-i-n фотодіоди ефективно працюють у таких умовах і забезпечують високу швидкість передачі даних. Переваги p-i-n фотодіодів: висока швидкодія (важливо для оптичного зв'язку), менші втрати носіїв, краща ефективність у широкому спектрі, стабільна робота. Недоліки: складніша структура, ніж у p-n діодів, відсутність внутрішнього підсилення, не підходять для детектування одиничних фотонів. p-

i-n фотодіоди використовуються в оптоволоконних телекомунікаціях, високошвидкісних оптичних системах, у фотонних вимірюваннях, а також як сенсори. Вони є вдосконаленою версією p-n фотодіодів, у яких додатковий intrinsic(внутрішній)-шар забезпечує більшу ефективність поглинання світла та кращу швидкодію (рис.9.5). p-i-n фотодіоди широко використовуються в



сучасних оптичних системах, особливо там, де важлива висока швидкість і точність детектування.

Рис. 9.5. Порівняння p-n та p-i-n фотодіодів

Рисунок демонструє відмінності у структурі та розподілі електричного поля в p–n та p–i–n фотодіодах. У лівій частині показано p–n фотодіод, у якому збіднена область формується лише поблизу p–n переходу і має відносно малу ширину. Відповідно, електричне поле локалізоване в вузькій області, що обмежує об’єм ефективного поглинання світла. Носії заряду, згенеровані поза цією областю, повинні дифундувати до переходу, що зменшує швидкодію пристрою. У правій частині зображено p–i–n фотодіод, який містить широку внутрішню (i) область між p- та n-областями. При прикладенні зворотної напруги ця область повністю збіднюється, і в ній формується широка область електричного поля. Завдяки цьому значно збільшується об’єм, у якому відбувається ефективне розділення носіїв заряду. Стрілками на рисунку показано напрямок електричного поля та рух носіїв заряду. У p–i–n фотодіоді поле є більш однорідним і поширюється на більшу відстань, що забезпечує підвищену квантову ефективність; швидше збирання носіїв; кращу швидкодію. Таким чином, рисунок ілюструє, що введення внутрішньої області в p–i–n фотодіоді

дозволяє значно покращити характеристики детектування порівняно з p–n структурою.

Ефективність фотодетектора визначається не лише його конструкцією, але й матеріалом, з якого він виготовлений. Саме матеріал задає ключові фізичні властивості, зокрема, спектральну чутливість, рівень шуму, швидкодію та квантову ефективність. Вибір матеріалу є критично важливим, оскільки фотон може бути зареєстрований лише тоді, коли його енергія відповідає енергетичним властивостям напівпровідника або надпровідника. Ключовий параметр матеріалу – ширина забороненої зони E_g. Умова поглинання фотона: $h\nu \geq E_g$. Це означає: якщо енергія фотона менша, він не буде поглинутий; якщо більша, то можливе утворення носіїв заряду.

Для виготовлення фотодетекторів використовують такі основні типи матеріалів:

Кремній (Si) – це найпоширеніший матеріал. Добре працює у видимому діапазоні (≈ 400–1000 нм). Переваги: низький шум, висока квантова ефективність, доступність і технологічність. Недоліки: нечутливий до інфрачервоного світла (довгі хвилі).

Індій-галій-арсенід (InGaAs). Використовується для інфрачервоного діапазону (≈ 900–1700 нм). Основний матеріал для телекомунікацій. Переваги: чутливість до довжин хвиль ~1550 нм, сумісність із оптоволоконними системами. Недоліки: вищий рівень шуму, складніше виготовлення.

Германій (Ge). Використовується для ближнього інфрачервоного діапазону. Іноді інтегрується з кремнієвими технологіями.

Надпровідникові матеріали. Використовуються в детекторах типу SNSPD. Це такі матеріали як NbN (ніобій-нітрид), WSi (вольфрам-силіцид). Переваги: дуже висока ефективність, наднизький шум, широкий спектральний діапазон. Недоліки: потреба кріогенного охолодження.

Нові матеріали (перспективні). До них належать графен, двовимірні матеріали, квантові точки. Потенціал: надшвидка реакція, інтеграція у фотонні чіпи, розширення спектрального діапазону.

Кожен матеріал має свій робочий діапазон: Si – видиме світло, InGaAs – інфрачервоний діапазон, SNSPD – широкий спектр. Робочий діапазон визначає, де саме застосовується детектор, які сигнали він може реєструвати.Матеріал, з якого виготовлений фотодетектор визначає квантову ефективність, тобто здатність поглинати фотони; шум через дефекти і теплові процеси; швидкодію через рух носіїв; темновий рахунок через внутрішні процеси. Вибір матеріалу завжди пов'язаний із компромісом: чутливість ↔ шум, ефективність ↔ складність, спектральний діапазон ↔ технологічність.

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо такі приклади.

1. Кремнієвий фотодіод. Кремній ефективно поглинає видиме світло. Якщо фотон із достатньою енергією, то створюється електрон-діркова пара, виникає струм, реєструється сигнал. Але інфрачервоне світло може не мати достатньої енергії і не буде детектоване.

2. *Детектування в оптоволоконних лініях.* У телекомунікаціях використовують довжини хвиль ~1550 нм. Для цього потрібні матеріали типу InGaAs. Вони мають меншу ширину забороненої зони і можуть поглинати інфрачервоні фотони.

3. Вплив рекомбінації. Якщо електрон і дірка рекомбінують до того, як досягнуть електродів, то сигнал не виникає. Це зменшує ефективність детектора.

Напівпровідникові фотодетектори є визначальним елементом сучасних оптичних і квантових технологій, оскільки вони забезпечують перетворення квантових сигналів у класичні електричні імпульси. Принцип дії таких фотодекторів включає поглинання фотона, утворення електрон-діркових пар і формування електричного сигналу. Однак центральним елементом, який забезпечує ефективність цього процесу, є внутрішня структура напівпровідника, а саме – p-n перехід. Саме p-n перехід створює електричне поле, яке розділяє носії заряду, запобігає їх рекомбінації, формує вимірюваний струм. Без розуміння фізики цього переходу неможливо пояснити ні роботу фотодіодів, ні більш складних детекторів, таких як лавинні фотодіоди. Щоб зрозуміти роль p-n переходу в фотодетекторах, необхідно послідовно розглянути: як формується p-

n перехід; що таке внутрішнє електричне поле; як відбувається рух носіїв (дрейф і дифузія); які процеси обмежують ефективність (рекомбінація, шум). Ці процеси визначають, наскільки ефективно детектор може перетворити один фотон у електричний сигнал.

p-n перехід є основою роботи більшості напівпровідникових фотодетекторів. Саме він створює внутрішнє електричне поле, яке забезпечує розділення носіїв заряду та формування електричного сигналу при поглинанні фотона. Формування p-n переходу є фундаментальним процесом у напівпровідниковій фізиці, який лежить в основі роботи фотодетекторів. Воно включає кілька важливих етапів, а саме: створення p- та n-областей шляхом легування; дифузію носіїв заряду; утворення збідненої області; виникнення вбудованого електричного поля.

Розглянемо ці процеси послідовно.

Чистий напівпровідник (наприклад, кремній) має обмежену кількість вільних носіїв. Щоб змінити його властивості, використовують легування – введення домішок. Розрізняють два типи легування:

1. n-тип (донорне легування). Додаються атоми з надлишком електронів, з’являються вільні електрони. Електрони – основні носії.

2. p-тип (акцепторне легування). Створюються «дірки» (відсутність електронів). Дірки поводяться як позитивні носії. Дірки – основні носії.

Коли p- і n-області з’єднуються (контактують), виникає різниця концентрацій носіїв і система прагне до рівноваги. Тому одразу після контакту електрони з n-області дифундують у p-область, а дірки з p-області – у n-область. В результаті носії зустрічаються і рекомбінують. Біля межі зменшується кількість вільних носіїв і утворюється збіднена область (рис. 9.6). У цій області залишаються нерухомі іони: позитивні в n-області і негативні в p-області. Вони створюють заряджений шар. Нерухомі заряди створюють внутрішнє електричне поле, спрямоване від n-області до p-області, яке перешкоджає подальшій дифузії.

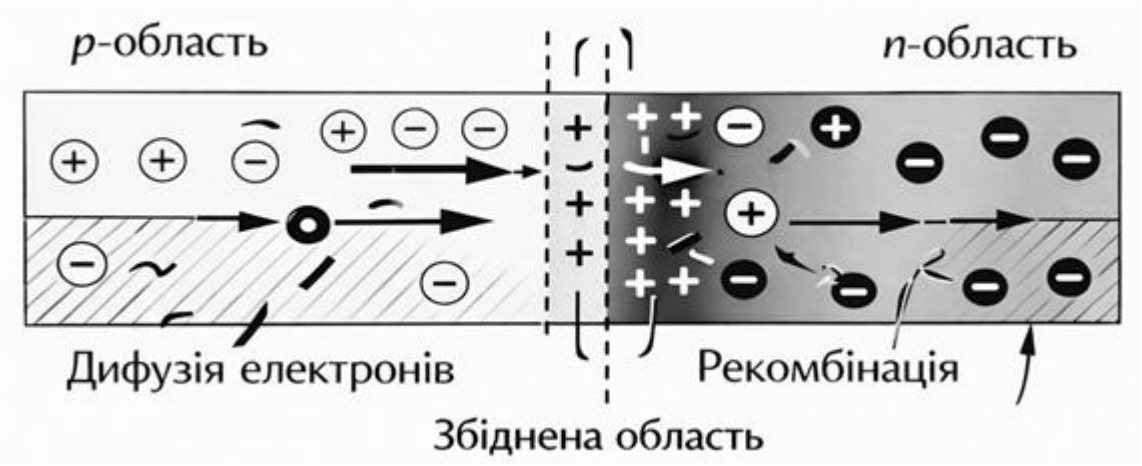


Рис. 9.6. Формування p-n переходу: дифузія носіїв і утворення збідненої області

На рисунку показано процес формування p–n переходу в напівпровіднику внаслідок дифузії носіїв заряду та їх рекомбінації і подальшого встановлення рівноваги в напівпровіднику. У початковому стані p-область містить велику кількість дірок, а n-область – електронів. Через різницю концентрацій носіїв виникає дифузійний рух через межу розділу: електрони дифундують з n-області в p-область; дірки – з p-області в n-область. У приповерхневій області переходу електрони та дірки зустрічаються і рекомбінують, що призводить до зменшення концентрації вільних носіїв у цій зоні. Внаслідок рекомбінації в області переходу залишаються нерухомі заряджені іони домішок: негативно заряджені акцептори в p-області та позитивно заряджені донори в n-області. Це приводить до формування збідненої області, позбавленої рухомих носіїв. Наявність нерухомих зарядів створює внутрішнє електричне поле, спрямоване від n-області до p-області, яке перешкоджає подальшій дифузії носіїв і встановлює рівноважний стан у системі. Це поле викликає дрейфовий рух носіїв, який має напрямки, протилежні дифузії: електрони дрейфують у напрямку n-області; дірки – у напрямку p-області. Таким чином, у p–n переході одночасно існують два процеси – дифузія і дрейф, які мають протилежні напрямки. У стані рівноваги ці процеси компенсують один одного, і сумарний струм через перехід дорівнює нулю.

Сформоване електричне поле, яке встановлює рівновагу між дифузією і дрейфом, є основним для роботи фотодетектора. Електричне поле створює потенціальний бар'єр. Він не дозволяє носіям вільно переходити через межу, але може бути подоланий при зовнішній напрузі або фотогенерації (рис. 9.7). На рисунку показано формування внутрішнього електричного поля та потенціального бар'єра в p–n переході, а також їх вплив на рух носіїв заряду. Унаслідок дифузії електронів і дірок через межу p- та n-областей і їх подальшої рекомбінації формується збіднена область, у якій відсутні рухомі носії заряду. У цій області залишаються нерухомі заряджені іони домішок, що створює внутрішнє електричне поле.

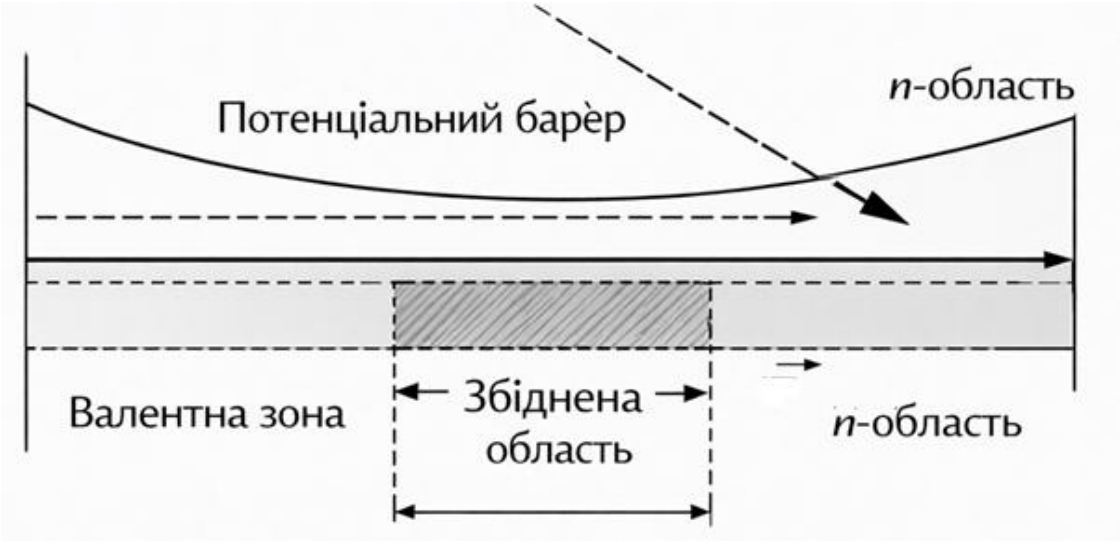


Рис. 9.7. Внутрішнє електричне поле та потенціальний бар'єр у p-n переході: крива «потенціальний бар'єр» – це енергетичний профіль; штрихована зона – збіднена область; стрілки – напрям дії поля

Це поле спрямоване від n-області до p-області і створює потенціальний бар'єр, який перешкоджає подальшій дифузії носіїв. На рисунку потенціальний бар'єр зображено у вигляді енергетичної діаграми, де показано зміну потенціальної енергії носіїв у межах переходу. Збіднена область позначена заштрихованою ділянкою, в якій електричне поле є максимальним. Саме ця область визначає електричні властивості p–n переходу та його поведінку під дією зовнішньої

напруги. Під дією внутрішнього поля електрони прагнуть рухатися в напрямку n-області; дірки – в напрямку p-області, що протидіє їх дифузії та встановлює рівновагу в системі. Таким чином, рисунок демонструє взаємозв'язок між збідненою областю, електричним полем і потенціальним бар'єром, які визначають роботу p–n переходу. Коли фотон потрапляє в область p-n переходу утворюється електрон-діркова пара, електричне поле миттєво їх розділяє (рис. 9.8).

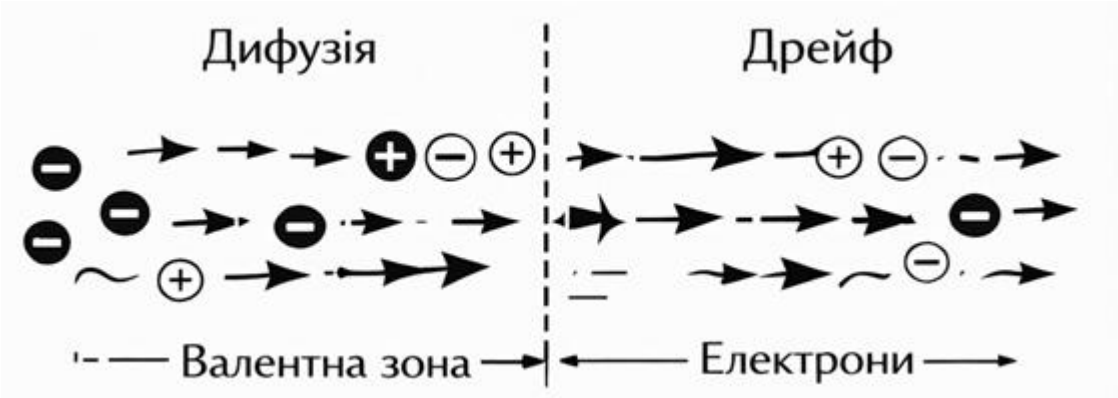


Рис. 9.8. Генерація електрон-діркової пари та її розділення електричним полем

Рисунок ілюструє процес генерації електрон-діркової пари під дією світла та її подальше розділення внутрішнім електричним полем у p–n переході. При поглинанні фотона з енергією $h\nu$ у напівпровіднику відбувається перехід електрона з валентної зони в зону провідності, внаслідок чого утворюється електрон-діркова пара. Електрон переходить у зону провідності, а у валентній зоні залишається дірка. Якщо генерація відбувається в межах або поблизу збідненої області p–n переходу, на носії заряду діє внутрішнє електричне поле. Під його впливом електрон рухається в напрямку n-області; дірка – в напрямку p-області. Це створює струм без необхідності зовнішнього джерела. Найбільш ефективне розділення носіїв відбувається саме в збідненій області, де електричне поле є максимальним. Причому, чим сильніше поле і ширша збіднена область, тим ефективніше детектування. Цей процес запобігає рекомбінації носіїв і забезпечує їх ефективне розділення. Розділені носії створюють електричний струм у зовнішньому колі, який і є вимірюваним фотострумом. На рисунку також

показано, що носії, згенеровані поза збідненою областю, можуть дифундувати до неї і лише після цього бути захопленими електричним полем. Таким чином, ефективність фотодетектора визначається як процесом генерації носіїв, так і ефективністю їх розділення електричним полем.

Рух носіїв у напівпровіднику відбувається двома механізмами: дифузія: рух від області з високою концентрацією до низької. Це випадковий процес; дрейф: рух під дією електричного поля. Це спрямований процес (рис. 9.9).

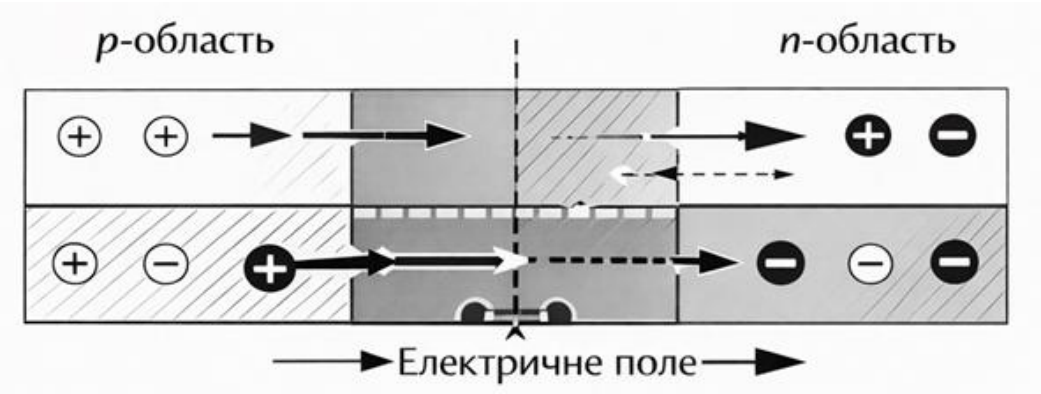


Рис. 9.9. Дрейф і дифузія носіїв заряду в напівпровіднику:
суцільні стрілки – дрейф, пунктирні – дифузія

Рисунок ілюструє два основні механізми перенесення носіїв заряду в напівпровіднику – дифузію та дрейф – у структурі p–n переходу. У p- та n-областях існує градієнт концентрації носіїв заряду: в p-області переважають дірки, а в n-області – електрони. Внаслідок цього виникає дифузійний рух: електрони переміщуються з n-області в p-область, а дірки – з p-області в n-область. На рисунку цей процес показано стрілками, спрямованими через межу переходу. Одночасно в збідненій області p–n переходу існує внутрішнє електричне поле, напрям якого показано на рисунку. Під дією цього поля носії здійснюють дрейфовий рух: електрони рухаються у напрямку, протилежному полю – до n-області; дірки рухаються за напрямком поля – до p-області. Таким чином, дифузія і дрейф діють у протилежних напрямках. У стані рівноваги ці два процеси компенсують один одного, що призводить до відсутності сумарного струму через p–n перехід. Рисунок також показує, що в збідненій області

переважає дрейфовий механізм перенесення носіїв, тоді як у нейтральних областях домінує дифузія.

У фотодетекторах в області переходу домінує дрейф, поза нею – дифузія. Не всі носії досягають електродів. Можливий процес, коли електрон знову з'єднується з діркою і енергія втрачається. Це називається рекомбінація (рис.9.10).

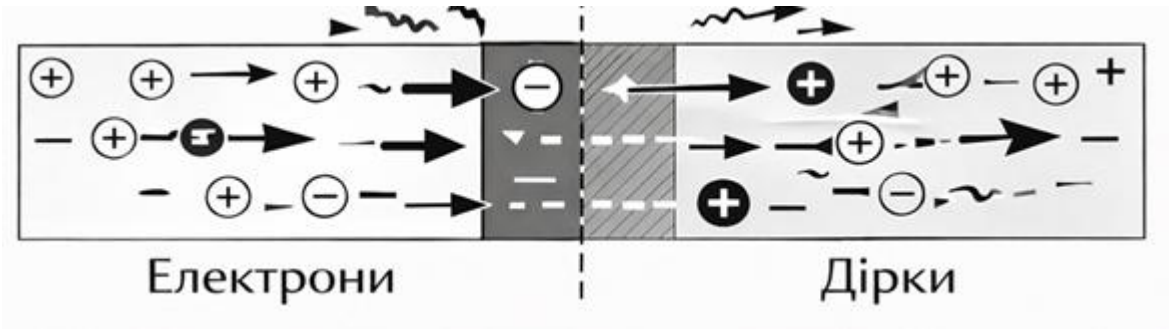


Рис. 9.10. Рекомбінація електронів і дірок у напівпровіднику: хвилясті стрілки – випрмінювання; стрілки руху – перенесення носіїв; центральна зона – область рекомбінації

Рисунок ілюструє процес рекомбінації електронів і дірок у напівпровіднику та його вплив на перенесення носіїв заряду. У лівій частині показано область, де переважають електрони, а в правій – область, де основними носіями є дірки. Носії заряду рухаються назустріч один одному під дією дифузії та електричного поля. У центральній області, позначеній як зона переходу, відбувається зустріч електронів і дірок, у результаті чого вони можуть рекомбінувати – тобто електрон переходить у валентну зону, заповнюючи вакансію (дірку). Процес рекомбінації супроводжується виділенням енергії, яка може проявлятися у вигляді тепла (нерадіаційна рекомбінація) або випромінювання фотона (радіаційна рекомбінація), що на рисунку позначено хвилястими стрілками. На рисунку також показано, що не всі носії рекомбінують: частина з них продовжує рухатися через структуру, формуючи електричний струм. Таким чином, рекомбінація є процесом, який зменшує

кількість вільних носіїв заряду і впливає на ефективність перенесення струму в напівпровідникових пристроях. Як наслідок, зменшення квантової ефективності. Зазначимо, що навіть без світла у p-n переході можуть виникати струми, які утворюють шум. Основними джерелами шуму є теплове збудження носіїв; генерація-рекомбінація; тунелювання. Це призводить до темнового струму, хибних спрацьовувань детектора.

Часто у фотодетекторах часто застосовується зовнішнє зворотне зміщення (рис. 9.11). В результаті збільшується ширина збідненої області, підсилюється електричне поле. Це дає швидше розділення носіїв, меншу ймовірність рекомбінації, вищу чутливість.



Рис. 9.11. Вплив зворотного зміщення на ширину збідненої області: стрілки показують відтік носіїв

Даний рисунок ілюструє зміну ширини збідненої області p–n переходу під дією зворотного зміщення. У лівій частині рисунка показано p–n перехід без прикладеної напруги. У цьому випадку формується збіднена область певної ширини, яка визначається внутрішнім електричним полем, що виникає внаслідок дифузії носіїв заряду та їх рекомбінації. У правій частині зображено ситуацію при прикладенні зворотної напруги. Зовнішнє електричне поле додається до внутрішнього поля переходу, внаслідок чого носії заряду відтягуються від межі переходу. Це призводить до розширення збідненої області. На рисунку показано, що ширина збідненої області значно збільшується при зворотному зміщенні, а електричне поле поширюється на більший об’єм напівпровідника. Збільшення ширини збідненої області має важливі наслідки: підвищується ймовірність

поглинання фотонів у області з електричним полем; покращується ефективність розділення носіїв заряду; зменшується час їх збирання, що підвищує швидкодію детектора. Таким чином, рисунок демонструє, що зворотне зміщення є ключовим фактором, який визначає електричні та оптичні властивості фотодіода. Розглянуті фізичні процеси забезпечують можливість ефективного перетворення світла в електричний сигнал у фотодетекторах.

Проілюструємо наведений матеріал на прикладах.

1. Фотон у збідненій області. Фотон поглинається прямо в області переходу. При цьому носії миттєво розділяються, сигнал виникає швидко і ефективно. Це ідеальний випадок.

2. Поглинання поза переходом. Якщо фотон поглинається далеко від переходу, то носії повинні дифундувати. При цьому частина рекомбінує і сигнал слабшає.

3. Вплив температури. При підвищенні температури збільшується генерація носіїв, зростає темновий струм, знижується точність детекції.

Фізика p-n переходу є фундаментальною для розуміння роботи напівпровідникових фотодетекторів, оскільки саме цей елемент забезпечує ефективне перетворення світла в електричний сигнал. p-n перехід формує збіднену область із вбудованим електричним полем, яке забезпечує швидке розділення носіїв заряду. Процеси дрейфу і дифузії визначають транспорт носіїв, рекомбінація і шум обмежують ефективність детектування. Зовнішнє зміщення дозволяє оптимізувати характеристики детектора. Однак для детектування дуже слабких сигналів, особливо одиничних фотонів, простого фотоструму часто недостатньо. Потрібен механізм, який здатен підсилити сигнал на рівні самого напівпровідника. У напівпровідникових фотодетекторах, особливо тих, що призначені для реєстрації слабких сигналів або одиничних фотонів, важливу роль відіграє механізм внутрішнього підсилення. Одним із основних таких механізмів є лавинний пробій – процес, який дозволяє перетворити дуже слабкий сигнал на значно сильніший електричний імпульс. Цей процес лежить в основі роботи лавинних фотодіодів (APD – Avalanche Photodiodes). Завдяки цьому

ефекту один фотон може спричинити виникнення великого електричного імпульсу, що значно полегшує його реєстрацію. Розуміння фізичної суті лавинного пробою є необхідним для пояснення роботи лавинних фотодіодів і однофотонних детекторів.

Щоб зрозуміти принцип роботи APD, необхідно послідовно розглянути: як виникає лавинний пробій; що таке ударна іонізація; як один носій може породити багато інших; які режими роботи існують; умови, за яких цей процес стає самопідтримуваним; які обмеження накладає цей процес. Це дозволить побачити, як квантова подія (поглинання одного фотона) може призвести до макроскопічного сигналу. Лавинний пробій виникає в напівпровіднику при дуже сильному електричному полі. Зокрема, в p-n переході при високій зворотній напрузі значно зростає напруженість електричного поля і носії заряду (електрони та дірки) починають швидко прискорюватися. Під дією сильного поля електрони набирають велику кінетичну енергію. Їх енергія може перевищити енергію зв'язку електронів у кристалі. При зіткненні з атомами електрон може «вибити» інший електрон із валентної зони. Таким чином, утворюється нова електрон-діркова пара. Цей процес називається ударною іонізацією (рис.9.12).

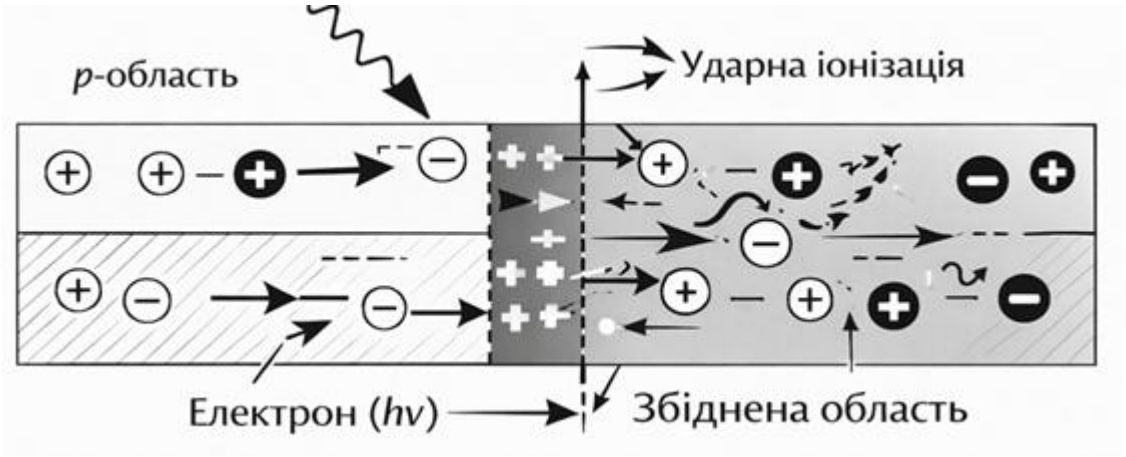


Рис. 9.12. Ударна іонізація в напвіпровіднику:
стрілки – напрям руху носіїв; хвиляста стрілка – фотон;
центральна зона – область сильного поля

Рисунок ілюструє процес ударної іонізації, який є основою лавинного множення носіїв заряду в напівпровідниках. При поглинанні фотона з енергією $h\nu$ у p–n переході утворюється електрон-діркова пара. Якщо в збідненій області створено достатньо сильне електричне поле (наприклад, при зворотному зміщенні), носії заряду починають швидко прискорюватися. Під час руху в сильному електричному полі електрони (а також дірки) набувають кінетичної енергії, достатньої для вибивання електронів із валентної зони. Це призводить до утворення нових електрон-діркових пар – процесу, який називається ударною іонізацією. На рисунку показано, що первинний носій заряду, рухаючись через збіднену область, породжує додаткові носії, які, у свою чергу, також можуть викликати подальшу іонізацію. У результаті виникає ланцюгова реакція множення носіїв, що призводить до різкого зростання струму. Цей процес є основою роботи лавинних фотодіодів: слабкий сигнал, спричинений одним фотоном, перетворюється на сильний електричний імпульс. Таким чином, рисунок демонструє механізм перетворення одиничної електрон-діркової пари у велику кількість носіїв завдяки ударній іонізації в сильному електричному полі.

Нові носії також прискорюються електричним полем, викликають нові акти іонізації. Таким чином новий кожний електрон повторює попередній процес. В результаті виникає ланцюгова реакція, яка називається лавиною (рис.9.13).

Рисунок ілюструє режим роботи лавинного фотодіода при напругах, близьких до напруги пробою, та механізм лавинного множення носіїв заряду. По осі ординат відкладено напругу U, а по осі абсцис – умовний параметр, що характеризує розвиток процесу множення носіїв. Пунктирною лінією позначено напругу пробою $U_{\text{пр}}$. В області $U < U_{\text{пр}}$ фотодіод працює в режимі високого підсилення: первинні носії заряду, утворені внаслідок поглинання фотона, прискорюються електричним полем і викликають іонізацію, що призводить до появи додаткових електрон-діркових пар.

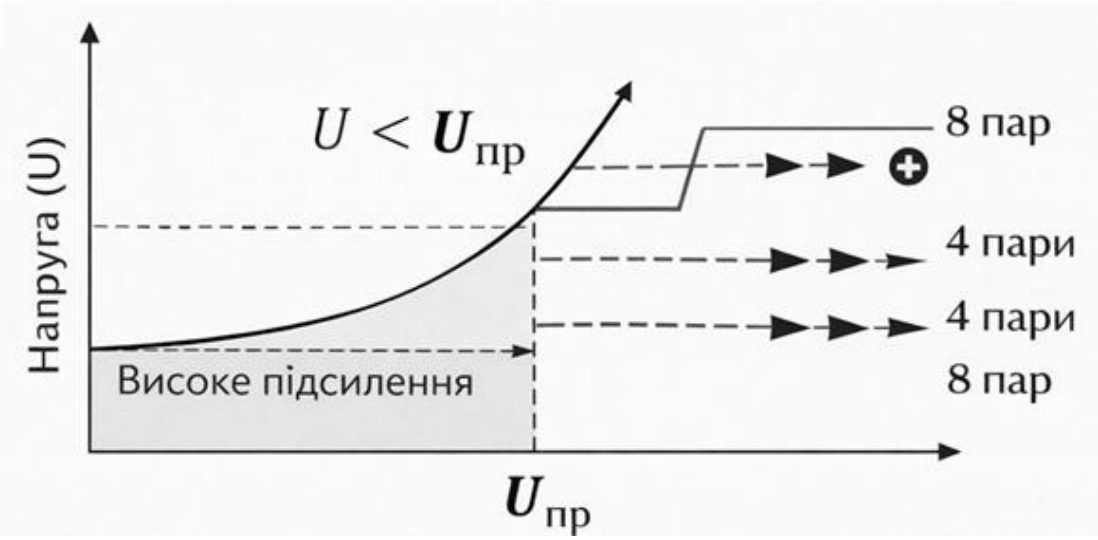


Рис.9.13. Лавинне множення носіїв заряду

При цьому процес множення є контрольованим і не переходить у самопідтримувану лавину. На правій частині рисунка показано послідовні етапи множення носіїв: початкова електрон-діркова пара призводить до утворення кількох пар (наприклад, 4 або 8), що відображає коефіцієнт лавинного підсилення. Кількість носіїв зростає експоненційно внаслідок ударної іонізації. При наближенні напруги до $U_{пр}$ процес множення стає нестабільним і може перейти в режим лавинного пробою, коли генерація носіїв стає самопідтримуваною. Таким чином, рисунок демонструє перехід від режиму підсилення до лавинного пробою та пояснює механізм зростання кількості носіїв у сильному електричному полі. Отже, один носій генерує багато носіїв, що, в кінцевому рахунку, призводить до підсилення сигналу.

Лавинний процес характеризується коефіцієнтом підсилення M:

$$M = \frac{\text{кількість носіїв після лавини}}{\text{початкова кількість носіїв}}. \qquad (9.6)$$

Типові значення M = 10 …100 у лінійному режимі. Це означає, що навіть слабкий сигнал стає вимірюваним, тобто зростає чутливість детектора. Для запуску лавини необхідно високе електричне поле, достатня напруга зворотного зміщення і матеріал із відповідними властивостями. Існує критична напруга –

напруга пробою $U_{\text{пр}}$, нижче якої лавина не виникає. Лавинний пробій – це процес експоненціального зростання кількості носіїв заряду під дією сильного електричного поля. Це не руйнування матеріалу, це керований фізичний процес (у фотодетекторах). При певній напрузі кількість нових носіїв перевищує втрати і процес стає самопідтримуваним. Лавинний пробій є механізмом, який робить можливим детектування надзвичайно слабких оптичних сигналів у сучасних квантових технологіях.

Лавинні фотодіоди (APD) використовують явище лавинного пробою для підсилення сигналу. Проте характер цього підсилення і поведінка детектора суттєво залежать від того, в якому режимі він працює. Саме вибір режиму визначає, чи буде детектор вимірювати інтенсивність світла, чи реагувати на окремі фотони. Виділяють два основні режими роботи лавинних фотодіодів): лінійний режим: $U < \boldsymbol{U}_{\text{пр}}$ і режим Ґейґера: $U > \boldsymbol{U}_{\text{пр}}$.

В лінійному режимі напруга трохи нижча за напругу пробою, лавинний процес виникає, але не є самопідтримуваним, кожен носій викликає обмежене підсилення. Особливості: сигнал пропорційний кількості фотонів; детектор працює як підсилювач; коефіцієнт підсилення M зазвичай від 10 до 100. Переваги: можливість вимірювання інтенсивності, відносно стабільна робота, відсутність необхідності гасіння лавини. Недоліки: недостатня чутливість для одиничних фотонів, наявність шуму підсилення.

У режимі Гейгера напруга перевищує напругу пробою, навіть один носій може запустити лавину, лавина стає самопідтримуваною. В результаті виникає сильний імпульс незалежно від числа фотонів і детектор працює як «лічильник» фотонів. Переваги: висока чутливість, можливість детектування одиничних фотонів. Недоліки: необхідність гасіння лавини, мертвий час, ефект післяімпульсів, відсутність інформації про інтенсивність.

Схематично режими роботи лавинного фотодіода (APD) наведено на рис. 9.14.

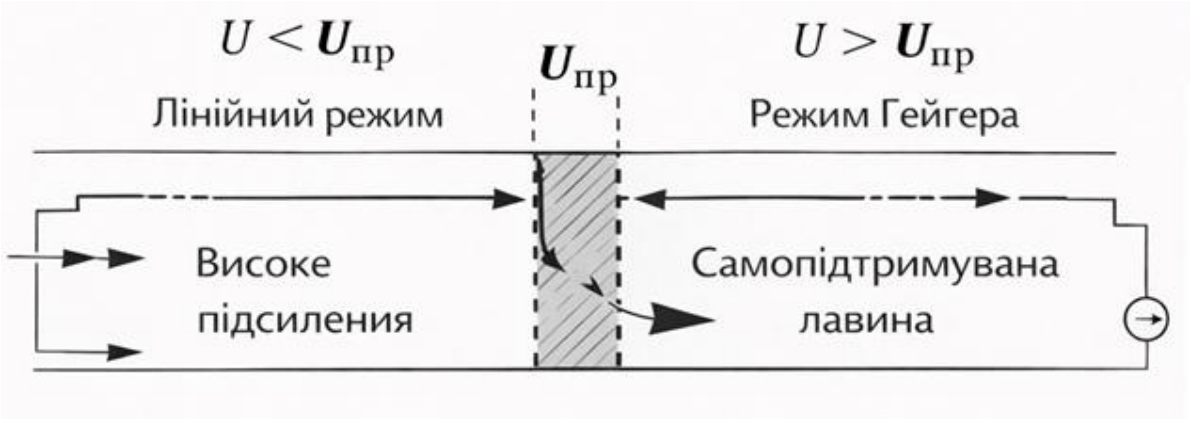


Рис. 9.14. Режими роботи лавинного фотодіода (APD)

Рисунок ілюструє основні режими роботи лавинного фотодіода (APD) залежно від прикладеної напруги відносно напруги пробою $U_{\text{пр}}$. У лівій частині рисунка показано лінійний режим роботи при напругах $U < U_{\text{пр}}$. У цьому режимі відбувається лавинне множення носіїв заряду, однак процес є контрольованим і не переходить у самопідтримувану лавину. Внаслідок цього сигнал на виході пропорційний кількості поглинутих фотонів, а детектор працює як підсилювач із високим коефіцієнтом підсилення. У центральній заштрихованій області, поблизу напруги пробою $U_{\text{пр}}$, спостерігається перехідний режим, у якому система є нестабільною: навіть незначні флуктуації можуть призвести до запуску лавини. Ця область відповідає межі між лінійним режимом і режимом Гейгера. У правій частині рисунка показано режим Гейгера при напругах $U > U_{\text{пр}}$. У цьому режимі лавинний процес стає самопідтримуваним: навіть одна електрон-діркова пара, утворена внаслідок поглинання фотона, запускає повну лавину. Вихідний сигнал при цьому не залежить від енергії фотона, а має однакову амплітуду для кожної події. Для припинення лавини необхідне використання спеціальної схеми гасіння. Таким чином, рисунок демонструє перехід від лінійного режиму з керованим підсиленням до режиму Гейгера, у якому реалізується детекція одиничних фотонів У режимі Ґейґера лавину потрібно зупинити, інакше струм буде текти безперервно, детектор втратить здатність до нових вимірювань. Існують такі методи гасіння: пасивне (резистор обмежує

струм) і активне (електронна схема швидко знижує напругу). На рис. 9.15 проілюстровано процес гасіння лавини.

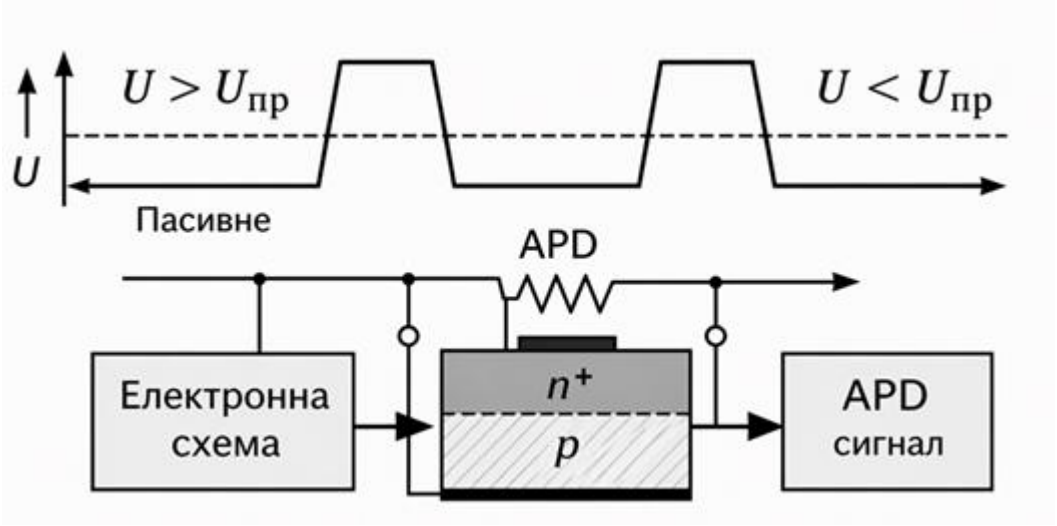


Рис. 9.15. Гасіння лавини в лавинному фотодіоді

Рисунок ілюструє принцип гасіння лавини в лавинному фотодіоді (APD) та відповідну зміну напруги в часі. У верхній частині рисунка показано часову залежність напруги на діоді. У початковий момент на фотодіод подається напруга, що перевищує напругу пробою $U > U_{пр}$, внаслідок чого пристрій працює в режимі Гейгера і готовий до запуску лавинного процесу. Після виникнення лавини струм різко зростає, що призводить до зниження напруги на діоді. У результаті напруга падає нижче напруги пробою $U < U_{пр}$, і лавинний процес припиняється. Цей процес відповідає гасінню лавини. Після гасіння напруга знову підвищується до значення, що перевищує $U_{пр}$, і детектор повертається в стан готовності до реєстрації наступного фотона. Таким чином, процес має циклічний характер. У нижній частині рисунка зображено еквівалентну електричну схему детектора. Фотодіод представлено p–n структурою (з областями n^+ та p, де n^+– сильно легована область n-типу, яка забезпечує хорошу провідність і використовується як контактна частина напівпровідникових пристроїв, а p – область напівпровідника з дірками як основними носіями заряду, яка разом із n-областю утворює p–n перехід –

основний елемент фотодетекторів), до якої підключено навантажувальний резистор та електронну схему керування. Пасивне гасіння реалізується за рахунок обмеження струму через резистор, що викликає падіння напруги на діоді нижче $U_{\text{пр}}$. Електронна схема може також забезпечувати кероване (активне) відновлення робочого режиму. Таким чином, рисунок демонструє механізм припинення лавинного процесу через зниження напруги нижче напруги пробою та подальше відновлення чутливості детектора. При збільшенні напруги відбувається перехід між режимами. При цьому підсилення поступово зростає; біля напруги пробою виникає нестабільність; після перевищення – лавина стає неконтрольованою без гасіння.

Режими роботи лавинних фотодіодів визначають їх функціональні можливості і області застосування. Вибір режиму роботи лавинних фотодіодів залежить від задачі, зокрема лінійний режим використовують для вимірювання інтенсивності світла і в оптичних системах зв'язку; режим Ґейґера – в квантовій криптографії, при детектуванні одиничних фотонів, в квантових експериментах. Керування режимом роботи APD є основним інструментом для адаптації фотодетекторів до різних задач у класичних і квантових оптичних системах.

Лавинні фотодіоди є високочутливими напівпровідниковими детекторами, робота яких базується на лавинному множенні носіїв заряду. Однак ефективність цього процесу значною мірою визначається матеріалом, з якого виготовлений детектор. Матеріал впливає на спектральну чутливість; рівень шуму; напругу пробою; ефективність лавинного підсилення. Тому правильний вибір матеріалу є ключовим для оптимальної роботи APD у різних застосуваннях. Матеріал, що використовується в APD, повинен мати відповідну ширину забороненої зони E_g; здатність до ефективної ударної іонізації; низький рівень дефектів; хорошу провідність і стабільність; контрольовані властивості p-n переходу. Основним параметром є співвідношення коефіцієнтів іонізації електронів і дірок.

Основними матеріалами для APD є:

Кремній (Si). Найпоширеніший матеріал для APD. Використовується у видимому діапазоні. Переваги: низький шум; висока стабільність; добре контрольований процес лавини; високе співвідношення іонізації (електрони домінують). Недоліки: нечутливий до інфрачервоного світла (>1000 нм).

Індій-галій-арсенід (InGaAs). Використовується для ближнього інфрачервоного діапазону (≈ 1000–1700 нм). Основний для телекомунікацій (~1550 нм). Переваги: висока чутливість у ІЧ-області; сумісність із волоконно-оптичними системами. Недоліки: вищий темновий рахунок; складніша структура; більший afterpulsing.

Індій-фосфід (InP). Часто використовується разом з InGaAs у багатошарових структурах. Забезпечує область лавинного підсилення. Особливість: InGaAs поглинає фотони; InP відповідає за лавинний процес.

Германій (Ge). Використовується для інфрачервоного діапазону. Сумісний із кремнієвими технологіями. Недоліки: вищий шум; менша стабільність.

При виборі матеріалу слід дотримуватися балансу між чутливістю – шумом; ефективністю – складністю; спектральним діапазоном – стабільністю. Матеріали для лавинних фотодіодів визначають їхні фундаментальні характеристики і можливості застосування. Вони є одним із основних факторів, який визначає ефективність роботи APD і їх придатність для конкретних квантових і оптичних застосувань.

Розглянемо приклади.

1. Один фотон генерує сильний сигнал. У режимі Ґейґера один фотон створює одну пару, запускається лавина, формується великий імпульс. Це дозволяє детектувати одиничні фотони, використовувати APD у квантових системах.

2. Лінійний режим. Якщо на детектор падає багато фотонів, то кожен запускає невелику лавину, сигнал сумується і отримуємо аналоговий вихід.

3. Afterpulsing. Після детекції через деякий час виникає ще один імпульс, хоча фотона не було. Це може викликати помилки в квантових протоколах.

Таким чином, лавинний пробій є фундаментальним фізичним явищем, яке лежить в основі роботи високочутливих фотодетекторів. Він дозволяє значно підсилити сигнал у напівпровідникових фотодетекторах. Особливий інтерес у квантових технологіях становить граничний випадок цього процесу, коли детектор здатен реагувати на один-єдиний фотон. Саме таким пристроєм є однофотонний лавинний детектор, або SPAD (Single-Photon Avalanche Diode). SPAD є ключовим елементом сучасних систем квантової криптографії, квантових комунікацій і високочутливих вимірювань. Його головна особливість полягає в тому, що один фотон запускає лавинний процес, який створює вимірюваний електричний імпульс.

SPAD – це спеціально спроєктований лавинний фотодіод, який працює у режимі Ґейґера. Принцип роботи наступний: на діод подається зворотна напруга вище напруги пробою; фотон поглинається в області переходу; утворюється електрон-діркова пара; носій прискорюється сильним електричним полем; запускається лавинний процес (ударна іонізація); виникає сильний електричний імпульс; лавина гаситься спеціальною схемою. Цей імпульс не залежить від енергії фотона, має стандартну форму і легко реєструється електронікою (рис. 9.16). Рисунок показує послідовність процесів у SPAD: прикладення напруги вище $\boldsymbol{U}_{\text{пр}}$, поглинання фотона, утворення електрон-діркової пари, запуск лавинного множення, формування електричного імпульсу, гасіння лавини та формування цифрового сигналу.



Рис. 9.16. Принцип роботи SPAD

Основні особливості: здатність детектувати одиничні фотони; цифровий вихід (є імпульс / немає імпульсу); висока чутливість; робота у режимі лавинного пробою. На відміну від звичайних фотодіодів SPAD не вимірює інтенсивність, він фіксує факт наявності фотона. Таким чином сигнал має вигляд «0» або «1». SPAD працює як квантовий лічильник. Переваги: дуже висока чутливість; можливість рахувати фотони; компактність і відносна простота. Недоліки: наявність шуму (темнові імпульси); afterpulsing; мертвий час; не дає інформації про кількість фотонів (лише факт події). SPAD – це основний тип фотодетектора для квантових технологій, який дозволяє реєструвати окремі фотони завдяки лавинному підсиленню сигналу, хоча й супроводжується певними шумовими ефектами та обмеженнями. Вони ідеально підходять для застосування у таких сферах, як квантова криптографія, квантова оптика, біофотоніка, часові вимірювання, кореляційні експерименти, підрахунок фотонів.

У лавинних фотодіодах, особливо в режимі Ґейґера, один фотон може запустити лавинний процес, який призводить до різкого зростання струму. Однак така лавина є самопідтримуваною, і якщо її не зупинити, детектор

перестане функціонувати як вимірювальний пристрій. Саме тому необхідний спеціальний процес – гасіння лавини, який дозволяє припинити лавинний струм і підготувати детектор до наступного вимірювання. Щоб зупинити лавину, потрібно зменшити напругу на p-n переході нижче напруги пробою. Тоді ударна іонізація припиняється, лавина згасає і струм падає до нуля.

Основними методами гасіння є:

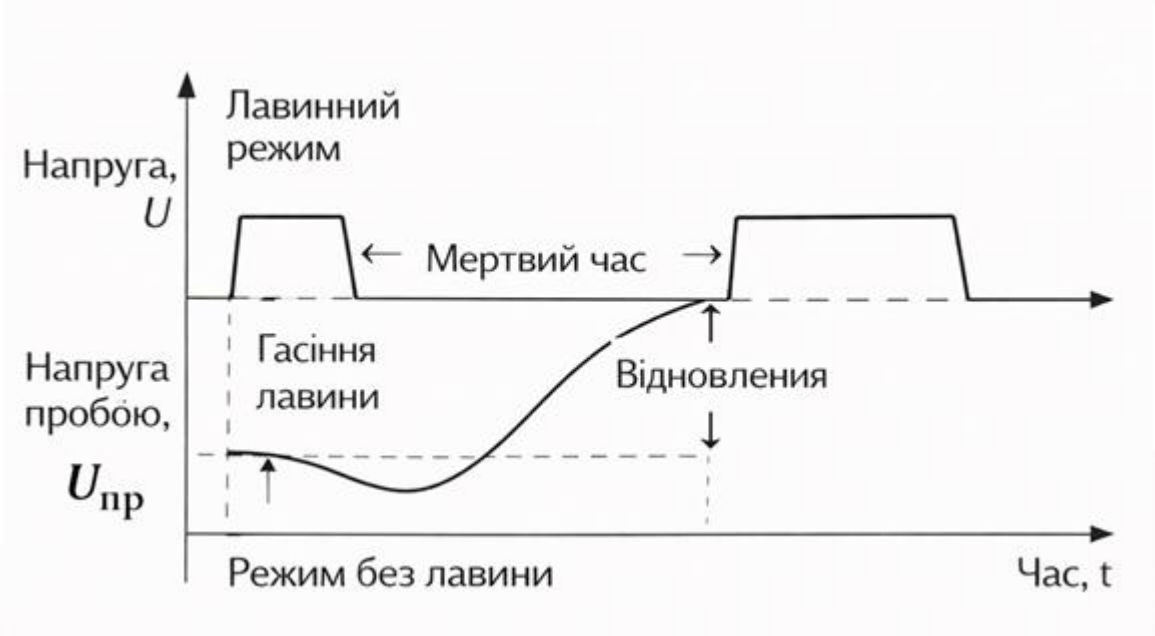
1. Пасивне гасіння. Принцип: у коло включається резистор. При лавині струм зростає і напруга на діоді автоматично падає. Переваги: проста реалізація, не потребує складної електроніки. Недоліки: повільне відновлення, великий мертвий час, обмежена швидкодія.

2. Активне гасіння. Принцип: електронна схема швидко фіксує початок лавини, миттєво знижує наругу і після цього відновлює її. Переваги: швидке гасіння, короткий мертвий час, висока швидкодія. Недоліки: складніша реалізація, потребує точної синхронізації.

Після гасіння напруга повертається до робочого значення і детектор знову готовий до роботи. Цей процес визначає мертвий час і максимальну швидкість детекції.

У лавинних фотодіодах і однофотонних детекторах після кожного спрацювання відбувається складний фізичний процес – лавина носіїв заряду, яку необхідно зупинити і «перезавантажити» детектор. У цей період пристрій тимчасово втрачає здатність реєструвати нові фотони. Цей інтервал називається мертвим часом і є одним із ключових обмежень швидкодії детекторів. Мертвий час – це інтервал часу після реєстрації фотона, протягом якого детектор не здатний зареєструвати наступну подію (рис.9.17). Наслідки: обмеження максимальної швидкості детекції, можливі втрати фотонів при високих потоках. $U < \boldsymbol{U}_{\text{пр}}$.

Рис.



9.17. Часова залежність напруги в лавинному фотодетекторі після спрацювання: гасіння лавини, відновлення напруги та мертвий час.

Рисунок ілюструє часову еволюцію напруги на лавинному фотодетекторі після реєстрації фотона. Пунктирна лінія – це рівень $\boldsymbol{U}_{\text{пр}}$. У початковий момент детектор перебуває у стані, близькому до напруги пробою $\boldsymbol{U}_{\text{пр}}$, що забезпечує можливість запуску лавинного процесу. Після поглинання фотона відбувається лавинний пробій, який супроводжується різким зростанням струму. Для припинення лавини електронна схема гасіння швидко знижує напругу нижче $\boldsymbol{U}_{\text{пр}}$, і лавина припиняється. Ця коротка ділянка відповідає процесу гасіння лавини і є локалізованою у часі. Це критично, інакше детектор «залипне». Напруга досягає низького рівня, детектор повністю «вимкнений». У цей момент детекція неможлива. Після гасіння напруга починає поступово відновлюватися до робочого значення. Цей етап називається відновленням і визначається параметрами електричного кола детектора (зокрема, RC-часом). Детектор ще нестабільний. У цей час нові фотони не реєструються.

Розглянуті принципи роботи напівпровідникових лавинних фотодетекторів демонструють, що їх ключовою особливістю є здатність до внутрішнього підсилення сигналу за рахунок лавинного множення носіїв заряду.

Завдяки сильному електричному полю в області p–n переходу фотогенеровані електрони та дірки набувають достатньої енергії для ініціювання процесів ударної іонізації, що призводить до каскадного зростання кількості носіїв і, відповідно, значного підсилення фотоструму. Це дозволяє ефективно реєструвати навіть надслабкі світлові сигнали, аж до рівня одиничних фотонів. Водночас така висока чутливість супроводжується низкою специфічних ефектів, зокрема збільшенням шумів, статистичними флуктуаціями коефіцієнта підсилення та залежністю характеристик детектора від напруги зміщення і температури. Це накладає обмеження на стабільність та точність вимірювань і вимагає ретельного контролю режимів роботи приладу. Таким чином, лавинні фотодетектори є потужним інструментом у квантовій оптиці та фотоніці, але їх ефективне використання потребує врахування компромісу між підсиленням сигналу та рівнем шумів. Отже, напівпровідникові лавинні фотодетектори поєднують у собі високу чутливість і швидкодію з певними фізичними та технологічними обмеженнями, що визначають їх практичну застосовність.

9.3. Надпровідникові сенсори та реєстрація низькоенергетичних квантів

Хоча лавинні фотодіоди та SPAD є надзвичайно ефективними, вони мають певні обмеження, зокрема шум, afterpulsing та обмежену ефективність у деяких спектральних діапазонах. Альтернативний підхід до детектування фотонів базується на зовсім іншій фізиці – явищі надпровідності. Надпровідність – це стан речовини, при якому електричний опір дорівнює нулю і струм може текти без втрат. Цей стан виникає при дуже низьких температурах (зазвичай кілька кельвінів). У надпровіднику електрони утворюють так звані куперові пари. Ці пари рухаються узгоджено, без розсіювання. Надпровідникові сенсори є одним із найважливіших досягнень сучасної фізики детектування, оскільки вони відкривають можливість реєстрації надслабких сигналів і окремих квантів енергії з точністю, недосяжною для класичних напівпровідникових приладів. Їх поява пов’язана з розвитком як квантової оптики, так і фізики низьких

температур, де властивості матеріалів кардинально змінюються внаслідок переходу до надпровідного стану. У цьому стані електричний опір зникає, а електрони утворюють так звані куперівські пари, що поводяться як узгоджена квантова система. Саме ці особливості дозволяють створювати сенсори з винятковою чутливістю до енергії окремих фотонів, включаючи інфрачервоний та навіть мікрохвильовий діапазони.

Проблема детектування низькоенергетичних квантів є принципово складною, оскільки енергія таких фотонів може бути порівнянною або навіть меншою за теплові флуктуації середовища. Це означає, що класичні детектори, які покладаються на генерацію електрон-діркових пар у напівпровідниках, виявляються недостатньо чутливими або надто шумними. У цьому контексті надпровідникові сенсори забезпечують принципово новий підхід, де детектування базується не на класичних процесах, а на квантових властивостях матеріалу. Таким чином, перехід до розгляду надпровідникових детекторів є логічним продовженням аналізу фотодетектування, оскільки він дозволяє подолати фундаментальні обмеження традиційних технологій. У таких системах навіть один фотон може викликати локальне руйнування надпровідного стану, що призводить до виникнення вимірюваного сигналу.

Основою роботи надпровідникових сенсорів є енергетична щілина Δ, яка характеризує енергію, необхідну для розриву куперівської пари. У надпровіднику при температурі нижче критичної T_c електрони утворюють зв’язані стани, і для їх руйнування потрібно передати енергію, не меншу за 2Δ. Якщо фотон з енергією $E = h\nu$ (де h – стала Планка, ν — частота) поглинається матеріалом, він може зруйнувати куперівські пари та створити квазічастинки. Кількість таких квазічастинок пропорційна енергії фотона:

$$N_{qp} \approx \frac{E}{\Delta}, \tag{9.7}$$

де N_{qp} – число квазічастинок, а Δ – енергетична щілина. Це співвідношення показує, що навіть дуже слабкий сигнал може бути перетворений у вимірювану зміну властивостей системи.

Цей механізм лежить в основі різних типів надпровідникових детекторів. Одним із найважливіших є надпровідниковий нанодротяний однофотонний детектор (SNSPD, Superconducting Nanowire Single-Photon Detector). На відміну від лавинних фотодіодів, SNSPD не використовують лавинне підсилення. Їх принцип роботи базується на порушенні надпровідного стану при поглинанні одного фотона. У цьому випадку тонкий надпровідниковий провідник охолоджується до температури, близької до абсолютного нуля, і через нього пропускається струм, близький до критичного. ***Критичний струм*** – це максимальний струм, який може протікати через надпровідник без втрати надпровідності. Якщо його перевищити, надпровідність руйнується. У надпровідному стані опір ≈ 0 і струм проходить без втрат. Поглинання фотона призводить до локального руйнування надпровідності і утворення так званої «гарячої плями», в якій матеріал переходить у нормальний стан. Це створює тимчасовий опір, що призводить до виникнення електричного імпульсу, який і реєструється як відлік. У SNSPD робочий струм близький до критичного. Навіть мале порушення (один фотон) достатнє для того, щоб локально порушити надпровідність і викликати макроскопічний сигнал. Це забезпечує надзвичайну чутливість і можливість детекції одиничних фотонів.

Формально цей процес можна описати через зміну провідності: $R(t) = 0$ – надпровідний стан; $R(t) = R_n$ – нормальний стан, де R_n – опір у нормальному стані. Перехід між цими станами відбувається дуже швидко, що забезпечує високу часову роздільну здатність детектора. Процес відбувається через послідовність таких етапів: протікання струму (через нанодріт протікає струм, близький до критичного); поглинання фотона (фотон передає енергію електронам, утворюється «гаряча область» (hotspot); руйнування надпровідності (у «гарячій області» надпровідність зникає і локально зникає надпровідність (виникає опір); перерозподіл струму (струм обходить гарячу область, якщо струм перевищує критичний, то зона розширюється); формування імпульсу (виникає короткий електричний сигнал, його фіксує електроніка); відновлення (система охолоджується і надпровідність відновлюється).

SNSPD - детектори працюють при дуже низьких температурах, порядка кілька Кельвінів. Зазвичай із використанням кріостатів. Це потрібно, щоб підтримувати надпровідність і мінімізувати шум. SNSPD мають виняткові часові властивості, зокрема дуже малий джитер (десятки пікосекунд); швидке відновлення; можливість роботи на високих швидкостях. Це робить їх ідеальними для часово-корельованих вимірювань і квантових мереж. На відміну від напівпровідникових детекторів рівень темнових імпульсів у SNSPD дуже низький. Причини цього: низька температура, відсутність теплових збуджень. Це дає високу точність і низький рівень шуму. Квантова ефективність SNSPD може досягати дуже високих значень: понад 90% у деяких діапазонах. Це пов'язано з високою ймовірністю поглинання та ефективним механізмом перетворення сигналу. SNSPD працюють у широкому спектральному діапазоні: від видимого світла до інфрачервоного. Особливо важлива ефективність у телекомунікаційному діапазоні (~1550 нм). Попри переваги, SNSPD мають певні недоліки, зокрема, необхідність кріогенного охолодження, складність системи і висока вартість. Це обмежує їх використання у масових застосуваннях та компактних пристроях.

Переходячи до аналізу інших типів сенсорів, варто зазначити болометри та переходні детектори (TES – Transition Edge Sensors). У TES використовується різкий перехід між надпровідним і нормальним станом, що відбувається при зміні температури. Детектор працює в області цього переходу, де навіть незначна зміна температури, спричинена поглинанням фотона, призводить до значної зміни опору. Якщо позначити температуру як T, то опір можна розглядати як функцію R(T), яка має крутий нахил поблизу критичної температури T_c. Це дозволяє перетворювати енергію фотона у вимірюваний електричний сигнал з високою точністю.

Усі ці детектори мають спільну рису: вони використовують квантові властивості надпровідності для досягнення високої чутливості. Однак їх робота неможлива без глибокого розуміння статистики квазічастинок і теплових флуктуацій. Наприклад, час життя квазічастинок визначається процесами

рекомбінації і впливає на часові характеристики детектора. Якщо позначити цей час як $\tau_{\text{квазічаст.}}$ то він визначає швидкість відновлення сенсора після події.

З точки зору квантової теорії вимірювань, надпровідникові сенсори можна описати як пристрої, що реалізують проєктивне або узагальнене вимірювання (POVM), де результатом є або «клік», або відсутність події. Ймовірність детекції визначається квантовою ефективністю η, яка залежить від геометрії пристрою, довжини хвилі фотона та умов експерименту. При цьому шумові процеси, такі як темнові рахунки, можуть бути суттєво зменшені завдяки низьким температурам.

Особливу увагу слід приділити статистиці відліків. У випадку ідеального однофотонного детектора розподіл ймовірностей має вигляд:

$$P(0) = 1 - \eta, \qquad P(1) = \eta, \tag{9.8}$$

де $P(0)$ – ймовірність відсутності відліку, а $P(1)$ – ймовірність реєстрації фотона. У реальних умовах ці величини модифікуються за рахунок шумів і втрат. Практичні приклади застосування надпровідникових сенсорів включають квантову криптографію, де необхідна надійна реєстрація одиночних фотонів, а також астрономію, де детектуються надслабкі сигнали від далеких об’єктів. У цих задачах критично важливими є низький рівень шумів, висока ефективність і мала похибка вимірювань.

Для кращого розуміння наведемо деякі приклади.

1. Один фотон – гаряча пляма. Фотон із довжиною хвилі 1550 нм поглинається нанодротом і руйнує куперові пари. Виникає локальний опір і формується імпульс.

2. Квантова криптографія. У системах квантового розподілу ключів потрібна висока точність і мінімальний шум. SNSPD забезпечують низьку ймовірність помилок і високу швидкість детекції.

3. Порівняння зі SPAD. SPAD простіші, але більше шуму. SNSPD складніші, але значно точніші. У високоточних експериментах перевага на боці SNSPD.

Підсумовуючи, можна зазначити, що надпровідникові сенсори являють собою потужний інструмент для реєстрації низькоенергетичних квантів, поєднуючи квантову природу матеріалів з високою технологічною досконалістю. Їх робота базується на фундаментальних фізичних принципах – енергетичній щілині, утворенні квазічастинок і фазових переходах – і дозволяє досягати меж, близьких до фундаментальних обмежень квантових вимірювань. Разом із тим їх використання пов'язане з необхідністю складних кріогенних систем і точного контролю умов експерименту.

Отже, надпровідникові детектори відкривають нові горизонти у вимірюванні квантових станів світла, забезпечуючи можливість дослідження явищ, які раніше були недоступними. Вони забезпечують максимально точне і надійне детектування одиничних фотонів. Надпровідникові детектори не лише розширюють можливості експериментальної фізики, але й відіграють ключову роль у розвитку квантових технологій, включаючи квантові комунікації, обчислення та метрологію.

9.4. Шумові характеристики та функціональні обмеження реальних детекторів

Фотодетектування в реальних умовах істотно відрізняється від ідеалізованих моделей, розглянутих у попередніх підрозділах. Хоча базові принципи перетворення фотонів у електричний сигнал визначаються фундаментальними фізичними процесами, такими як поглинання світла та генерація носіїв заряду, практична робота фотодетекторів супроводжується низкою додаткових факторів, що обмежують їх ефективність і точність. До цих факторів належать різноманітні джерела шуму, кінцева швидкодія, нелінійні ефекти, а також технологічні обмеження матеріалів і конструкцій приладів. Зокрема, навіть за відсутності світлового сигналу детектори можуть генерувати випадкові відліки, відомі як темнові шуми, а при високих інтенсивностях виникають ефекти насичення та зниження чутливості. Крім того, статистичні флуктуації процесів генерації та переносу носіїв заряду призводять до

додаткових шумів, що впливають на точність вимірювань. Усе це означає, що реальний детектор ніколи не є ідеальним вимірювальним пристроєм, а його характеристики повинні описуватися не лише середніми значеннями сигналу, але й повною статистикою шумових процесів. Особливо критично це для квантових технологій, де інформація часто закодована в одиничних фотонах, і навіть невеликі помилки можуть призводити до значних спотворень результатів або втрати інформації.

Щоб зрозуміти природу обмежень фотодетекторів, необхідно розглянути основні характеристики детекторів.

Однією з ключових характеристик є квантова ефективність η, яка визначає ймовірність того, що падаючий фотон буде зареєстрований. Це параметр, що визначає ефективність перетворення фотонів у електричний сигнал. Квантова ефективність η визначається як відношення кількості зареєстрованих фотонів до кількості фотонів, що потрапили на детектор:

$$\eta = \frac{N_{\text{зареєстр.}}}{N_{\text{пад.}}}, \tag{9.9}$$

де $N_{\text{пад.}}$ – число фотонів, що падають на детектор; $N_{\text{зареєстр.}}$ – число зареєстрованих фотонів, які викликали сигнал. Наприклад, якщо на детектор падає 100 фотонів, а він реєструє 70, то ефективність = 70%. Квантова ефективність η визначає ймовірність того, що один фотон, який потрапив у детектор, буде зареєстрований, створить носії заряду і призведе до вимірюваного сигналу. Якщо $\eta = 1$, детектор є ідеальним, кожен фотон реєструється;, якщо $\eta < 1$ – частина фотонів втрачається, якщо $\eta = 0$ – детектор нічого не бачить. Ефективність детекції завжди менша за одиницю через кілька факторів: втрати на поверхні (відбиття), не всі фотони поглинаються, не кожен фотон створює носії заряду, не всі носії дають сигнал. Висока ефективність означає менше втрат інформації. Низька ефективність – частина фотонів «зникає». Це призводить до того, що реальна статистика відліків відрізняється від теоретичної і описується згорткою початкового розподілу з біноміальним процесом, що враховує втрати.

Іншими словами, навіть якщо на вхід детектора надходить певна кількість фотонів, зареєстрована кількість буде меншою і випадковою.

Квантова ефективність є добутком кількох факторів:

$$\eta = \eta_{\text{опт.}} \cdot \eta_{\text{погл.}} \cdot \eta_{\text{внутр.}}, \tag{9.10}$$

де $\eta_{\text{опт.}}$ – оптична ефективність (враховує втрати на поверхні; відбиття світла); $\eta_{\text{погл.}}$ – ймовірність поглинання фотона (залежить від довжини хвилі); $\eta_{\text{внутр.}}$ – внутрішня ефективність (створення сигналу). У лавинних детекторах η включає також ймовірність запуску лавини, яка залежить від напруги зміщення. Ймовірність реєстрації фотона визначається квантовою ефективністю матеріалу, геометрією детектора, напругою зміщення.

Квантова ефективність сильно залежить від матеріалу детектора: кремній Si має високу ефективність у видимому діапазоні; InGaAs ефективний для інфрачервоного світла; надпровідники можуть досягати дуже високих значень. Типові значення ηстановлять 40–70% для Si, 10–30% для InGaAs. Ефективність можна підвищити, збільшуючи напругу. Але при цьому зростає рівень шуму. Таким чином, вибір матеріалу визначає спектральну чутливість і рівень втрат. Також важливі конструктивні особливості: товщина активного шару; наявність антивідбивних покриттів; геометрія детектора; структура p-n переходу. Оптимізація цих параметрів збільшує ймовірність поглинання і покращує збір носіїв.

Квантова ефективність визначається кількома послідовними процесами:

1. Оптичні втрати: частина фотонів відбивається від поверхні, частина не потрапляє в активну область.

2. Поглинання: фотон може не мати достатньої енергії або пройти через матеріал без взаємодії.

3. Генерація носіїв: не кожен поглинутий фотон створює ефективну електрон-діркову пару.

4. Збір носіїв: частина носіїв рекомбінує до досягнення електродів.

Ефективність детекції – це основний параметр, який визначає здатність детектора реєструвати фотони. Підвищення ефективності детекції є одним із головних завдань при розробці та використанні однофотонних детекторів. Проте, навіть при високій ефективності залишаються квантові флуктуації і точність вимірювання обмежена квантовим шумом. Шум – це будь-який випадковий сигнал, який не несе корисної інформації, але впливає на результат вимірювання. У фотодетекторах шум проявляється як випадкові імпульси, флуктуації сигналу, помилки у визначенні кількості фотонів. Основна проблема полягає в тому, що детектор має відрізнити реальний фотон від шуму. Основними джерелами шуму є:

1. Тепловий шум. Виникає через тепловий рух носіїв заряду. Навіть без світла електрони можуть отримати достатню енергію, створюються електрон-діркові пари, виникає струм. Тепловий шум зростає з температурою. Він особливо важливий для напівпровідникових детекторів.

2. Шум генерації-рекомбінації. Цей шум пов’язаний із випадковими процесами утворення носіїв та їх рекомбінації. Це створює флуктуації струму, нестабільність сигналу.

3. Шот-шум. Шот-шум – це випадкові флуктуації електричного струму, що виникають через дискретний (квантовий) характер переносу заряду або фотонів. Цей шум є фундаментальним квантовим шумом. Причина його виникнення: дискретність фотонів і випадковість їх надходження. Навіть при ідеальному детекторі сигнал має статистичні флуктуації. Цей шум не можна усунути – це квантове обмеження.

Але низька ефективність додає додатковий шум і знижує якість сигналу. Квантова ефективність є однією з основних характеристик фотонних детекторів, яка визначає їх здатність перетворювати квантові сигнали у вимірювані електричні імпульси. Тому підвищення квантової ефективності є одним із головних напрямків розвитку сучасних фотонних детекторів і ключовою умовою ефективної квантової передачі інформації.

Високе значення ефективності означає, що більшість фотонів реєструється, і детектор працює з максимальною віддачею щодо вхідного випромінювання. Однак такий опис буде неповним, якщо не врахувати, що в реальних умовах детектор генерує відліки навіть за відсутності світла. Таким чином, ми переходимо до такої характеристики детекторів як темнові рахунки (темнові відліки).

Темновий рахунок – це кількість імпульсів (спрацьовувань) фотодетектора, які виникають без попадання фотонів, тобто у повній темряві. Ідеально детектор мав би реагувати тільки на фотони. Але в реальних умовах він може генерувати сигнали сам по собі. Це означає, що детектор «реєструє фотони», яких насправді немає; виникають хибні події. Темновий рахунок зазвичай вимірюється в імпульсах за секунду (counts per second, cps). називаються темновими рахунками і є одним із головних джерел шуму. Темнові рахунки (dark counts) – це імпульси, які виникають у фотодетекторі за відсутності світла, тобто без реальних фотонів. Темнові рахунки означають, що детектор «реєструє» події, яких насправді немає і виникають хибні сигнали. У режимі Ґейґера навіть один випадковий носій може запустити лавину, що призводить до повноцінного імпульсу. Основними механізмами виникнення темнових рахунків є:

1. Теплова генерація. У p-n переході теплові флуктуації створюють електрон-діркові пари. Ці носії можуть запустити лавину. Теплова генерація сильно залежить від температури.

2. Тунелювання. При сильному електричному полі носії можуть проходити через заборонену зону (потенціальний бар’єр). Це особливо важливо при високих напругах (наприклад, у SPAD).

3. Дефекти матеріалу: пастки для носіїв заряду, випадкове вивільнення електронів, запуск лавини.

4. Радіаційні та зовнішні впливи: космічні частинки та фонове випромінювання можуть створювати носії заряду.

Типові значення темнових рахунків становлять для SPAD (Si) – від одиниць до тисяч cps, для InGaAs SPAD – зазвичай більші значення, для SNSPD – дуже низькі (іноді < 1 cps). Темнові імпульси знижують точність вимірювань, створюють помилки в даних і особливо критичні при слабких сигналах (одиничні фотони). Наприклад, якщо детектор має темновий рахунок 100 cps, а сигнал дає 200 cps, то значна частина сигналу – це шум і складно відрізнити реальні фотони від хибних подій.

Темнові рахунки зростають із температурою, збільшуються при високій напрузі, залежать від якості матеріалу. Його зменшують шляхом охолодження детектора, використання якісних матеріалів, оптимізації напруги, часового фільтрування сигналів. Темнові рахунки є одним із головних обмежень фотонних детекторів, особливо при роботі з одиничними фотонами. Вони визначають мінімальний рівень шуму системи і суттєво впливають на точність та надійність детектування, особливо у квантових технологіях, де працюють з дуже слабкими сигналами. Тому контроль темнових рахунків є критично важливим для ефективної роботи квантових і оптичних систем.

Темнові відліки визначають, наскільки часто детектор «помиляється», генеруючи сигнал без реального фотона, і тим самим обмежують достовірність реєстрації слабких світлових потоків. Однак для повного опису якості фотодетектування важливо враховувати не лише те, чи відбулася подія, але й коли саме вона була зафіксована. У реальних фотодетекторах момент спрацювання не є строго визначеним – він має певний випадковий розкид. Наприклад, SPAD не реєструє фотон із абсолютно точною часовою прив’язкою. Це підводить до поняття часового джитера – ще однієї фундаментальної характеристики детекторів, яка описує випадкові флуктуації моменту реєстрації фотона відносно його фактичного приходу. Часовий джитер вимірюється в пікосекундах(ps) або наносекундах (ns). На відміну від темнових рахунків, що впливають на статистику кількості відліків, часовий джитер визначає точність часової прив’язки подій і, відповідно, обмежує роздільну здатність у часових

вимірюваннях. Ця характеристика важлива для точного вимірювання часу приходу сигналу і критична для квантових протоколів синхронізації.

Часовий джитер – це випадковий розкид у моменті реєстрації фотона відносно його реального часу приходу, тобто різниця між реальним часом приходу фотона і моментом, коли детектор видає електричний імпульс. Інакше кажучи, один і той самий сигнал може бути зареєстрований у різні моменти часу. Таким чином формується статистичний розподіл часу спрацювання (рис. 9.18).



Рис. 9.18. Часовий джитер у SPAD

Рисунок ілюструє вплив часового джитера на точність визначення моменту реєстрації фотона в однофотонному детекторі. По осі абсцис відкладено час t, а по осі ординат – ймовірність реєстрації події P. В ідеальному випадку момент детекції фотона відповідає строго визначеному часу (показано вертикальною пунктирною лінією). Проте в реальному детекторі через фізичні та електронні флуктуації момент реєстрації має статистичний розподіл. Цей розподіл зображено у вигляді кривої, близької до гаусівської, яка характеризує ймовірність виникнення імпульсу в різні моменти часу відносно ідеального моменту. Область під кривою відповідає всім можливим значенням часу реєстрації. Відхилення виміряного часу від ідеального визначається як часовий

джитер, який кількісно характеризується шириною розподілу. Чим вужчий розподіл, тим менший джитер і тим вища точність детекції.

Позначений на рисунку інтервал відповідає типовій ширині розподілу (наприклад, на рівні половини максимуму), яка використовується для оцінки джитера детектора (FWHM, Full Width at Half Maximum – повна ширина функції на рівні половини її максимального значення). FWHM показує, наскільки «розмазаний» у часі момент реєстрації фотона: малий FWHM – висока точність, великий FWHM – сильний джитер. Для гаусівського розподілу $\mathrm{FWHM} \approx 2.355\sigma$, де σ – стандартне відхилення. Таким чином, рисунок демонструє, що навіть при детекції одного і того ж фотона момент реєстрації є випадковою величиною, а часовий джитер визначає межу точності вимірювання часу приходу фотона. Ця характеристика важлива для точного вимірювання часу приходу сигналу і критична для квантових протоколів синхронізації

Основні джерела джитера: випадковість квантових процесів (момент взаємодії фотона з матеріалом є ймовірнісним); позиція поглинання (фотон може поглинутися в різних точках фотодектора); транспорт носіїв (електрони і дірки рухаються з різними швидкостями, їхні траєкторії можуть відрізнятися); лавинний процес (запуск лавини має випадковий характер, час розвитку лавини змінюється); електроніка (шум у підсилювачах, затримки сигналу). Типові значення джитера складають: SPAD – ~20–200 ps, SNSPD – ~10–50 ps (дуже малий джитер), звичайні фотодіоди – більший джитер. Зменшення джиттера досягається шляхом використання швидких матеріалів, оптимізації структури детектора, покращення електроніки, охолодження (зменшує шум).

Джитер впливає на: точність вимірювань (обмежує визначення часу приходу фотона); швидкість передачі (імпульси можуть перекриватися, знижується максимальна швидкість); синхронізацію (помилки в часових вікнах, що критично важливо для квантових протоколів). Часовий джитер є фундаментальним параметром фотонних детекторів, який характеризує точність визначення моменту реєстрації фотона. Зменшення джитера є ключовим

завданням для розвитку високошвидкісних і високоточних квантових оптичних систем.

Ще однією важливою характеристикою фотодетекторів є мертвий час. Мертвий час – це інтервал часу після реєстрації фотона, протягом якого фотодетектор не здатний зареєструвати наступний фотон. Після того як детектор зафіксував фотон у ньому відбуваються внутрішні процеси і система потребує часу для відновлення початкового стану. У цей період навіть якщо новий фотон потрапить у детектор, він не буде зареєстрований. Мертвий час можна уявити як «період відпочинку» детектора після кожного спрацювання. Типові значення мертвого часу становлять: SPAD – десятки–сотні наносекунд; SNSPD – кілька–десятки наносекунд; звичайні фотодіоди – практично відсутній. Причинами виникнення мертвого часу є: внутрішні фізичні процеси (у лавинних детекторах виникає лавина носіїв і її потрібно зупинити (гасіння), відновлення напруги (після лавини напруга падає, потрібно повернути її до робочого рівня), електронні обмеження (час реакції схем, обробка сигналу).

Мертвий час приводить до таких наслідків як втрата сигналів (фотони, що приходять під час мертвого часу, не реєструються, обмеження швидкодії (максимальна частота детекції обмежена), нелінійність (при високих потоках детектор «насичується» і вимірювання стають неточними). Наприклад, якщо мертвий час = 100 нс, а фотони приходять кожні 50 нс, то кожен другий фотон буде втрачений і детектор покаже занижений сигнал.

Максимальна частота реєстрації f_{max} визначається як

$$f_{max} \approx \frac{1}{\tau_{\text{мертв.}}}, \tag{9.11}$$

де $\tau_{\text{мертв.}}$ – мертвий час. Для зменшення мертвого часу використовують швидкі схеми гасіння, оптимізацію матеріалів, покращення електроніки, масиви детекторів (паралельна робота). Мертвий час – це фундаментальне обмеження фотодетектора, яке визначає його здатність працювати з високою швидкістю сигналів. Він виникає через необхідність відновлення детектора після кожного спрацювання і призводить до втрати частини подій, особливо при високих

інтенсивностях світла. Повністю усунути мертвий час неможливо, але його можна суттєво мінімізувати або компенсувати на рівні конструкції, електроніки та режиму роботи. Для цього використовують такі заходи як зменшення напруги зміщення (для APD), робота в оптимальному режимі, використання швидких схем гасіння, оптимізація електроніки, охолодження детектора. Мертвий час є одним із основних факторів, які визначають ефективність фотонних детекторів у квантових і оптичних системах.

У реальних фотодетекторах існує ще один специфічний ефект, який поєднує в собі як часові, так і статистичні аспекти шуму, – це післяімпульсування (afterpulsing). На відміну від темнових рахунків, що виникають незалежно від попередніх подій, післяімпульси мають корельований характер: вони є наслідком попереднього акту детектування і виникають із певною затримкою після нього. Таким чином, їх поява безпосередньо пов’язана з процесами, що відбуваються під час лавинного множення та відновлення детектора після мертвого часу.

Цей ефект є особливо критичним в однофотонних детекторах (SPAD), де після реєстрації фотона можуть виникати додаткові імпульси, які не пов’язані з новими фотонами. Afterpulsing або ефект післяімпульсів і є одним із ключових паразитних ефектів, що обмежують точність детектування. ***Післяімпульси –*** це поява додаткових імпульсів у фотодетекторі після основного сигналу, які виникають без нових фотонів, але пов’язані з попереднім спрацюванням. Фізичний механізм виникнення ефекту післяімпульсів наступний. Під час лавини в p-n переході утворюється велика кількість носіїв заряду. Частина з них потрапляє у пастки (дефекти кристалу), де вони тимчасово «захоплюються». Через деякий час вони вивільняються і можуть знову запустити лавину. Імпульси з’являються із затримкою після основного сигналу (рис. 9.19).

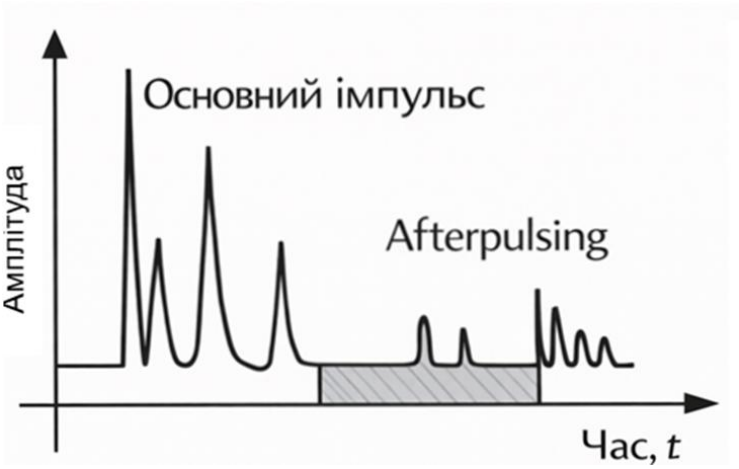


Рис. 9.19. Ефект післяімпульсу у SPAD

Рисунок показує виникнення післяімпульсів у лавинному фотодетекторі. Після основного імпульсу, спричиненого детекцією фотона, з затримкою у часі можуть виникати додаткові імпульси, обумовлені вивільненням захоплених носіїв заряду. Заштрихована область відповідає інтервалу підвищеної ймовірності afterpulsing. Ймовірність afterpulsing залежить від попередніх подій. Тобто, це корельований шум (на відміну від темнових рахунків). Фактори, що впливають на afterpulsing: кількість носіїв у лавині (чим більша лавина, тим більше захоплених носіїв); якість матеріалу (більше дефектів – більше пасток); температура (впливає на час вивільнення носіїв); час відновлення (мертвий час): чим коротше мертвий час,тим більший afterpulsing. Afterpulsing призводить до хибних спрацьовувань; спотворення статистики сигналу; зниження точності вимірювань; помилок у квантових протоколах. Для зменшення afterpulsing застосовують збільшення мертвого часу; охолодження детектора; використання якісних матеріалів; оптимізацію напруги; вдосконалення схем гасіння лавини. Afterpulsing є важливим паразитним ефектом у лавинних фотодетекторах, який виникає через затримане вивільнення носіїв заряду з дефектів матеріалу. Через це контроль afterpulsing є важливою умовою ефективної роботи однофотонних детекторів у квантових технологіях.

Загалом якість детектування визначається відношенням сигнал/шум SNR (Signal-to-Noise Ratio):

$$SNR = \frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}. \tag{9.12}$$

Воно показує наскільки сильний корисний сигнал порівняно з шумом. Математично

$$SNR = \frac{\text{потужність сигналу}}{\text{потужність шуму}}. \tag{9.13}$$

Великий SNR забезпечує надійне детектування. При малому SNR сигнал губиться у шумі. У квантових системах часто працюють на межі SNR ≈ 1. Тому навіть невеликий шум критичний. SNR) – це основна величина, яка показує, наскільки добре сигнал відрізняється від шуму, і визначає якість будь-якого вимірювання.

У фотонних і квантових вимірюваннях існує принципове обмеження: навіть ідеальний детектор не може забезпечити довільно високу точність. Це пов’язано не з технічними недоліками, а з самою природою квантових процесів. Такі обмеження називаються фундаментальними квантовими обмеженнями, і вони не можуть бути усунені технічними засобами. Це означає, що існує межа точності вимірювань. Вона визначається самою природою світла.

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо декілька прикладів.

1. Темнові рахунки в SPAD. У темряві детектор все одно видає імпульси і їх можна помилково прийняти за фотони. У квантовій криптографії це призводить до помилок у ключі.

2. Вплив мертвого часу. Якщо фотони приходять дуже часто, то детектор не встигає відновлюватися і частина сигналів не реєструється. Це обмежує швидкість передачі інформації.

3. Шум і хибні спрацьовування. Навіть у повній темряві детектор може видавати сигнали. Це як «шум у радіо»: сигнал є, але він не несе інформації і потрібно відрізняти його від справжніх фотонів.

4. Вплив температури. Якщо детектор нагрівається, шум різко зростає, ефективність падає, точність погіршується.

Таким чином, шум і обмеження є невід'ємною частиною процесу фотодетектування. Вони визначають реальні можливості будь-якої детекторної системи. Розуміння цих факторів є критично важливим для проєктування фотодетекторів, оптимізації квантових систем і забезпечення надійності передачі інформації.

9.5. Методи детектування квадратур поля та порівняння технологій

Після детального аналізу процесів фотодетектування, а також шумових характеристик і обмежень реальних детекторів, стає очевидним, що для повного відновлення інформації про квантовий стан світла недостатньо реєструвати лише інтенсивність або окремі фотонні події. Багато важливих характеристик поля, зокрема фазова інформація та когерентні властивості, залишаються недоступними при прямому фотолічильному детектуванні. Це особливо критично в задачах квантової оптики та квантових комунікацій, де саме структура квантового стану, а не лише кількість фотонів, несе основну інформацію. У зв'язку з цим виникає необхідність переходу до більш загального підходу, заснованого на вимірюванні квадратур електромагнітного поля, які є квантовими аналогами амплітуди та фази. Такий підхід дозволяє отримати повнішу інформацію про стан системи, включаючи можливість реконструкції функції Вігнера та аналізу некласичних властивостей світла. Реалізація цих вимірювань потребує спеціалізованих методів. У цьому контексті особливого значення набувають два базові методи – гомодинне та гетеродинне детектування. Перший із них ґрунтується на інтерференції сигналу з локальним осцилятором тієї ж частоти, що дає змогу вибірково вимірювати окрему квадратуру поля з високою точністю. Другий передбачає використання локального осцилятора зі зсунутою частотою, що дозволяє одночасно отримувати інформацію про обидві квадратури, хоча й ціною додаткових шумів. Таким чином, перехід до детального розгляду гомодинного та гетеродинного детектування є природним

кроком, який конкретизує загальні принципи вимірювання квадратур і відкриває шлях до їх практичної реалізації та порівняльного аналізу.

Розглянуті вище методи детектування базуються на підрахунку фотонів, тобто на реєстрації окремих квантових подій. Такий підхід є природним для дискретних квантових станів. Проте існує інший клас квантових систем, у яких інформація кодується не в кількості фотонів, а в неперервних параметрах електромагнітного поля. Для таких задач застосовуються когерентні методи детектування, серед яких ключове місце займає гомодинне детектування. Воно дозволяє вимірювати так звані квадратури поля – величини, які є квантовими аналогами амплітуди та фази хвилі. Цей підхід широко використовується в сучасних квантових технологіях, зокрема в системах безперервних змінних квантової криптографії. Щоб зрозуміти принцип гомодинного детектування, необхідно послідовно розглянути: як описується електромагнітне поле в квантовій оптиці; що таке квадратури поля; як можна їх виміряти експериментально; яку роль відіграє локальний осцилятор; як працює балансована схема детектування. Це дозволить побачити, як замість підрахунку фотонів можна вимірювати структуру самого поля.

У квантовій оптиці електромагнітне поле описується через оператори: $\hat{a}$ – знищення фотона і $\hat{a}^\dagger$ – народження фотона. З цих операторів вводяться дві важливі величини – квадратури поля:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right), \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(a - a^\dagger\right), \tag{9.14}$$

де X – амплітудна квадратура; P – фазова квадратура. Квадратури можна уявити як координати точки в фазовому просторі, як аналог координати і імпульсу в квантовій механіці. Згідно з принципом невизначеності X і P не можуть бути одночасно точно визначені. Ідея гомодинного детектування полягає у наступному. У квантовій оптиці часто потрібно вимірювати не лише інтенсивність світла, а й його фазові властивості. Для цього використовуються спеціальні методи, одним із яких є гомодинне детектування. Цей метод дозволяє вимірювати квадратури електромагнітного поля, тобто амплітудні та фазові

компоненти світлової хвилі. Через дуже слабкий сигнал безпосередньо виміряти квадратури складно. Для цього застосовують гомодинне детектування.

Гомодинне детектування базується на інтерференції слабкого сигналу з сильним опорним полем. Основний елемент – це сильне лазерне поле, яке називається локальний осцилятор (LO). Локальний осцилятор – це потужне когерентне лазерне поле з відомою фазою та амплітудою. Його роль: «підсилити» слабкий сигнал і дозволити виміряти його фазові властивості. Принцип інтерференції такий: слабкий сигнал і LO подаються на змішувач (зазвичай дільник променя), відбувається інтерференція. Результат інтерференції залежить від різниці фаз і містить інформацію про квадратури сигналу.

У сучасних системах використовують балансоване гомодинне детектування. Схема включає світлорозділювач (50/50), два фотодетектори і електронну схему віднімання сигналів. Принцип роботи наступний: сигнал і LO подаються на дільник променя; на виході утворюються дві інтерферуючі хвилі; інтенсивність кожної реєструється окремим детектором; обчислюється різниця струмів: $I_{diff} = I_1 - I_2$. Принцип роботи гомодинного детектування зображено на рис. 9.20.

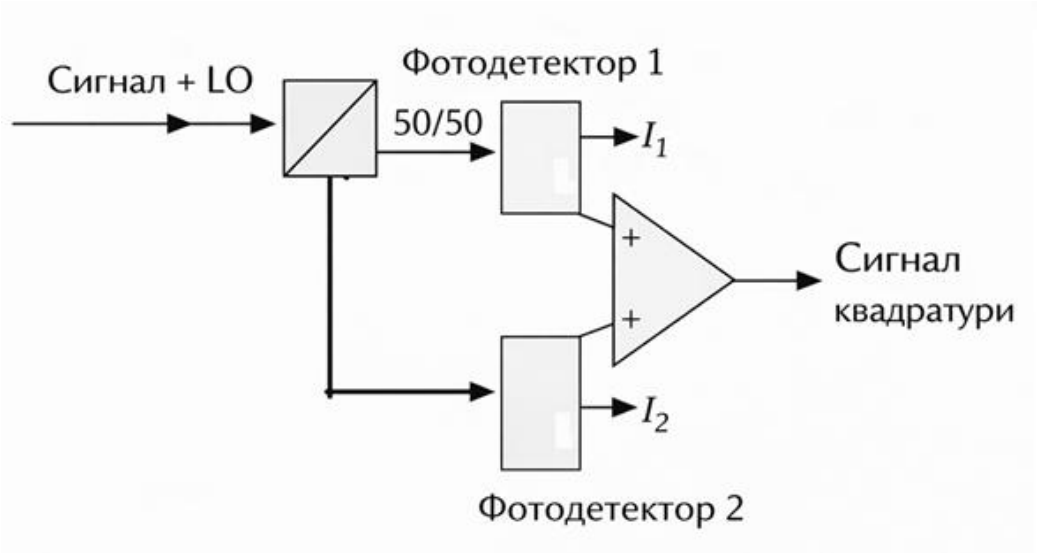


Рис. 9.20. Схема гомодинного детектування квадратур поля

Як видно, різницевий сигнал $I_{різн.} = I_1 - I_2$ містить інформацію про квадратуру поля. Балансування означає, що обидва детектори отримують

однаковий LO, спільний шум компенсується, залишається тільки корисний сигнал. Різницевий сигнал пропорційний одній із квадратур поля, залежить від фази локального осцилятора і дозволяє вимірювати квантові флуктуації. Фаза локального осцилятора визначає, що саме вимірюється: фаза = 0 – вимірюється амплітудна квадратура; X, фаза = π/2 – вимірюється фазова квадратура P. Таким чином можна «обертати» систему координат і досліджувати повний квантовий стан. Переваги гомодинного детектування: висока чутливість, можливість вимірювання фазової інформації, можливість досягнення квантових меж, придатність для безперервних змінних, точне вимірювання слабких сигналів, відсутність необхідності рахувати фотони. Обмеження: потреба у стабільному локальному осциляторі, чутливість до фазових шумів, складність реалізації, квантові обмеження точності.

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо декілька прикладів.

1. Вимірювання слабкого сигналу. Слабке поле саме по собі важко виміряти. Після змішування з локальним осцилятором сигнал підсилюється і квадратура стає доступною для вимірювання.

2. Квантова криптографія. У системах із безперервними змінними інформація кодується в квадратурах і гомодинне детектування дозволяє її зчитати.

3. Вакуумний стан. Якщо сигнал відсутній, детектор все одно показує шум. Але це не технічний шум, а квантові флуктуації.

Гомодинне детектування є фундаментальним методом вимірювання квантових властивостей світла, який дозволяє перейти від дискретного підрахунку фотонів до аналізу структури електромагнітного поля. Використання локального осцилятора з тією ж частотою, що й досліджуваний сигнал, дозволяє вибірково вимірювати одну з квадратур електромагнітного поля з високою точністю. Такий підхід є надзвичайно ефективним для задач, де важливо детально дослідити певну компоненту квантового стану, наприклад, при томографії станів світла або аналізі стислих станів. Водночас принципова особливість гомодинного методу полягає в тому, що за один акт вимірювання

доступна лише одна квадратура. Однак у багатьох задачах квантової оптики та оптичних комунікацій часто необхідно вимірювати не лише інтенсивність світла, а й його частоту та фазу. Саме для цього використовується гетеродинне детектування – метод, який дозволяє одночасно отримати інформацію про обидві квадратури поля, хоча й із певними фундаментальними обмеженнями. Цей підхід широко застосовується як у класичній радіофізиці, так і в квантовій оптиці, де він відіграє важливу роль у системах неперервних змінних.

Гетеродинне детектування базується на змішуванні слабкого квантового сигналу і сильного локального осцилятора, але з однією ключовою відмінністю: локальний осцилятор має іншу частоту. Це призводить до виникнення биття (beat signal) – сигналу на різницевій частоті (рис. 9.21).

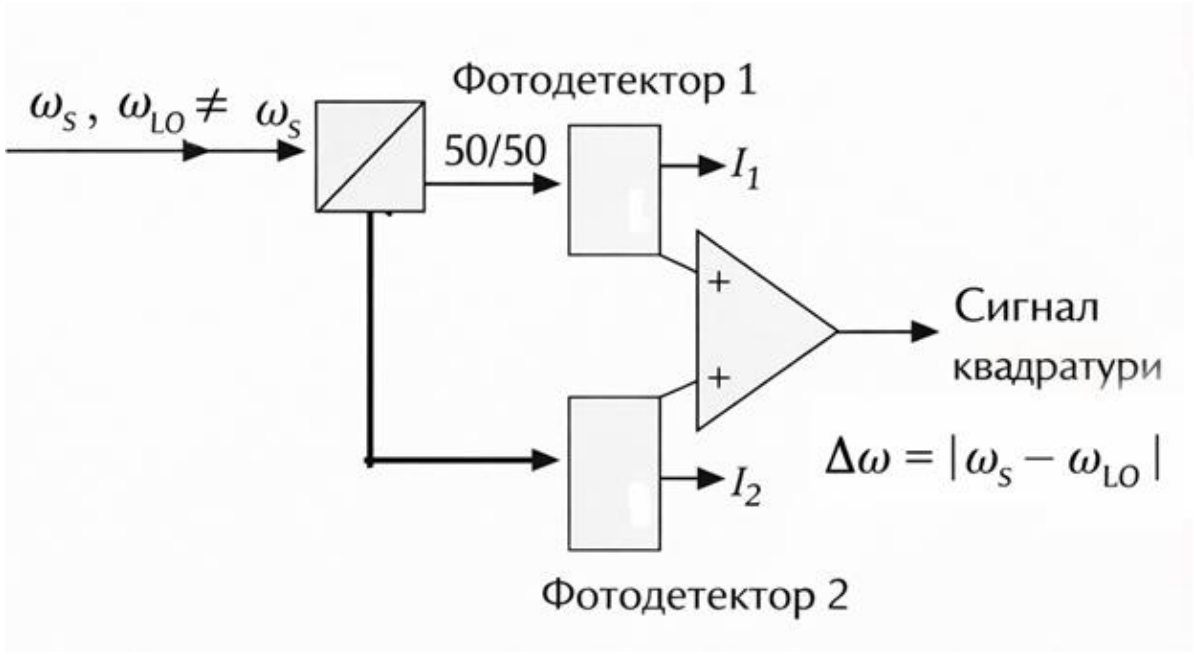


Рис. 9.21. Принцип гетеродинного детектування

Нехай сигнал має частоту ω_s, а локальний осцилятор – ω_{lO}. Після інтерференції виникають компоненти: на сумарній частоті $\omega_s + \omega_{lO}$; на різницевій частоті $\omega_s - \omega_{lO}$. Саме різницева частота лежить у зручному діапазоні і використовується для вимірювання. Основна відмінність від гомодинного детектування полягає в тому, що в гомодинному детектуванні $\omega_{lO} = \omega_s$, а в гетеродинному $\omega_{lO} \neq \omega_s$. Саме ця різниця частот є визначальною. Тому, на

відміну від гомодинного детектування тут сигнал «переноситься» на іншу частоту, а інформація кодується в амплітуді та фазі биття. Це дозволяє одночасно отримати інформацію про обидві квадратури і уникнути необхідності стабілізації фази до нуля або π/2. При накладанні двох хвиль виникають биття і інтенсивність змінюється з частотою:

$$\Delta\omega = \mid \omega_s - \omega_{lO} \mid. \qquad (9.15)$$

Гетеродинне детектування дозволяє визначити амплітуду, фазу і частоту сигналу. Це дає більше інформації, ніж пряме детектування. Локальний осцилятор LO задає опорну частоту, переводить сигнал у нижчу частоту (проміжну), полегшує обробку сигналу.

У квантовому описі вимірюється комплексна амплітуда поля яка містить і X, і P. Однак точність обмежена і з'являється додатковий шум. Згідно з принципом невизначеності неможливо одночасно точно виміряти X і P. Гетеродинне детектування обходить це обмеження частково, але ціною додаткового шуму. Цей шум еквівалентний додаванню вакуумних флуктуацій і є фундаментальним.

Типова схема гетеродинного детектування включає: світлорозділювач; локальний осцилятор зі зсувом частоти; фотодетектори; електронну обробку сигналу. У результаті сигнал демодулюється і виділяються компоненти, пов'язані з квадратурами. Переваги гетеродитнного методу: одночасне вимірювання обох квадратур, менші вимоги до стабілізації фази, можливість спектрального аналізу, зручність електронної обробки сигналу. Недоліки: додатковий квантовий шум, складніша електроніка, чутливість до стабільності LO, нижча точність для окремої квадратури. Гетеродинне детектування є потужним методом аналізу квантових станів світла, який дозволяє одночасно отримати інформацію про обидві квадратури електромагнітного поля. Метод базується на змішуванні сигналу з локальним осцилятором іншої частоти. Інформація переноситься на різницеву частоту і можна вимірювати обидві квадратури одночасно, але це супроводжується додатковим квантовим шумом. Тому існує компроміс між повнотою інформації та точністю.

Гомодинне та гетеродинне детектування є двома базовими методами вимірювання квадратур електромагнітного поля, які ґрунтуються на інтерференції сигналу з локальним осцилятором, але реалізують цей принцип по-різному і мають різні фізичні та експлуатаційні характеристики. У гомодинному детектуванні локальний осцилятор має ту ж частоту, що й досліджуваний сигнал. Завдяки цьому після інтерференції на фотодетекторі формується сигнал, пропорційний одній вибраній квадратурі поля. Вибір конкретної квадратури визначається фазою локального осцилятора ϕ, і вимірювана величина має вигляд

$$\hat{X}_{\phi} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}e^{-i\phi} + \hat{a}^{\dagger}\ e^{i\phi}\right), \tag{9.16}$$

де $\hat{a}$ і $\hat{a}^{\dagger}$ – оператори знищення та народження фотонів. Це означає, що гомодинне детектування дозволяє дуже точно вимірювати одну квадратуру, змінюючи фазу ϕ, але не дає змоги одночасно отримати інформацію про обидві квадратури.

Натомість у гетеродинному детектуванні локальний осцилятор має частоту, відмінну від частоти сигналу на величину $\Delta\omega$. У результаті інтерференції виникає биттєвий сигнал на проміжній частоті, який містить інформацію про обидві квадратури поля. Фактично гетеродинне детектування еквівалентне одночасному вимірюванню двох взаємно спряжених змінних, що забезпечує повну амплітудно-фазову інформацію про поле. Однак це супроводжується додатковим шумом, який має квантову природу і часто інтерпретується як внесок вакуумних флуктуацій.

З точки зору шумових характеристик гомодинне детектування є більш точним, оскільки дозволяє досягати межі квантового шуму без додаткових внесків. Гетеродинне детектування, навпаки, має додатковий шумовий внесок, що еквівалентний приблизно подвоєнню вакуумного шуму, і тому є менш точним при вимірюванні слабких сигналів. Проте його перевага полягає в універсальності: воно не потребує точного фазового узгодження і дозволяє одночасно відновити повний комплексний амплітудний сигнал.

З експериментальної точки зору гомодинне детектування вимагає високої фазової стабільності між сигналом і локальним осцилятором, що ускладнює реалізацію, особливо в довгих оптичних лініях або нестабільних умовах. Гетеродинне детектування є більш стійким до фазових флуктуацій, оскільки інформація переноситься на проміжну частоту, де її легше обробляти електронними засобами.

Якщо порівнювати ці методи з точки зору застосувань, то гомодинне детектування є незамінним у задачах квантової томографії, дослідження стислих станів і експериментів, де критично важлива мінімізація шумів. Гетеродинне детектування широко використовується в телекомунікаціях і радіофізиці, де важлива повна інформація про сигнал і допускається певний рівень шуму.

Отже, гомодинне та гетеродинне детектування не є взаємовиключними, а скоріше взаємодоповнюючими підходами. Перший забезпечує максимальну точність вимірювання окремої квадратури, тоді як другий дає повнішу інформацію про стан поля ціною додаткового шуму. Вибір між ними визначається конкретними вимогами до точності, швидкодії та типу інформації, яку необхідно отримати.

Для кращого розуміння наведемо приклади.

1. Радіочастотна аналогія. У радіоприймачах сигнал змішується з локальним генератором, переноситься на проміжну частоту і обробляється. Гетеродинне детектування працює аналогічно, але для квантового світла.

2. Квантова комунікація. У системах неперервних змінних інформація закодована в обох квадратурах і гетеродинне детектування дозволяє отримати повний сигнал.

3. Додатковий шум. Порівняно з гомодинним методом результати гетеродинного детектування мають більші флуктуації, але це фундаментальна ціна універсальності.

Гомодинне та гетеродинне детектування є основними методами вимірювання квадратур електромагнітного поля. Ці методи дозволяють отримати не лише інтенсивність світла, а повну амплітудно-фазову інформацію

про квантовий стан. Дані методи показують, що вибір схеми детектування безпосередньо визначає, яку саме інформацію про поле можна відновити, з якою точністю це робиться і якими є основні джерела шумів. Кожен із цих підходів базується на різних фізичних принципах і має свої переваги та обмеження. Зокрема, гомодинне детектування забезпечує мінімальний рівень шуму при вимірюванні окремої квадратури, тоді як гетеродинне – більшу універсальність ціною додаткових квантових флуктуацій. Водночас ці підходи є лише частиною ширшого спектра технологій фотодетектування, який включає як фотолічильні методи, так і високочутливі надпровідникові сенсори, лавинні фотодіоди та інші типи детекторів.

У практичних задачах квантової передачі інформації виникає важливе питання: який тип детектора є найкращим для конкретного застосування? Відповідь на це питання залежить від багатьох факторів – від чутливості й шуму до швидкодії та складності реалізації. Для системного порівняння технологій детектування необхідно: визначити ключові параметри, за якими оцінюються детектори; проаналізувати основні типи детекторів; порівняти їх характеристики; розглянути типові області застосування. Це дозволить сформувати цілісне уявлення про сильні та слабкі сторони кожного підходу. Щоб об’єктивно порівнювати детектори, використовують такі характеристики: квантова ефективність – ймовірність реєстрації фотона; темновий рахунок – кількість хибних імпульсів; часовий джитер – точність визначення моменту детекції; мертвий час – час відновлення; швидкодія – максимальна частота подій; спектральний діапазон; складність і вартість системи. Порівняємо за цими критеріями різні типи детекторів.

1. Напівпровідникові лавинні детектори (APD, SPAD). Ці детектори базуються на лавинному пробої в p-n переході. Переваги: компактність; відносна дешевизна; робота при помірних температурах; можливість детекції одиничних фотонів (SPAD). Недоліки: темнові рахунки; afterpulsing; обмежена ефективність у деяких діапазонах; мертвий час.

2. Надпровідникові детектори (SNSPD). Переваги: дуже висока квантова ефективність; надзвичайно низький шум; малий джитер; висока швидкодія; широкий спектральний діапазон. Недоліки: необхідність кріогенного охолодження; висока вартість; складність експлуатації.

3. Гомодинне детектування. Це метод вимірювання квадратур поля. Переваги: висока точність для однієї квадратури; можливість роботи з безперервними змінними; відсутність необхідності рахувати фотони. Недоліки: вимірюється лише одна квадратура; потреба стабільного локального осцилятора; чутливість до фазових шумів.

4. Гетеродинне детектування. Це розширення гомодинного методу. Переваги: одночасне вимірювання двох квадратур; більша універсальність. Недоліки: додатковий квантовий шум; нижча точність; складніша схема.

Якщо порівнювати різні технології детектування за характеристиками, то приходимо до таких висновків:

1. За чутливістю: найвища – SNSPD, висока – SPAD, середня – гомодинні методи.

2. За шумом: найменший – SNSPD, більший – SPAD, фундаментальний – у когерентних методах.

3. За швидкодією: SNSPD – дуже висока, SPAD – обмежена мертвим часом, гомодинні – дуже висока.

4. За складністю: найпростіші – напівпровідникові, найскладніші – надпровідникові.

Вибір технології здійснюють залежно від задач, які потрібно вирішити.

1. Квантова криптографія (дискретні змінні): використовуються SPAD або SNSPD. SNSPD дають кращу точність і дальність.

2. Незперервні змінні (CV-QKD): використовуються гомодинні або гетеродинні методи.

3. Квантова оптика та експерименти: SNSPD для високої точності, гомодинне детектування для аналізу станів.

Жодна технологія не є універсальною. Вибір завжди є компромісом між чутливістю, шумом, швидкодією і складністю.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Оптоволоконна квантова мережа. Для довгих відстаней потрібен мінімальний шум, тому використовуються SNSPD.

2. Компактна система. Для портативних пристроїв важлива простота. Отже, використовуються SPAD.

3. Аналіз квантового стану. Для вимірювання квадратур застосовується гомодинне детектування.

4. Повний опис сигналу. Коли потрібно знати і фазу, і амплітуду використовується гетеродинний метод.

Порівняння технологій детектування показує, що кожен підхід має свої унікальні переваги та обмеження, які визначають його застосовність у конкретних задачах. Напівпровідникові детектори є доступними і широко використовуваними. Надпровідникові детектори забезпечують найкращі характеристики, але є складними. Когерентні методи відкривають можливість роботи з безперервними змінними. Вибір технології залежить від конкретних вимог системи. Таким чином, ефективне використання фотонних детекторів у квантових технологіях потребує не лише розуміння їх фізики, але й уміння правильно обрати оптимальний інструмент для конкретної задачі.

9.6. Застосування фотодетекторів в квантовій передачі інформації

Вище було детально розглянуто фізичні принципи детектування фотонів, різні типи детекторів і фундаментальні квантові обмеження. Однак справжнє значення цих знань розкривається тоді, коли вони застосовуються в реальних системах, зокрема у квантовій передачі інформації. У таких системах фотони виступають носіями інформації, а детектори – основними елементами, що забезпечують її зчитування. Саме якість детектування визначає точність передачі, швидкість обміну даними і рівень безпеки. Особливо важливу роль це відіграє в таких напрямках, як квантова криптографія, квантові мережі та

квантова оптика. Щоб зрозуміти роль фотодетекторів у квантовій передачі інформації, необхідно розглянути: як інформація кодується у фотонах; які протоколи використовуються; які вимоги ставляться до детекторів; як різні технології детектування застосовуються на практиці; які обмеження впливають на реальні системи. Це дозволить побачити, як фундаментальні фізичні процеси реалізуються в сучасних інформаційних технологіях.

У квантових системах інформація може бути закодована в різних параметрах фотона, таких як: поляризація; фаза; час приходу; квадратури поля. Це визначає два основні підходи:

1. Дискретні змінні (DV – Discrete Variables) – інформація закодована у вигляді окремих станів. Це змінні, які приймають окремі (дискретні) значення, а не неперервні. DV-підхід означає, що інформація кодується в кількості фотонів, поляризації, окремих квантових станах Приклади DV: 0 фотонів / 1 фотон; горизонтальна / вертикальна поляризація; квантові біти (кубіти). Переваги DV: висока стійкість до шуму, природна квантова дискретність; високий рівень безпеки; простота інтерпретації; чітке визначення станів. Недоліки: складність генерації одиничних фотонів; обмежена швидкість передачі; втрати у каналі; вимоги до детекторів; чутливість до ефективності детекції.

2. Неперервні змінні (CV – Continuous Variables) – інформація закодована в амплітуді та фазі. Неперервні змінні – це величини, які можуть приймати будь-які значення з певного інтервалу (а не лише окремі, як у DV). У CV-підході інформація кодується в квадратурах електромагнітного поля X і P; амплітуді світла; фазі світлового сигналу. На відміну від DV (0 або 1 фотон), тут сигнал змінюється плавно, вимірюється аналогова величина, використовується гомодинне або гетеродинне детектування.Переваги CV: висока швидкість передачі інформації; використання стандартної оптичної техніки; ефективне детектування (гомодинне/гетеродинне). Обмеження: чутливість до шуму; квантові обмеження (шот-шум); складність відновлення стану.

Фотодетектори у квантових системах виконують такі функції: перетворення квантового сигналу в класичний; реєстрація подій; забезпечення

вимірювання станів. Їхні характеристики безпосередньо впливають на точність передачі, рівень помилок і швидкість роботи системи. Найважливіше застосування – це квантовий розподіл ключів(QKD). Протокол BB84: інформація передається одиничними фотонами; стан фотона визначає біт; детектор реєструє результат вимірювання. Вимоги до детектора висока ефективність; низький темновий рахунок; точна синхронізація. При використанні підходу неперервні змінні (CV-QKD) інформація кодується в квадратурах поля, використовується гомодинне або гетеродинне детектування. Особливості: не потрібні однофотонні детектори; важлива стабільність і точність вимірювань.

Характеристики детекторів впливають на такі параметри квантової передачі, як: квантова ефективність визначає втрати інформації (низька ефективність – більше помилок); темнові рахунки створюють хибні біти і знижують безпеку; джитер впливає на часову точність, важливий для синхронізації; мертвий час обмежує швидкість передачі і викликає втрати при високих потоках.

Для різних протоколів використовуються різні детектори:

1. Дискретні змінні (DV): використовуються SPAD або SNSPD. Але SNSPD дають кращу продуктивність.

2. Неперервні змінні (CV): використовуються гомодинні схеми, важлива стабільність локального осцилятора.

Реальні квантові мережі використовують оптоволокно; працюють на довжинах хвиль ~1550 нм; застосовують InGaAs SPAD або SNSPD. Основні виклики: втрати сигналу; шум; стабільність системи.

Розглянемо застосування фотодетекторів на конретних прикладах.

1. QKD-система на основі SPAD. Передаються одиничні фотони, детектор їх реєструє, формується секретний ключ. Проблема: темнові рахунки спричиняють помилки.

2. Використання SNSPD. У довгих каналах сигнал дуже слабкий. SNSPD забезпечують високу ефективність і зменшують помилки.

3. CV-QKD. Інформація закодована в квадратурах. Використовується гомодинне детектування, вимірюється амплітуда і фаза.

4. Вплив шуму. Якщо шум великий важко відрізнити сигнал, знижується швидкість передачі, погіршується безпека.

Фотодетектори є ключовим елементом систем квантової передачі інформації, оскільки саме вони забезпечують перехід від квантового сигналу до класичного результату. Інформація може бути закодована в різних параметрах фотонів. Різні протоколи вимагають різних типів детекторів, а характеристики детекторів безпосередньо впливають на точність і безпеку. Сучасні технології дозволяють реалізовувати реальні квантові мережі. Таким чином, ефективне використання фотодетекторів є визначальним фактором успіху квантових інформаційних систем і розвитку квантових комунікацій.

РОЗДІЛ 10. ПРИНЦИПИ РЕАЛІЗАЦІЇ КВАНТОВОЇ ПАМ'ЯТІ ТА ІНТЕРФЕЙСІВ

10.1. Когерентна взаємодія світла з резонансним середовищем

Світло є універсальним носієм інформації у квантових комунікаціях. Саме фотони найчастіше використовуються для передачі квантових станів на великі відстані. Проте для обробки, зберігання та перетворення цієї інформації необхідно, щоб світло ефективно взаємодіяло з матеріальним середовищем – атомами, іонами або твердотільними структурами.

Взаємодія світла з речовиною лежить в основі таких ключових явищ, як поглинання, випромінювання, дисперсія та когерентні ефекти. У контексті квантової пам'яті особливого значення набуває когерентна взаємодія світла з резонансним середовищем, оскільки саме вона лежить в основі більшості квантових технологій, пов'язаних із керуванням станами випромінювання та речовини і забезпечує перетворення квантового стану фотона у стан матеріальної системи.

У класичній електродинаміці взаємодія світла з матерією описується переважно через поглинання, розсіяння та заломлення електромагнітних хвиль. Проте у квантовій області ситуація суттєво ускладнюється, адже і світло, і речовина мають хвильово-корпускулярну природу, а процеси взаємодії супроводжуються виникненням квантової когерентності, суперпозиції та заплутаності. Особливого значення набувають випадки, коли частота світла близька до власної резонансної частоти атомної або молекулярної системи. За таких умов навіть слабке електромагнітне поле може ефективно керувати квантовими станами середовища, викликаючи колективні та нелінійні ефекти.

У контексті взаємодії світла з речовиною під когерентністю розуміють наявність фіксованого фазового зв'язку між квантовими станами системи. Якщо атом перебуває у суперпозиції двох енергетичних рівнів

$$|\psi\rangle = c_g\,|g\rangle + c_e\,|e\rangle, \qquad (10.1)$$

де $|g\rangle$ – основний стан атома; $|e\rangle$ – збуджений стан; c_g, c_e – комплексні амплітуди ймовірностей, то коефіцієнти c_g і c_e містять інформацію не лише про ймовірності перебування системи в основному $|g\rangle$ та збудженому $|e\rangle$ станах, але й про їх відносну фазу. Саме ця фаза визначає інтерференційні властивості системи та можливість когерентного керування переходами. Квадрати модулів коефіцієнтів c_g і c_e задають ймовірності, причому

$$|c_g|^2+|c_e|^2=1. \tag{10.2}$$

Для опису взаємодії світла з атомом зазвичай використовують модель двохрівневої системи. Хоча реальні атоми мають багато енергетичних рівнів, саме двохрівневе наближення дозволяє виділити основні фізичні механізми. У дворівневій системі атом має основний стан $|g\rangle$ і збуджений стан $|e\rangle$. Перехід між ними відбувається при поглинанні або випромінюванні фотона з енергією: $E=\hbar\omega_0$ (рис2.1). Ця модель є фундаментальною для опису взаємодії світла з атомом.

Гамільтоніан атома має вигляд:

$$\hat{H}_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z, \tag{10.3}$$

де $\hbar$ – приведена стала Планка; ω_0 – резонансна частота переходу; $\hat{\sigma}_z$ – матриця Паулі. Електромагнітне поле описується хвилею:

$$E(t)=E_0cos(\omega t), \tag{10.4}$$

де E_0 – амплітуда поля; ω – частота зовнішнього випромінювання. Взаємодія атома з полем описується дипольним гамільтоніаном:

$$\hat{H}_{\text{вз.}}=-\hat{d}E(t), \tag{10.5}$$

де $\hat{d}$ – оператор дипольного моменту. Повний гамільтоніан системи:

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{\text{вз.}}. \tag{10.6}$$

Саме цей вираз визначає динаміку квантового стану атома під дією світла. Якщо частота поля близька до резонансної $\omega\approx\omega_0$, виникає резонансне поглинання (рис.10.2), при якому ефективність взаємодії різко зростає. Якщо частота світла відрізняється від резонансої відбувається нерезонансна взаємодія.

У цьому випадку взаємодія набагато слабша, можливі ефекти зсуву енергетичних рівнів (ефект Штарка).

Однак для реального аналізу динаміки необхідно враховувати часову еволюцію квантового стану. Вона задається рівнянням Шредінгера:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mid \psi(t)\rangle = \widehat{H} \mid \psi(t)\rangle. \tag{10.7}$$

Розв'язок цього рівняння приводить до одного з найважливіших явищ квантової оптики – осциляцій Рабі. Якщо система спочатку перебуває в основному стані, то під дією резонансного поля ймовірність $P_e(t)$ переходу системи в збуджений стан осцилює за законом

$$P_e(t) = sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \tag{10.8}$$

де $P_e(t)$ – ймовірність знайти атом у збудженому стані; Ω_R – частота Рабі:

$$\Omega_R = \frac{dE_0}{\hbar}. \tag{10.9}$$

Осциляції Рабі демонструють, що взаємодія атома зі світлом може мати когерентний, тобто узгоджений у фазі характер. У цьому процесі квантова система періодично переходить між станами, зберігаючи визначене фазове співвідношення між ними. Саме завдяки цій узгодженості можливий оборотний обмін енергією між атомом і електромагнітним полем. Проте така поведінка зберігається лише за умови, що система не втрачає фазової інформації внаслідок взаємодії з оточенням. Це підводить до ключового поняття квантової фізики – когерентності, яка визначає здатність системи підтримувати сталі фазові зв'язки між станами і, відповідно, можливість спостереження інтерференційних ефектів. Таким чином, взаємодія являє собою когерентний обмін енергією між світлом і речовиною (рис.10.2). Когерентність є фундаментальною передумовою для керованої взаємодії світла з квантовими системами, оскільки саме вона забезпечує збереження фазових зв'язків між можливими станами системи і визначає ефективність квантових систем.

Якщо перейти до опису системи через матрицю густини:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

де ρ_{gg} – заселення основного стану; ρ_{ee} – заселення збудженого стану; ρ_{ge}, ρ_{eg} – когерентності між рівнями, то еволюція матриці густини описується рівнянням Ліувілля:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho]. \tag{10.11}$$

Саме недіагональні елементи матриці густини відповідають за когерентність системи. Якщо вони зникають, система втрачає фазову узгодженість і виникає декогеренція (рис.10.2).

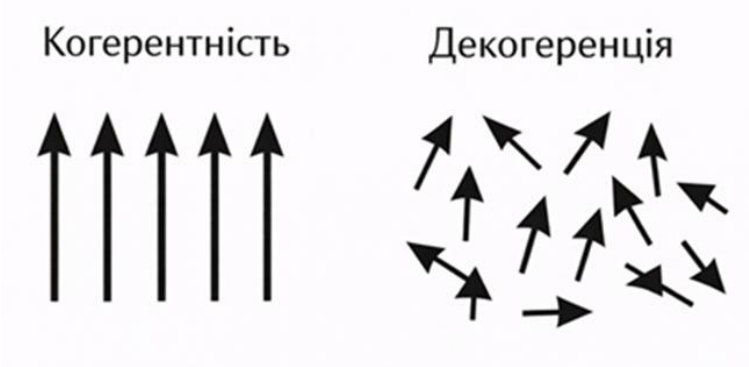


Рис. 10.2. Когерентність (узгоджені фази) та декогеренція (випадкові фази) у квантовій системі.

Декогеренція, у свою чергу, призводить до руйнування цих зв’язків, переходу від квантового стану до класичного, що істотно обмежує реалізацію квантових протоколів.

У реальних середовищах декогеренція є неминучою через взаємодію з навколишнім середовищем. Для її опису вводять часи: T_1 – час релаксації заселення рівнів і T_2 – час втрати фазової когерентності. З урахуванням релаксації отримують оптичні рівняння Блоха:

$$\frac{du}{dt} = -\Delta v - \frac{u}{T_2}, \tag{10.12}$$

$$\frac{dv}{dt} = \Delta u - \Omega_R W - \frac{v}{T_2}, \tag{10.13}$$

$$\frac{dw}{dt} = \Omega_R v - \frac{W - W_0}{T_1}. \tag{10.14}$$

де u, v – компоненти квантової когерентності; w – інверсія заселеностей (різниця між заселеністю верхнього та нижнього рівнів); різниця заселеностей; W_0 – рівноважне значення інверсії; $\Delta = \omega - \omega_0$ – частотна відстройка від резонансу; ω – частота зовнішнього поля; ω_0 – резонансна частота переходу; Ω_R – частота Рабі. Ці рівняння є центральними у квантовій оптиці, оскільки описують поведінку атома під дією зовнішнього поля.

Вище розглядалася взаємодія світла з окремими атомами. Проте в реальних системах квантової пам'яті використовується не один атом, а велика кількість частинок – атомний ансамбль. Саме в таких системах виникають так звані колективні ефекти, які суттєво змінюють характер взаємодії світла і матерії. Ці ефекти дозволяють значно підсилити взаємодію, зробити її більш керованою і ефективною, що є критично важливим для квантових технологій. У випадку одного атома фотон поглинається конкретним атомом. У випадку ансамблю неможливо визначити, який саме атом поглинув фотон. В результаті система переходить у суперпозицію всіх можливих збуджень.

Якщо багато атомів взаємодіють когерентно, виникають явища суперрадіації та субрадіації. Це колективні квантові ефекти випромінювання, які виникають у системі багатьох однакових атомів або квантових випромінювачів, що взаємодіють когерентно з електромагнітним полем. Якщо атоми випромінюють незалежно, то інтенсивність світла просто додається і $I \propto N$, де I – інтенсивність випромінювання; N – кількість атомів. Але якщо атоми перебувають у когерентному колективному стані, їх хвилі можуть інтерферувати. Тоді можливі два випадки: конструктивна інтерференція, яка призводить до суперрадіації і деструктивна інтерференція, що призводить до субрадіації.

Суперрадіація – це колективне когерентне випромінювання, при якому атоми випромінюють узгоджено, подібно до єдиного макроскопічного диполя. Воно приводить до конструктивної інтерференції. Конструктивна інтерференція – це явище, при якому хвилі накладаються одна на одну так, що їх амплітуди підсилюються, унаслідок чого результуюча хвиля має більшу інтенсивність. У цьому випадку усі атоми поводяться як єдиний колективний диполь. Суть полягає у наступному: один атом збуджений, але всі варіанти існують одночасно і система не «знає», який саме атом збуджений. Основна властивість колективного стану – це фазова когерентність. Це означає що всі фази узгоджені між собою. Завдяки цьому виникає інтерференція і система поводиться як єдине ціле. Причому інтенсивність випромінювання зростає як $I \propto N^2$, де N – число атомів. Тобто при подвоєнні числа атомів інтенсивність зростає у 4 рази. Такі колективні ефекти мають велике значення для квантових пам'ятей та лазерної фізики (рис.10.3).

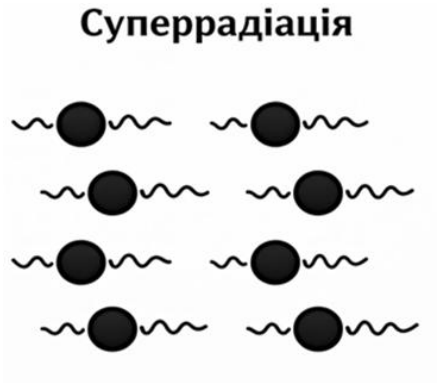


Рис. 10.3. Суперрадіація: узгоджене випромінювання атомів призводить до підсилення сигналу.

В результаті виникає сильний і направлений сигнал. Завдяки фазовій узгодженості випромінювання відбувається у певному напрямку (рис.10.4). Цей напрямок визначається фазовими умовами (умова фазового узгодження).

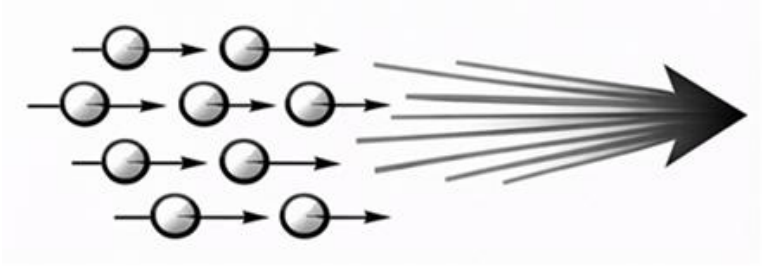


Рис. 10.4. Направлене випромінювання в ансамблі: фазова узгодженість визначає напрямок сигналу.

Субрадіація – це колективний стан, у якому випромінювання атомів взаємно пригнічується через деструктивну інтерференцію. Деструктивна інтерференція – це явище, при якому хвилі накладаються одна на одну так, що їх амплітуди частково або повністю компенсуються, унаслідок чого результуючий сигнал послаблюється або зникає. Атоми випромінюють у протифазі і їх хвилі гасять одна одну. В результаті випромінювання стає слабшим, сповільнюється і може майже зникати. Для субрадіантних станів $I < N$. У крайніх випадках $I \to 0$. Субрадіація забезпечує довготривале зберігання квантових станів і захист від декогеренції, використовується в квантових резонаторах. Субрадіантні стани особливо важливі у квантовій пам’яті, оскільки вони повільно випромінюють і довше зберігають інформацію. Таким чином, суперрадіація та субрадіація – це колективні квантові ефекти, у яких когерентна взаємодія багатьох атомів або випромінювачів відповідно підсилює або пригнічує випромінювання світла. Обидва є наслідком квантової когерентності і заплутаності колективних квантових станів.

У звичайних умовах атомне середовище поглинає світло, якщо його частота відповідає резонансному переходу між енергетичними рівнями. Проте квантова інтерференція може радикально змінити цю картину. Одним із найяскравіших прикладів такого явища є електромагнітно індукована прозорість (ЕІП) – ефект, при якому непрозоре середовище стає прозорим під дією додаткового когерентного випромінювання. Цей ефект є фундаментальним для квантової оптики і лежить в основі таких явищ, як сповільнення та зупинка

світла, а також реалізації квантової пам'яті. ЕІП реалізується у трирівневій системі: два нижні стани: $|g\rangle$ і $|s\rangle$, один збуджений стан: $|e\rangle$. Система взаємодіє з двома лазерами: сигнальне поле – слабке; керуюче поле – сильне (рис.10.5).

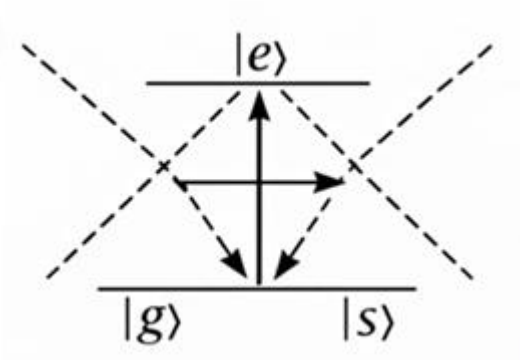


Рис. 10.5. Ефект електромагнітно індукованої прозорості: деструктивна інтерференція двох каналів збудження пригнічує поглинання.

У трирівневій системі сильне керуюче поле може зробити середовище прозорим для резонансного сигналу. Це пов'язано з квантовою інтерференцією переходів. У наведеній схемі Відбуваються переходи: $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ – сигнальне поле, $|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ – керуюче поле. У присутності двох полів виникають два можливі шляхи збудження атома. Ці шляхи інтерферують. В результаті інтерференція є деструктивною, амплітуда збудження стану $|e\rangle$ занулюється. У системі формується так званий темний стан (рис. 10.6):

$$|D\rangle = cos\theta\ |g\rangle - sin\theta\ |s\rangle. \qquad (10.15)$$

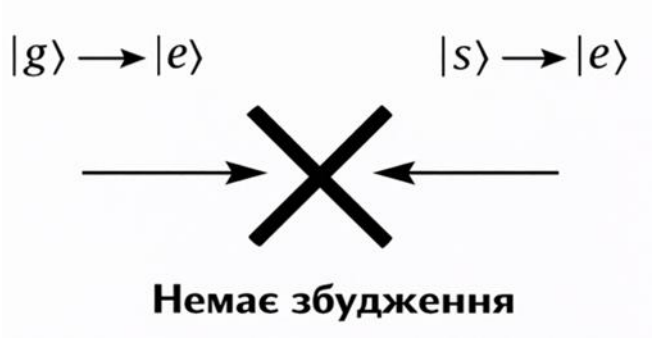


Рис. 10.6. Темний стан: інтерференція переходів призводить до відсутності збудження атома

У наведеному виразі $|g\rangle$ – основний (нижній) квантовий стан атома. Це один із двох нижніх рівнів у трирівневій системі, пов'язаний із сигнальним полем.); $|s\rangle$ – це інший нижній (метастабільний) стан атома. Це не збуджений стан, пов'язаний із керуючим полем. Часто використовується для зберігання інформації; $cos\ \theta$ і $sin\ \theta$ – коефіцієнти суперпозиції, які визначають наскільки стан «складається» з $|g\rangle$ і наскільки – з $|s\rangle$. Вони забезпечують нормування:

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1. \qquad (10.16)$$

Кут θ визначає співвідношення між двома станами і залежить від інтенсивностей лазерів. Цей стан є такою суперпозицією двох станів, що ймовірність переходу у збуджений стан дорівнює нулю. Тобто, два можливі шляхи збудження взаємно компенсуються і виникає деструктивна інтерференція. Цей стан називається «темним», тому що не взаємодіє зі світлом і атом у цьому стані не поглинає фотони і не переходить у збуджений стан. Оскільки збудження не відбувається, то поглинання світла зникає і середовище стає прозорим. Це і є електромагнітно індукована прозорість. Умову ЕІП можна описати через ефективне занулення поглинання:

$$\chi''(\omega) \to 0, \qquad (10.17)$$

де χ'' – уявна частина діелектричної сприйнятливості. Саме ЕІП лежить в основі квантової пам'яті для фотонів, оскільки дозволяє «зупиняти» світло в середовищі.

Колективні ефекти проявляються і при поглинанні. Ймовірність поглинання зростає з числом атомів, ефективність взаємодії значно підвищується. Колективні ефекти дозволяють здійснювати ефективний запис (фотон перетворюється у колективне збудження), зберігання інформації (інформація розподіляється по всьому ансамблю), кероване зчитування (узгоджене випромінювання відновлює фотон). Розглянуті ефекти роблять атомні ансамблі однією з найефективніших платформ для квантових інформаційних технологій.

Практичним прикладом когерентної взаємодії є лазерне охолодження атомів. Лазерне охолодження атомів – це метод зменшення теплового руху атомів за допомогою взаємодії з лазерним випромінюванням. Внаслідок цього зменшується середня швидкість атомів, а отже і їхня температура. Найбільш поширеним механізмом є доплерівське охолодження. Якщо частота лазера $\omega < \omega_0$, , де ω_0 – резонансна частота атомного переходу, то атоми, що рухаються назустріч лазеру, ефективніше поглинають фотони через ефект Доплера, втрачаючи при цьому кінетичну енергію.

Іншим прикладом є квантова пам'ять. У системах на основі ЕІП фотон можна перевести у колективне атомне збудження:

$$| 1_{\text{фотон}}\rangle \rightarrow | 1_{\text{спін}}\rangle. \qquad (10.18)$$

де $| 1_{\text{фотон}}\rangle$ означає стан поля з одним фотоном, тобто це квантовий стан, у якому присутній один квант світла, а $| 1_{\text{спін}}\rangle$ означає одне колективне спінове збудження атомного ансамблю. Отже, цей вираз описує процес перетворення фотонного квантового стану у колективне спінове збудження середовища. Такий процес є основою роботи квантової пам'яті для світла і забезпечує можливість тимчасового зберігання квантової інформації.

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо приклади.

1. Поглинання фотона атомом. Фотон з частотою, що відповідає переходу $| g\rangle \rightarrow | e\rangle$, поглинається атомом. В результаті атом переходить у збуджений стан, квантова інформація фотона передається атому.

2. Прозорість середовища (EIT). У звичайних умовах світло поглинається атомами. Але при додаванні другого лазера виникає інтерференція переходів, поглинання зникає, світло проходить через середовище. Це можна уявити як «вимкнення» поглинання за допомогою квантової інтерференції.

3. Колективне збудження. Один фотон взаємодіє не з одним атомом, а з тисячами. В результаті утворюється колективний стан, інформація розподіляється по всій системі, підвищується стійкість до втрат.

Таким чином, когерентна взаємодія світла з резонансним середовищем є фундаментальною основою сучасної квантової оптики. Саме вона дозволяє перетворювати фотонні стани у матеріальні, контролювати квантові процеси, реалізовувати ефекти, необхідні для квантової пам'яті. Вона поєднує квантову динаміку атомів, електромагнітних полів і колективних ефектів, відкриваючи можливість керування квантовими станами речовини та світла. Саме завдяки когерентності стають можливими осциляції Рабі, електромагнітно-індукована прозорість, квантова пам'ять та нелінійні оптичні процеси. Слід зазначити, що резонансна взаємодія світла з речовиною є не лише фундаментальним фізичним явищем, але й основою для реалізації квантових технологій нового покоління. Розуміння механізмів когерентної взаємодії дозволяє створювати системи передачі й збереження квантової інформації, високоточні сенсори та квантові мережі. Саме тому дослідження таких процесів залишається одним із центральних напрямів сучасної квантової фізики.

10.2. Фізичні принципи квантової пам'яті

У класичних інформаційних технологіях пам'ять виконує фундаментальну роль. Вона дозволяє зберігати, обробляти та передавати інформацію в часі. Аналогічно, у квантових технологіях виникає потреба у пристроях, здатних зберігати квантові стани, не руйнуючи їхню когерентність та квантові властивості, такі як суперпозиція та заплутаність. Квантова пам'ять є ключовим елементом майбутніх квантових мереж, зокрема так званого квантового інтернету. Вона забезпечує можливість тимчасового зберігання квантової інформації, що є критично важливим для синхронізації процесів у мережі, подолання втрат у каналах передачі та реалізації квантових повторювачів.

Квантова пам'ять – це фізична система, яка дозволяє записати квантовий стан (наприклад, стан фотона), зберігати його протягом певного часу, відновити цей стан без втрати квантової інформації. На відміну від класичної пам'яті, де інформація представлена бітами (0 або 1), у квантовій пам'яті інформація закодована у квантових бітах (кубітах), які можуть перебувати у суперпозиції.

Збереження такого стану означає збереження не лише значень, а й фазових співвідношень між ними.

У квантових мережах інформація найчастіше передається за допомогою фотонів. Проте фотони швидко поширюються і погано піддаються зберіганню. Саме тут виникає потреба у квантовій пам'яті.

Виділяють такі основні функції квантової пам'яті:

1. Синхронізація процесів. У квантових протоколах (наприклад, розподіл заплутаності) необхідно, щоб події відбувалися одночасно. Пам'ять дозволяє «затримати» один квантовий стан, поки інший не буде підготовлений.

2. Квантові повторювачі. Через втрати в оптичних волокнах передача квантових станів на великі відстані є проблематичною. Квантова пам'ять використовується у вузлах повторювачів для збереження станів, виконання операцій заплутаності, поетапної передачі інформації.

3. Перетворення квантових станів. Пам'ять виступає як інтерфейс між різними фізичними системами (наприклад, фотонами та атомами).

Квантова інформація зазвичай переноситься фотонами, тоді як зберігається у матеріальних системах (атомах, іонах, кристалах). Тому необхідний механізм перетворення:

$$\text{фотон} \leftrightarrow \text{атомне збудження}$$

Цей процес включає поглинання фотона середовищем, перетворення його стану у колективне збудження, подальше відновлення фотона. Важливо, що при цьому зберігається квантова інформація, включаючи фазу та поляризацію.

Для практичного застосування квантова пам'ять повинна відповідати кільком ключовим критеріям.

1. Ефективність (efficiency). Однією з ключових характеристик будь-якої квантової пам'яті є її ефективність. У квантових інформаційних технологіях важливо не лише зберегти квантовий стан, але й зробити це з мінімальними втратами. Навіть невеликі втрати можуть суттєво впливати на роботу квантових мереж, оскільки квантові стани не можна просто «підсилити», як у класичних

системах. Саме тому ефективність квантової пам’яті є критичним параметром, що визначає її практичну придатність.

Ефективність квантової пам’яті – це величина, яка показує, яка частка квантової інформації успішно проходить цикл: запис → зберігання → зчитування. Математично її визначають як:

$$\eta = \frac{N_{\text{вих.}}}{N_{\text{вх.}}}, \tag{10.19}$$

де $N_{\text{вх.}}$ – кількість вхідних фотонів (або квантових станів), $N_{\text{вих.}}$ – кількість успішно відновлених фотонів. Ефективність показує наскільки добре фотон був поглинутий середовищем, чи зберігся він під час зберігання, чи був коректно відновлений. Інакше кажучи – це ймовірність того, що квантова інформація «переживе» весь процес. Ефективність можна розкласти на три етапи:

$$\eta = \eta_{\text{запису}} \cdot \eta_{\text{зберігання}} \cdot \eta_{\text{зчитування}}\ , \tag{10.20}$$

де $\eta_{\text{запису}}$ – це ефективність запису. Показує наскільки добре фотон поглинається середовищем. Він залежить від оптичної густини та резонансу.

$\eta_{\text{зберігання}}$ – це ефективність зберігання. Визначається декогеренцією і залежить від часу зберігання.

$\eta_{\text{зчитування}}$ – це ефективність зчитування, тобто наскільки ефективно відновлюється фотон. Залежить від механізму рефазування або керуючих полів.

На ефективність впливають такі фактори:

1. Оптична густина середовища: чим більша густина, тим краще поглинання, але може збільшувати втрати.

2. Декогеренція: руйнує квантовий стан, зменшує ефективність зберігання.

3. Невідповідність спектрів: якщо частота фотона не відповідає переходам, ефективність падає.

4. Геометрія системи: визначаєє втрати при вході/виході світла, напрямок випромінювання.

Висока ефективність критично важлива для масштабування мереж.

2. Час когерентності (coherence time). У квантових інформаційних системах важливо не лише записати і відновити квантовий стан, але й зберегти його незмінним протягом певного часу. Саме ця властивість характеризується величиною, яку називають часом когерентності. Квантові стани відрізняються від класичних тим, що вони містять не лише інформацію про ймовірності, а й про фазові співвідношення. Втрата цієї фазової інформації означає втрату квантової природи стану. Тому час когерентності є одним із найважливіших параметрів квантової пам'яті.

Когерентність – це властивість квантової системи зберігати фазові співвідношення між складовими суперпозиції. Тобто когерентність – це збереження квантової «інтерференційної структури» стану. Час когерентності – це характерний час, протягом якого квантова система зберігає свою когерентність. Його часто позначають як T_2 – час фазової когерентності. Також вводять T_1 – час релаксації (перехід у основний стан). Час когерентності визначає як довго можна зберігати квантову інформацію, як довго система залишається «квантовою», наскільки ефективно працює квантова пам'ять. Якщо $t \ll T_2$, то інформація збережена. При $t \approx T_2$ – починається деградація, а при $t \gg T_2$ – стан втрачає когерентність. Основна причина руйнування когерентності – декогеренція, яка виникає через взаємодію з навколишнім середовищем.

3. Точність відтворення (fidelity). Точність відтворення визначає, наскільки точно відновлений стан відповідає початковому:

$$F = \langle \psi_{in} \mid \rho_{out} \mid \psi_{in} \rangle, \qquad (10.21)$$

де ψ_{in} – початковий квантовий стан (вхідний стан). Це той стан, який ми хочемо записати у квантову пам'ять або передати через квантовий канал або відтворити після певного процесу; ρ_{out} – матриця густини відновленого стану. Це вихідний стан після процесу (наприклад, після зберігання в пам'яті). Він може бути змішаним (через шум), частково декогерентним. Величина F показує наскільки вихідний стан схожий на початковий. Якщо $F = 1$, то стан відновлено ідеально,

якщо F<1F < $F < 1$, то є втрати або спотворення, якщо ж $F \approx 0$, то стан майже втрачено.

4. Ширина смуги та швидкодія. Окрім ефективності та часу когерентності, важливими характеристиками квантової пам'яті є ширина смуги (bandwidth) та швидкодія (speed). Ці параметри визначають, наскільки швидко система може записувати та відновлювати квантову інформацію і які типи сигналів вона здатна обробляти. У квантових мережах інформація часто передається у вигляді коротких світлових імпульсів. Тому пам'ять повинна бути здатною працювати з такими імпульсами без втрати їхньої структури та квантових властивостей.

Ширина смуги – це діапазон частот, у якому квантова пам'ять може ефективно працювати. Це спектральний «діапазон пропускання» пам'яті. Існує фундаментальний зв'язок між часом і частотою:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \gtrsim 1. \qquad (10.22)$$

де $\Delta\nu$ – ширина спектра, Δt – тривалість імпульсу. Як наслідок, короткі імпульси – широка смуга, довгі імпульси – вузька смуга. Ширина смуги визначає які імпульси можна записати без спотворення, наскільки швидкі сигнали підтримує система, чи зберігається форма імпульсу. Якщо смуга вузька, швидкі імпульси спотворюються і частина спектра не поглинається.

Швидкодія квантової пам'яті – це характеристика, яка визначає, наскільки швидко квантова пам'ять здатна виконувати операції запису, зберігання та зчитування квантового стану. Тобто як швидко квантова пам'ять може працювати з квантовими станами. Вона показує наскільки швидко система реагує на вхідний сигнал, чи може пам'ять працювати з короткими (швидкими) імпульсами, наскільки високу пропускну здатність має квантова система. Швидкодія квантової пам'яті пов'язана з шириною смуги (ширша смуга – вища швидкодія). Вона обмежується часами атомних переходів та керуючих процесів і впливає на швидкість передачі інформації в квантових мережах. Пам'ять повинна працювати з різними спектральними характеристиками сигналів і забезпечувати швидкий запис/зчитування.

5. Масштабованість. У квантових технологіях важливо не лише створити окремий робочий елемент (наприклад, квантову пам'ять), але й забезпечити можливість об'єднання великої кількості таких елементів у єдину систему. Саме ця властивість описується поняттям масштабованості. У контексті квантових мереж і квантового інтернету масштабованість є критичною, оскільки майбутні системи повинні включати сотні, тисячі або навіть мільйони квантових вузлів, що взаємодіють між собою. Масштабованість квантової пам'яті – це здатність системи ефективно працювати при збільшенні кількості квантових елементів, каналів або обсягу інформації без суттєвої втрати якості. Масштабованість означає, що можна додавати нові квантові вузли, система залишається стабільною, ефективність і достовірність не погіршуються критично.

Розрізняють такі види масштабованості:

1. Просторова масштабованість – це можливість створення великої кількості пам'яті і можливість інтеграції у мережу.

2. Частотна масштабованість (мультиплексування) – це зберігання інформації на різних частотах, паралельна обробка сигналів.

3. Часова масштабованість – це зберігання кількох імпульсів у різні моменти часу.

4. Квантова масштабованість – це робота з багатьма заплутаними станами одночасно.

Фізичні принципи квантової пам'яті, ґрунтується на здатності квантової системи зберігати когерентність і переносити квантову інформацію між різними фізичними носіями без руйнування суперпозиції та заплутаності. Основну роль у цьому відіграють процеси когерентної взаємодії світла з речовиною, механізми запису й зчитування квантових станів, а також мінімізація декогеренції, яка обмежує час зберігання інформації. У межах теоретичного опису квантова пам'ять постає як універсальний інструмент синхронізації квантових процесів і невід'ємний елемент майбутніх квантових мереж. Однак самі фізичні принципи ще не визначають, яким саме чином така пам'ять може бути реалізована експериментально. Для практичного створення квантових систем збереження

інформації необхідно знайти фізичні середовища, у яких когерентні квантові стани можуть існувати достатньо довго та контрольовано взаємодіяти з фотонами або іншими носіями інформації. Квантова пам'ять – це не абстрактне поняття, а конкретні фізичні системи, у яких можна записувати, зберігати та відновлювати квантову інформацію. Реалізація такої пам'яті залежить від вибору фізичної платформи, яка забезпечує необхідні умови для взаємодії світла і матерії та збереження когерентності. Сьогодні існує кілька основних підходів до реалізації квантової пам'яті, кожен з яких базується на різних фізичних принципах і має свої переваги та обмеження.

Виділяють такі основні платформи квантової пам'яті:

1. Атомні газові ансамблі. Атомні газові ансамблі є однією з найперших і найкраще досліджених платформ для реалізації квантової пам'яті. У таких системах велика кількість атомів взаємодіє зі світлом, що дозволяє ефективно записувати та зберігати квантову інформацію. На відміну від одиночних квантових систем, ансамблі забезпечують колективне підсилення взаємодії, завдяки чому навіть слабкі сигнали (наприклад, одиночні фотони) можуть бути ефективно збережені. Атомний ансамбль – це система з великої кількості атомів (від тисяч до мільярдів), які перебувають у газоподібному стані, можуть бути холодними (лазерне охолодження) або теплими (парові комірки), і які взаємодіють із лазерним випромінюванням. Процес запису виглядає так: фотон входить у середовище, взаємодіє з атомами і перетворюється у колективне збудження.

Основні протоколи:

1. ЕІП-механізм зупиненого світла. ЕІП (електромагнітно індукована прозорість) – це ефект, при якому непрозоре середовище стає прозорим для світла під дією другого лазера.

2. GEM (Gradient Echo Memory) – градієнтна квантова пам'ять – це метод зберігання світла, у якому використовується контрольований частотний градієнт у середовищі.

Після запису квантовий стан існує у вигляді когерентного збудження, зберігається протягом часу когерентності і може бути переведений у довгоживучі стани (спінові). Для зчитування інформації застосовується керуюче поле, колективне збудження перетворюється назад у фотон і фотон виходить із середовища. Переваги атомних ансамблів: підсилена взаємодія (багато атомів – висока ефективність), висока когерентність, особливо у холодних атомах, гнучкість **(**можливість реалізації різних протоколів). Недоліки: складність експериментальної реалізації (вакуум, лазери, охолодження), рух атомів (викликає декогеренцію), обмежена інтеграція (складно використовувати у компактних пристроях).

2. Іони в пастках. Однією з найточніших і найбільш контрольованих платформ для реалізації квантових технологій є іони в пастках. У таких системах окремі заряджені атоми (іони) утримуються в просторі за допомогою електромагнітних полів і можуть використовуватися як носії квантової інформації. Іонні пастки відіграють важливу роль не лише у квантових комп'ютерах, але й у квантовій пам'яті та квантових інтерфейсах, оскільки дозволяють зберігати квантові стани з дуже високою точністю. Іонна пастка – це пристрій, у якому іони утримуються за допомогою електричних полів, їх рух обмежений у просторі, вони можуть довго залишатися ізольованими від зовнішнього середовища. Найпоширеніші типи: пастка Пауля (радіочастотна), пастка Пенінга. Переваги іонних пасток: висока точність **(**дуже низький рівень помилок), довгий час когерентності (один із найкращих серед усіх платформ), контроль окремих квантів (можливість адресувати окремі іони). Недоліки: складність експерименту (вакуум, лазери, стабілізація), обмежена масштабованість (складно керувати великою кількістю іоні), повільні операції **(**порівняно з фотонними системами).

3. Твердотільні системи (рідкоземельні іони). Твердотільні системи на основі рідкоземельних іонів є однією з найперспективніших платформ для реалізації квантової пам'яті. Вони поєднують у собі дві важливі властивості: стабільність твердого тіла та квантові характеристики ізольованих атомів. На

відміну від атомних газів, такі системи не потребують складних умов утримання частинок, що робить їх особливо привабливими для створення практичних квантових пристроїв і мереж. Рідкоземельні іони (Eu^{3+}, Pr^{3+}, Er^{3+} тощо) мають унікальну електронну структуру – незаповнену 4f-оболонку. Ця оболонка екранована зовнішніми електронами (5s, 5p). Як наслідок слабка взаємодія з кристалом, вузькі спектральні лінії, висока стабільність квантових станів. Іони вбудовуються у тверді кристали, наприклад, YSO (ітрій-ортосилікат) та інші діелектричні матеріали. Кристал фіксує положення іонів, забезпечує механічну стабільність, створює неоднорідне уширення спектра. Механізм: оптичне збудження забезпечує спінове збереження.

У таких системах існують два типи переходів:

1. Оптичні переходи. Використовуються для запису і зчитування світла, мають вузьку спектральну ширину.

2. Спінові переходи. Використовуються для довготривалого зберігання, мають дуже довгий час когерентності (до секунд і більше).

Процес зберігання (механізм квантової пам’яті) відбувається у два етапи:

1. Оптичний запис: фотон поглинається іонами, створюється когерентне оптичне збудження.

2. Перенесення у спіновий стан: за допомогою додаткових імпульсів інформація переводиться у спінову когерентність.

Унікальні спектральні та когерентні властивості рідкоземельних іонів в твердотільних середовищах роблять їх однією з найзручніших платформ для реалізації квантових пам’ятей. Переваги твердотільних систем: стабільність (іони нерухомі, відсутні ефекти руху (як у газах), масштабованість (можливість інтеграції у фотонні чипи), довгий час зберігання (особливо у спінових станах). Обмеження: слабка взаємодія зі світлом (потрібне підсилення), неоднорідності (складність підготовки спектра), потреба у кріогенних температурах. Твердотільні квантові пам’яті на рідкоземельних іонах є однією з найбільш перспективних платформ для практичних квантових технологій. Ці системи

відкривають шлях до створення масштабованих квантових мереж і є важливим кроком на шляху до реалізації повноцінного квантового інтернету.

Реалізація квантової пам'яті полягає не лише у виборі фізичного середовища, але й у застосуванні конкретного протоколу запису, зберігання та зчитування квантової інформації. Саме протоколи визначають, як світловий квантовий стан перетворюється у матеріальне збудження і як він відновлюється без втрати інформації. Різні протоколи використовують різні фізичні механізми: когерентність, дефазування, рефазування та контроль спектральних властивостей середовища.

Будь-який протокол включає три етапи: запис (write), зберігання (storage), зчитування (read).

Схематично це виглядає так:

фотон → атомне збудження → фотон

Для ілюстрації наведених принципів розглянемо приклади.

1. Зберігання фотона в атомному ансамблі. Уявімо, що одиночний фотон потрапляє в середовище атомів. Завдяки спеціально налаштованому лазерному полю фотон не поглинається одразу, його енергія «розмазується» по багатьох атомах, формується колективне збудження. Це збудження можна записати як

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} |g_1 g_2 \dots e_j \dots g_N\rangle, \qquad (10.23)$$

де $|W\rangle$ – загальний квантовий стан всієї системи з N атомів. Він описує ситуацію, коли тільки один атом збуджений, але ми не знаємо який саме. N – кількість атомів у ансамблі. Наприклад, N=1000 – тисяча атомів; $|g_1 g_2 \dots e_j \dots g_N\rangle$ – конкретний квантовий стан ансамблю, де g_i – атом № і в основному стані, e_j – атом № j у збудженому стані.

Такий стан є носієм квантової інформації.

2. Квантова пам'ять у квантовому повторювачі. Розглянемо передачу інформації між двома далекими вузлами: створюється заплутаність між

сусідніми сегментами, у проміжному вузлі квантова пам’ять зберігає стан, після цього виконується операція злиття заплутаності (entanglement swapping).

3. Кристал Eu^{3+}:YSO як квантова пам’ять. Світло записується у оптичний перехід і переноситься у спіновий стан, зберігається протягом тривалого часу, а потім відновлюється за допомогою імпульсів.

Без пам’яті така схема була б неможливою через випадковість процесів. Квантова пам’ять є невід’ємним елементом квантових інформаційних технологій. Вона дозволяє не лише зберігати квантові стани, але й забезпечує функціонування складних протоколів квантового зв’язку. У подальших підрозділах буде детально розглянуто фізичні механізми реалізації квантової пам’яті, зокрема ефекти зупиненого світла, фотонного еха та взаємодії в резонаторах, що лежать в основі сучасних експериментальних систем.

10.3. Методи зупиненого світла та фотонного еха у квантовій пам’яті

Однією з найбільш вражаючих ідей сучасної квантової оптики є можливість не лише сповільнювати світло, а й фактично зупиняти його поширення в середовищі. Здавалося б, це суперечить нашому повсякденному досвіду, адже світло асоціюється з максимально можливою швидкістю передачі сигналу. Проте в спеціально підготовлених квантових середовищах можна радикально змінювати його властивості. Фізика зупиненого світла лежить в основі багатьох протоколів квантової пам’яті, оскільки саме вона забезпечує механізм перетворення фотонного стану у стаціонарне збудження матерії. Це дозволяє «записати» світло, зберігати його у середовищі та згодом відновити.

У середовищі світло поширюється не зі швидкістю світла c, а з так званою груповою швидкістю:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}, \tag{10.24}$$

де n – показник заломлення, $\frac{dn}{d\omega}$ – дисперсія показника заломлення середовища. Якщо дисперсія середовища є значною, групова швидкість світла може суттєво

зменшуватися. У звичайних матеріалах вона визначається співвідношенням $v_g \approx c/n$ і відрізняється від швидкості світла у вакуумі незначно. Проте за спеціально створених умов групова швидкість може зменшуватися на багато порядків і досягати значень у кілька метрів на секунду. Таке різке уповільнення світла пов'язане з наявністю сильної дисперсії, яка, у свою чергу, виникає внаслідок когерентної взаємодії світла з середовищем. Одним із найефективніших механізмів реалізації таких умов є ефект електромагнітно індукованої прозорості, який дозволяє не лише усунути поглинання, але й сформувати необхідні дисперсійні властивості середовища. Саме тому електромагнітно індукована прозорість розглядається як фізична основа явища сповільнення світла.

Ефект електромагнітно індукованої прозорості демонструє, що завдяки когерентній взаємодії світла з атомним середовищем можна не лише усунути поглинання, але й істотно змінити динаміку поширення світлового імпульсу. Зокрема, у режимі ЕІП світло сповільнюється і частково «перетворюється» на колективне збудження атомів. У такій ситуації світло і середовище вже не можна розглядати як незалежні підсистеми: вони утворюють єдину когерентну систему. Такий стан приводить до введення поняття поляритона – квазічастинки, що є гібридним збудженням системи «світло–матерія» і відіграє ключову роль у процесах сповільнення та зупинки світла. Поляритон – це змішаний квантовий стан, що поєднує фотон (електромагнітне поле) і колективне збудження середовища (наприклад, атомного ансамблю). Простими словами, поляритон – це «частинка», яка частково є світлом, а частково – матерією. Поляритон означає, що світло і матерія більше не існують окремо, вони утворюють єдину когерентну систему, енергія і інформація розподіляються між ними. Його стан можна умовно записати як:

$$|\Psi\rangle = cos\theta \; |\text{фотон}\rangle + sin\theta \; |\text{атомне збудження}\rangle. \qquad (10.25)$$

Параметр θ визначається інтенсивністю керуючого поля.

Одним із найбільш цікавих проявів когерентної взаємодії світла з матерією є можливість практично зупинити світловий імпульс у середовищі. Це явище не

означає, що фотон «зупиняється» як класична частинка, а полягає у перетворенні світлової інформації у матеріальну форму – колективне збудження атомного ансамблю. Зупинка світла є ключовим механізмом, що лежить в основі квантової пам'яті. Зупинка світла – це керований процес, який складається з таких етапів.

Етап 1. Вхід імпульсу: світловий імпульс входить у середовище під дією керуючого лазера.

Етап 2. Сповільнення: завдяки EIT групова швидкість різко зменшується.

Етап 3. Формування поляритона: у середовищі імпульс існує як не чисте світло, а як поляритон – суміш фотонного поля і атомного збудження:

$$\Psi = Ecos\theta - Ssin\theta, \qquad (10.26)$$

де E – це фотонна (електромагнітна) складова. Більш точно це амплітуда квантового світлового поля, яка описує світловий імпульс. Це «частина поляритона, яка є світлом» і відповідає за поширення у просторі; S – це матеріальна (атомна) складова. Більш точно це колективне когерентне збудження атомів, так званий спіновий хвильовий стан. Це «частина поляритона, яка є матерією» і зберігає квантову інформацію. Наведений вираз означає, що що поляритон – це частково світло (E), а частково атомне збудження (S).

Етап 4. Вимкнення керуючого поля – основний етап процесу: інтенсивність керуючого поля поступово зменшується, параметр θ змінюється. В результаті $cos\theta \to 0,\ sin\theta \to 1$. Поляритон стає повністю матеріальним (атомним).

Етап 5. «Зупинка» світла: у цей момент фотонне поле зникає, інформація переходить у атоми, утворюється колективне когерентне збудження. Світло «зупинене» у вигляді матерії.

Етап 6. Зберігання інформації. Під час зберігання інформація знаходиться у спінових станах атомів, система зберігає когерентність, тривалість обмежена часом когерентності.

Етап 7. Відновлення світла. Для відновлення керуюче поле знову вмикається, процес відбувається у зворотному напрямку: $S \to E$, тобто атомне збудження знову перетворюється на фотон, світловий імпульс виходить із середовища. Важливо, що при цьому зберігається форма імпульсу і зберігається

квантова інформація. Важливо розуміти, що світло не «зупиняється» буквально, відбувається перетворення типу збудження: фотон → атомне збудження → фотон. Для успішної зупинки світла необхідні висока когерентність середовища, точний контроль керуючого поля, мінімальні втрати і шуми.

Попри ефектність, процес має обмеження:

1. Декогеренція: взаємодія з середовищем руйнує фазу,обмежує час зберігання.

2. Оптичні втрати: недосконала прозорість, розсіювання.

3. Обмеження ширини спектра: EIT працює лише у вузькому частотному діапазоні.

Для кращого розуміння розглянемо приклади.

1. Сповільнення світла до кількох метрів за секунду. У холодному атомному газі світловий імпульс, який у вакуумі проходить за наносекунди, у середовищі рухається зі швидкістю ~10 м/с. Це означає, що імпульс стискається у тисячі разів і більша частина енергії переходить у атомну систему.

2. Повна зупинка світла. Експериментально: імпульс входить у середовище, керуюче поле вимикається, світло «зникає» як електромагнітна хвиля, інформація зберігається в атомах. Після увімкнення поля імпульс відновлюється і виходить.

3. Квантова пам'ять на основі зупиненого світла. У квантових протоколах одиночний фотон не просто затримується, його квантовий стан записується у колективне збудження, а згодом точно відновлюється. Це є прямою реалізацією квантової пам'яті.

Фізика зупиненого світла демонструє, наскільки глибоко можна контролювати взаємодію світла з матерією. Завдяки ефекту ЕІП та утворенню поляритонів стає можливим значно сповільнювати світло, повністю переводити його у матеріальну форму, зберігати квантову інформацію у середовищі. Цей механізм є одним із найважливіших для реалізації квантової пам'яті та квантових інтерфейсів.

Однією з альтернатив до підходу «зупиненого світла» є використання явищ дефазування та повторної фазової синхронізації (рефазування) у великому ансамблі атомів. Саме на цих процесах базується ефект фотонного еха – явище, при якому після взаємодії з кількома світловими імпульсами система випромінює сигнал із затримкою, що відтворює початкову інформацію. Фотонне ехо стало важливою основою для створення квантової пам'яті, оскільки дозволяє записувати світлові імпульси у середовище, зберігати інформацію у вигляді фазового розподілу атомів, відновлювати сигнал за рахунок керованого рефазування.

У реальних середовищах атоми не є ідентичними. Через вплив зовнішніх полів, рух або взаємодію з оточенням вони мають трохи різні резонансні частоти Це призводить до явища неоднорідного уширення спектральних ліній. Воно відіграє ключову роль у процесах взаємодії світла з ансамблями атомів і безпосередньо пов'язане з таким важливим ефектом, як дефазування. Розуміння цих явищ є необхідним для аналізу квантової пам'яті, фотонного еха та градієнтних методів зберігання інформації. Уявімо, що всі атоми однакові: мають одну й ту саму резонансну частоту ω_0 , взаємодіють зі світлом однаково. У цьому випадку всі атоми коливаються в однаковій фазі, система зберігає когерентність. У реальному середовищі кожен атом має свою частоту ω_i, і ці частоти розподілені навколо ω_0. Причинами цього є ефект Доплера (рух атомів), неоднорідності середовища, локальні електричні або магнітні поля. Це призводить до розширення спектральної лінії. Після збудження атоми еволюціонують як $e^{-i\omega_i t}$. Оскільки ω_i різні, то фази атомів змінюються з різною швидкістю. Через різні частоти з часом їхні фази розходяться. Це явище називається дефазуванням. Дефазування – це втрата фазової узгодженості між складовими суперпозиції без втрати енергії, що призводить до зникнення когерентного сигналу. В результаті сигнал зникає, інтерференція більше неможлива. Однак інформація не зникає – вона «розмазана» у фазах. Для характеристики дефазування вводиться характеристичний час T_2^* - час неоднорідного дефазування. За цей час система втрачає фазову узгодженість.

Відмінність від декогеренції полягає в тому, що дефазування відбувається через різні частоти, а декогеренція – через взаємодію з середовищем. Причому дефазування часто оборотне. Неоднорідне уширення ускладнює зберігання інформації, але водночас використовується у фотонному ехо, градієнтній квантовіій пам'яті (GEM – Gradient Echo Memory), атомній частотній гребінці (AFC – Atomic Frequency Comb).

Важливою особливістю дефазування є те, що інформація не втрачається повністю, вона лише «розмазується» у фазовому просторі. Ця обставина відкриває можливість відновлення сигналу через спеціально організований процес – рефазування. Рефазування – це процес відновлення фазової узгодженості квантової системи після дефазування, що приводить до появи когерентного сигналу. Ідея полягає у наступному: попри втрату видимого сигналу інформація про фази зберігається, кожен атом «пам'ятає» свою фазу. Отже, якщо заставити атоми змінювати фази у зворотному порядку, вони знову узгодяться, і можна відновити початкову когерентність. Це досягається за допомогою додаткового світлового імпульсу.

Одним із найважливіших проявів явища рефазування в атомних ансамблях є двохімпульсне фотонне ехо. Воно демонструє, що навіть після втрати видимого сигналу через дефазування, інформацію можна відновити за допомогою спеціального впливу на систему. Цей ефект є класичним прикладом оборотності фазової еволюції і лежить в основі багатьох протоколів квантової пам'яті. Двохімпульсне фотонне ехо – це відновлення світлового сигналу через рефазування атомів після дії двох послідовних світлових імпульсів.

Процес відбувається таким чином.

1. Початковий стан.Усі атоми знаходяться в основному стані $|g\rangle$. Після цього на систему діє короткий світловий імпульс.

2. Перший імпульс (збудження). Перший імпульс переводить атоми у когерентний стан і створює однакову фазу у всіх атомів. У цей момент система має максимальну когерентність.

3. Дефазування. Після першого імпульсу атоми мають різні частоти ω_i, їх фази еволюціонують як $e^{-i\omega_i t}$. З часом фази розбігаються і сигнал зникає.

4. Другий імпульс (інверсія фаз). Через час τ подається другий імпульс. Зазвичай це π-імпульс, він «перевертає» фази атомів. **π-імпульс –** це світловий (лазерний) імпульс такої тривалості та інтенсивності, який повністю переводить квантову систему з одного стану в інший (наприклад, з основного у збуджений). В результаті атоми, що випереджали, починають відставати, а ті, що відставали, починають наздоганяти.

5. Рефазування. Після другого імпульсу система починає рухатися до відновлення фазової узгодженості. Через час τ після другого імпульсу всі фази знову збігаються.

6. Ехо-сигнал. У момент $t = 2\tau$ виникає сильне узгоджене випромінювання – ехо-сигнал.

Часова структура процесу: $t = 0$ – перший імпульс; $t = \tau$ – другий імпульс; $t = 2\tau$ – ехо.

Таким чином, фотонне ехо – це відновлення когерентності через інверсію фазової еволюції. Особливості фотонного еха: процес є оборотним (у межах когерентності), ехо виникає без зовнішнього сигналу, система «сама відновлює» випромінювання. Попри простоту, ця схема має недоліки: другий імпульс є сильним і може руйнувати квантову інформацію, виникає шум (спонтанне випромінювання), складно застосовувати для однофотонних станів. Це стимулювало розвиток більш досконалих протоколів.

Одним із найефективніших способів використання рефазування є метод атомних частотних гребінок (AFC – Atomic Frequency Comb). Цей підхід дозволяє перетворити хаотичний спектр поглинання на впорядковану структуру, яка автоматично забезпечує відновлення сигналу. Ідея частотної гребінки полягає у наступному. У звичайному середовищі спектр поглинання – неперервний. У AFC формується періодична структура піків:

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta, \qquad (10.27)$$

де Δ – відстань між піками. Це і є частотна гребінка. Коли світловий імпульс входить у середовище, він поглинається атомами і кожна частота відповідає своєму «зубцю» гребінки. Утворюється колективний стан: $\sum_n e^{-i\omega_i t}$. Після поглинання атоми мають різні частоти ω_i, їх фази починають розбігатися. Сигнал зникає (як і у звичайному дефазуванні). Оскільки частоти рівновіддалені, то фази еволюціонують узгоджено і через певний час ($t = {2\pi}/{\Delta}$) вони знову збігаються. Виникає ехо-сигнал. У момент рефазування всі атоми випромінюють узгоджено, формується світловий імпульс, система сама «відновлює» сигнал. Таким чином AFC – це використання впорядкованого спектра для автоматичного рефазування. Переваги методу: не потребує другого імпульсу (як у фотонному ехо), природна багатоканальність, можливість роботи з широкими спектрами. Обмеження: фіксований час відновлення (без додаткових схем), складність підготовки гребінки, втрати ефективності.

Фотонне ехо демонструє можливість відновлення когерентного сигналу після дефазування в атомному ансамблі. Ця властивість робить його природною основою для реалізації квантової пам’яті – пристрою, що дозволяє записувати, зберігати і відтворювати квантовий стан світла. На відміну від класичного еха, у квантовій пам’яті важливо не лише відновити сигнал, а й зберегти його квантові властивості (фазу, амплітуду, когерентність). Принцип роботи квантової пам’яті на основі фотонного еха такий.

1. Запис інформації. Світловий імпульс (наприклад, однофотонний стан) взаємодіє з атомним ансамблем і створює колективне когерентне збудження. Інформація кодується у фазах атомів.

2. Дефазування як етап зберігання. Після запису атоми мають різні частоти, їх фази розбігаються. Це призводить до зникнення макроскопічного сигналу, але інформація зберігається у системі.

3. Рефазування. Для відновлення сигналу застосовується керуючий імпульс (наприклад, π-імпульс), він інвертує фазову еволюцію. Запускається процес рефазування.

4. Зчитування (ехо-сигнал). Через певний час атоми знову узгоджуються у фазі і виникає когерентне випромінювання. Формується ехо, яке містить вихідну інформацію. Квантова пам’ять на основі фотонного еха базується на керованому дефазуванні та рефазуванні атомного ансамблю. Переваги: висока ефективність, ефективне використання неоднорідного уширення, можливість зберігати короткі імпульси, висока швидкодія, сумісність з твердотільними системами. Обмеження: шум від π-імпульсів, обмеження часу когерентності, складність реалізації, вимоги до точного контролю спектра.

Розглянемо приклади.

1. Класичне фотонне ехо. Світловий імпульс збуджує атоми, сигнал зникає через дефазування, другий імпульс відновлює узгодженість, через час 2τ виникає ехо. Це аналогічно тому, як у акустиці звук повертається із затримкою.

2. AFC-пам’ять у кристалах. У кристалах з рідкоземельними іонами формується спектральна гребінка, фотон поглинається. Через визначений час сигнал відновлюється автоматично.

3. Зберігання квантового стану. Одиночний фотон записується у фазовий розподіл атомів. Після рефазування він відновлюється з тією ж квантовою інформацією.

Фотонне ехо є потужним фізичним механізмом, що дозволяє відновлювати когерентні сигнали після їхнього зникнення внаслідок дефазування. На його основі створені ефективні протоколи квантової пам’яті, зокрема метод атомних частотних гребінок. Неоднорідне уширення і дефазування, кероване рефазування і колективна природа взаємодії відкривають можливість точного контролю квантових станів і є важливою альтернативою методам зупиненого світла, розширюючи інструментарій квантових технологій. Однак класичні схеми фотонного еха мають обмеження, пов’язані з використанням сильних імпульсів та додатковим шумом. Це стимулювало розвиток альтернативних підходів, серед яких особливе місце займає градієнтна пам’ять (GEM).

Градієнтна пам’ять – це метод квантового зберігання світла, у якому використовується контрольований просторовий розподіл резонансних частот

атомів. На відміну від стандартного фотонного еха, тут рефазування досягається не імпульсами, а зміною зовнішнього поля, що робить процес більш керованим і придатним для квантових застосувань. У GEM неоднорідне уширення не є випадковим, воно створюється штучно, контрольовано на відміну від природного неоднорідного уширення, яке є неконтрольованим. Контрольоване уширення – це штучне створення та керування дефазуванням і рефазуванням. Принцип контрольованого неоднорідного уширення дозволяє перетворити недолік (дефазування) на корисний інструмент керування квантовими станами. Цей підхід є фундаментальним для сучасних методів квантової пам'яті.

У контрольованому випадку частоти атомів змінюються штучно за допомогою зовнішніх полів. Наприклад, електричне поле спричиняє ефект Штарка, магнітне поле – ефект Зеємана. Реалізується це таким чином. На середовище накладається градієнт магнітного або електричного поля. Частота переходу атомів залежить від координати: $\omega(z) = \omega_0 + \alpha z$, де z – координата, α – величина градієнта. В результаті кожна частина середовища взаємодіє з різними частотами світла. Коли світловий імпульс входить у середовище його спектральні компоненти «розподіляються» по різних ділянках середовища. Кожна частота поглинається там, де виконується резонанс. Таким чином, імпульс «розтягується» у просторі і інформація кодується як просторовий розподіл когерентності. Після запису кожен атом має свою частоту і фази атомів еволюціонують по-різному: $\phi(z,t) = \omega(z)t$. В результаті когерентність швидко зникає, світло не випромінюється назад. Це аналогічно дефазуванню у фотонному ехо, але тепер воно контрольоване. Ключовий момент – це зміна знаку градієнта:

$$\alpha \to -\alpha. \qquad (10.28)$$

Це означає, що атоми, які «відставали», починають «наздоганяти» і фази починають сходитися, тобто фазова еволюція інвертується. В результаті відбувається рефазування і формується когерентне випромінювання – ехо. Після реверсу градієнта через певний час всі фази вирівнюються і середовище випромінює світловий імпульс. Цей принцип лежить в основі GEM (Gradient

Echo Memory), CRIB, сучасних протоколів квантової пам’яті. Особливість GEM полягає в тому, що сигнал може виходити у прямому напрямку і можлива точна керованість моментом зчитування.

В таблиці 10.1 наведено порівняння градієнтної пам’яті з фотонним ехо.

Таблиці 10.1. Порівняння градієнтної пам’яті з фотонним ехо.

Характеристика	Фотонне ехо	GEM
Рефазування	імпульси	зміна поля
Шум	високий	низький
Контроль	обмежений	високий
Квантові застосування	складні	ефективні

GEM можна розглядати як «запис» світла у вигляді просторового спектра і «перемотування назад» фаз за допомогою реверсу градієнта. Це схоже на відтворення запису, якщо змінити напрямок часу для фазових еволюцій. Градієнтна квантова пам’ять (GEM) є одним із найбільш універсальних і ефективних підходів до зберігання квантової інформації. Її ключова перевага полягає в тому, що процес дефазування і рефазування повністю контролюється зовнішніми полями. Це відкриває можливість реалізації GEM у різних фізичних системах від газових середовищ до твердотільних матеріалів. Будь-яка реалізація GEM включає середовище з атомами або іонами, механізм створення частотного градієнта, лазерні поля для запису і зчитування. GEM реалізується у: газових атомних ансамблях з магнітним градієнтом, твердотільних системах (кристали з домішками рідкоземельних іонів), оптичних волоконних системах. Основні інструменти: магнітні поля (ефект Зеємана), електричні поля (ефект Штарка).

Для кращого розуміння наведеного матеріалу розглянемо приклади.

1. Запис і відновлення імпульсу. Світловий імпульс входить у середовище з градієнтом. Його частоти розподіляються у просторі. Після реверсу градієнта відбувається рефазування, імпульс відновлюється.

2. Кероване зчитування. На відміну від фотонного еха момент зчитування можна вибрати, достатньо змінити градієнт у потрібний час. Це важливо для квантових мереж.

3. Квантова пам'ять для однофотонних станів. GEM дозволяє записувати одиночні фотони, зберігати їхню фазову інформацію і відновлювати з високою точністю.

Градієнтна пам'ять є одним із найбільш перспективних підходів до квантового зберігання світла. Вона поєднує ідеї фотонного еха, контрольовану фізику неоднорідного уширення, можливість точного керування процесами запису і зчитування. Основні переваги: низький рівень шуму, висока ефективність, придатність для квантових застосувань. GEM демонструє, як контроль над просторовими та частотними характеристиками середовища дозволяє реалізувати надійні квантові інтерфейси, що є критично важливими для розвитку квантових комунікацій і квантового інтернету.

10.4. Принципи побудови квантових інтерфейсів на основі резонансних систем

Квантові інтерфейси є одним із ключових елементів сучасних квантових технологій, оскільки саме вони забезпечують можливість когерентного обміну квантовою інформацією між різними фізичними системами. У квантових мережах, системах квантового зв'язку та квантових обчисленнях інформація може переноситися різними носіями – фотонами, атомними ансамблями, іонами, надпровідниковими кубітами або спіновими системами. Однак для створення єдиної функціональної квантової інфраструктури необхідно забезпечити узгоджену взаємодію між цими носіями. Саме цю функцію виконують квантові інтерфейси – системи, що дозволяють здійснювати передачу, зберігання, перетворення та відновлення квантових станів без руйнування їх когерентності.

Особливе значення мають інтерфейси, побудовані на основі резонансних систем, де взаємодія між світлом і речовиною відбувається поблизу резонансних частот атомних або фотонних переходів. За таких умов навіть слабкі

електромагнітні поля можуть ефективно взаємодіяти з квантовими станами речовини, забезпечуючи високий ступінь контролю над процесами передачі інформації. Резонансна взаємодія дозволяє реалізовувати когерентний обмін енергією між фотонами та атомними системами, що лежить в основі квантової пам'яті, телепортації, квантових повторювачів і гібридних квантових мереж.

У загальному випадку квантовий інтерфейс – це фізична система або процес, який забезпечує зворотне перетворення квантового стану одного носія в стан іншого носія. Фізично квантовий інтерфейс є системою, у якій реалізується контрольована резонансна взаємодія між електромагнітним полем і квантовими станами речовини. У найпростішому випадку така взаємодія описується перетворенням:

$$| 1_{\text{фотон}}\rangle \rightarrow | 1_{\text{спін}}\rangle.$$

де $| 1_{\text{фотон}}\rangle$ – однофотонний стан електромагнітного поля; $| 1_{\text{спін}}\rangle$ – колективне спінове збудження атомного ансамблю. Це означає, що квантовий стан фотона записується в атомний ансамбль або іншу резонансну систему. Тобто інформація, яку переносив фотон, записується у внутрішній стан атомного середовища. Надалі можливий зворотний процес $| 1_{\text{фотон}}\rangle \rightarrow | 1_{\text{спін}}\rangle$, що відповідає зчитуванню інформації. Основою роботи таких інтерфейсів є резонансна взаємодія $\omega \approx \omega_0$, де ω – частота зовнішнього поля; ω_0 – частота квантового переходу. За цієї умови ймовірність обміну енергією між світлом і речовиною різко зростає.

Одним із найважливіших типів резонансних інтерфейсів є системи резонаторної квантової електродинаміки (cavity-QED, cavity quantum electrodynamics), у яких атом взаємодіє не з вільним полем, а з модою оптичного резонатора. Така взаємодія описується гамільтоніаном Джейнса–Каммінгса:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g\left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+\right). \qquad (10.29)$$

де ω_c – частота моди резонатора; $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ – оператори народження і знищення фотонів; g – константа зв'язку; $\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+$ – оператори переходів атома. Якщо $g \gg \kappa, \gamma$, де κ – втрати резонатора, а γ – швидкість атомної релаксації, то система

перебуває у режимі сильного зв’язку. Це забезпечує ефективний когерентний обмін між атомом і фотоном. У цьому режимі фотон багаторазово обмінюється енергією з атомом до того, як буде втрачений. Це дозволяє реалізувати квантову пам’ять, однофотонні джерела, квантові логічні елементи, інтерфейси між різними кубітами. Саме cavity-QED системи лежать в основі багатьох гібридних квантових інтерфейсів.

Окремий напрям – надпровідникові квантові інтерфейси. У надпровідникових схемах кубіти взаємодіють із мікрохвильовими резонаторами. Перевага таких систем полягає у високому ступені інтеграції та можливості масштабування.

У квантових мережах виникає необхідність з’єднувати різні типи носіїв інформації. Наприклад, фотони добре передають інформацію, а атомні системи добре її зберігають. Тому квантовий інтерфейс має виконувати роль «перекладача» між цими фізичними платформами. Важливим параметром інтерфейсу є ефективність (10.19). Іншим критерієм є точність відтворення (10.21). Іншим прикладом є інтерфейси між оптичними й мікрохвильовими фотонами. Це особливо важливо для поєднання надпровідникових квантових комп’ютерів із оптичними мережами.

Таким чином, квантові інтерфейси на основі резонансних систем забезпечують можливість когерентного обміну квантовою інформацією між світлом і речовиною, що є фундаментально необхідним для реалізації квантової пам’яті, квантових мереж та гібридних квантових архітектур. Проте для практичного створення таких інтерфейсів недостатньо лише загального розуміння принципів резонансної взаємодії. Необхідно детально дослідити фізичні механізми, за допомогою яких окремі фотони можуть ефективно взаємодіяти з окремими квантовими системами.

Особливого значення тут набувають системи, у яких взаємодія світла і матерії підсилюється за допомогою оптичного резонатора. Резонатор не лише збільшує час взаємодії фотона з атомом, але й формує дискретні моди електромагнітного поля, що дозволяє перейти до режиму сильної когерентної

взаємодії. Саме такі системи лежать в основі квантової електродинаміки резонатора (cavity-QED) і є фізичною платформою для реалізації високоефективних квантових інтерфейсів типу «атом–фотон». Тому доцільно здійснити детальний розгляд процесів взаємодії атома з фотоном у резонаторі, оскільки саме вони визначають можливості створення квантових пам'ятей, однофотонних джерел, квантових вентилів і масштабованих квантових мереж.

Оптичний резонатор – це система дзеркал, між якими світло багаторазово відбивається., Оптичні резонатори лежать в основі лазерів, квантових інтерфейсів та експериментів у квантовій електродинаміці резонатора. Найпростіший резонатор містить два дзеркала, між якими знаходиться світло. Світло багаторазово відбивається, утворюючи стоячу хвилю. У резонаторі світло може існувати лише на певних частотах:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \tag{10.30}$$

де L – довжина резонатора, n – ціле число. Як наслідок, **с**пектр поля є дискретним, можна вибірково взаємодіяти з атомами. Кожна дозволена частота відповідає **моді резонатора:** різні n – різні частоти. Кожна мода має свою структуру поля. У резонаторі хвиля, що йде вперед і назад, інтерферує. Виникають вузли (нуль поля) і пучності (максимум). Оскільки світло багаторазово відбивається, ефективна довжина взаємодії зростає, інтенсивність накопичується. Це призводить до підсилення поля і підвищення ймовірності взаємодії з атомами.

Для характеристики резонатора водиться параметр, який називається «добротність резонатора» (Q - фактор):

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}. \tag{10.31}$$

Він показує наскільки добре резонатор «утримує» світло.

Таким чином, оптичний резонатор перетворює світло з вільно поширюваного поля на дискретну, добре контрольовану систему. Резонатори дозволяють підсилити взаємодію «атом–фотон», контролювати випромінювання, реалізувати квантові інтерфейси. Наявність оптичного

резонатора принципово змінює характер взаємодії світла і матерії, забезпечуючи умови для сильної когерентної взаємодії навіть між одиночним атомом і окремими фотонами. У цьому випадку класичний опис електромагнітного поля стає недостатнім, і виникає необхідність у повністю квантовому підході, який враховує дискретність як атомних енергетичних рівнів, так і фотонного поля. Такий підхід реалізується в моделі Джейнса–Каммінгса, яка є базовою для опису систем типу «атом–резонатор» у квантовій оптиці. Ця модель лежить в основі квантової електродинаміки резонатора і широко використовується для аналізу квантових пам'ятей та інтерфейсів.

Модель Джейнса–Каммінгса описує взаємодію одного атома з однією модою електромагнітного поля у резонаторі. Гамільтоніан системи:

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar g(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-), \qquad (10.32)$$

де ω_c – частота моди резонатора; ω_0 – частота атомного переходу; $a^\dagger$, a – оператори народження і знищення фотонів; σ^+, σ^-– оператори переходу атома; g – константа взаємодії. Гамільтоніан складається з трьох частин: поле $\hbar\omega_c a^\dagger a$ – енергія фотонів; атом $\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$ – енергія атома; взаємодія $\hbar g(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-)$.

У резонаторі атом і фотон можуть обмінюватися енергією: фотон поглинається атомом – атом збуджується; атом випромінює фотон – фотон знову з'являється. Цей процес є когерентним і оборотним. В результаті виникають осциляції Рабі між станами: $|e,0\rangle$ – атом збуджений, фотон відсутній і $|g,1\rangle$ – атом в основному стані, один фотон. Частота осциляцій $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$ залежить від числа фотонів. Навіть при $n = 0$ система може осцилювати. Відбувається взаємодія з вакуумом.

Розрізняють такі режими взаємодії:

1. Слабкий зв'язок. Взаємодія слабша за втрати, осциляції затухають, фотон швидко залишає резонатор, атом поводиться майже незалежно.

2. Сильний зв'язок. У цьому режимі швидкість взаємодії g перевищує втрати, спостерігаються чіткі осциляції обміну енергією, атом і фотон

утворюють єдину систему. У сильному зв’язку система перебуває у суперпозиції станів, виникає заплутаність між атомом і фотоном, їх неможливо описати окремо. Наприклад, $|\Psi\rangle = \alpha\,|e,0\rangle + \beta\,|g,1\rangle$. Це фундамент для квантових вентилів і квантових інтерфейсів.

У класичній фізиці взаємодія світла з речовиною описується як взаємодія електромагнітної хвилі з зарядженими частинками. Проте на мікроскопічному рівні така картина є неповною. Світло має квантову природу, а атоми – дискретну структуру енергетичних рівнів. Тому їхня взаємодія повинна описуватись у рамках квантової механіки. Квантова природа цієї взаємодії проявляється у дискретному обміні енергією, когерентних ефектах і можливості існування суперпозиційних станів.

Оптичний резонатор є одним із ключових елементів сучасної квантової оптики. Його здатність утримувати світло протягом тривалого часу та формувати дискретні моди поля робить його потужним інструментом для керування взаємодією світла і матерії. Саме завдяки резонаторам стає можливим реалізувати ефективні квантові інтерфейси, квантову пам’ять і інші елементи квантових технологій.

Резонатор виконує кілька функцій у квантових технологіях:

1. Підсилення взаємодії світла і матерії. У резонаторі фотон багаторазово проходить через атом, ефективна взаємодія зростає. Це дозволяє досягти режиму сильного зв’язку і спостерігати квантові ефекти.

2. Керування спонтанним випромінюванням. Резонатор змінює властивості вакууму, зокрема може підсилювати або пригнічувати випромінювання, визначає, у які моди випромінюється фотон. Це явище відоме як ефект Пурселла.

3. Контроль моди поля. У резонаторі існують лише певні частоти, спектр стає дискретним. Це дозволяє точно контролювати частоту фотонів, формувати квантові стани світла.

4. Генерація квантових станів світла. Резонатори використовуються для генерації однофотонних станів, створення заплутаних станів і формування некласичного світла. Це дозволяє створювати фотони «за вимогою».

5. Квантові інтерфейси. Це ключовий елемент квантових мереж. Резонатор дозволяє реалізувати перетворення фотон ↔ атом. Тобто перетворення квантового стану атома у фотон, передача інформації через фотон, запис назад у атом.

6. Зв'язок із квантовою пам'яттю. У поєднанні з атомами резонатор підвищує ефективність запису і зчитування, покращує взаємодію з одиночними фотонами. На відміну від ансамблів тут інформація зберігається в окремих атомах, взаємодія є більш контрольованою і можливе точне керування окремими квантами.

7. Масштабованість квантових систем. Резонатори дозволяють об'єднувати квантові системи і створювати складні архітектури. Обмеження: втрати (неідеальні дзеркала), декогеренція, складність виготовлення.

Розглянемо приклади.

1. Вакуумні Рабі-осциляції. Один атом у резонаторі. Початково: стан $|e,0\rangle$, з часом: система переходить у $|g,1\rangle$ і процес повторюється. Це демонструє обмін енергією між атомом і фотоном.

2. Однофотонне джерело. Атом збуджується лазером, переходить у збуджений стан, випромінює фотон у резонатор, фотон виходить у заданому напрямку.

3. Квантова передача інформації. Атом кодує квантовий стан, резонатор переводить його у фотон, фотон передає інформацію, інший резонатор записує її у новий атом.

Взаємодія атома з фотоном у резонаторі є фундаментальним механізмом квантової оптики, що дозволяє досягати сильного зв'язку між світлом і матерією, реалізовувати когерентний обмін енергією і створювати заплутані стани. Резонатори перетворюють слабку взаємодію на керований квантовий процес, що відкриває шлях до квантових комп'ютерів, квантових мереж, ефективних

квантових інтерфейсів. У поєднанні з іншими підходами (такими як GEM або фотонне ехо) вони формують основу сучасних технологій квантової пам’яті та передачі інформації.

10.5. Технологічні платформи та порівняльний аналіз систем зберігання станів

У попередніх підрозділах було розглянуто різні фізичні реалізації квантової пам’яті: атомні ансамблі, системи на основі фотонного еха та градієнтної пам’яті, взаємодію в резонаторах, а також твердотільні структури з рідкоземельними іонами. Кожна з цих платформ має свої унікальні переваги та обмеження.

У зв’язку з цим виникає важливе питання: яка платформа є найкращою для конкретних задач квантових технологій? Відповідь не є однозначною, оскільки вибір залежить від вимог до системи: швидкодії, часу зберігання, масштабованості чи інтеграції.

Квантова пам’ять є ключовим елементом квантових інформаційних систем, зокрема квантових мереж, повторювачів і процесорів. Проте ефективність її роботи визначається не лише здатністю зберігати інформацію, а й низкою параметрів, які характеризують якість, надійність і практичну придатність системи.

Тому для порівняння різних реалізацій квантових пам’ятей вводяться стандартизовані критерії оцінки.

1. Ефективність (Efficiency). Ефективність – це відношення кількості $N_{\text{вих.}}$ відновлених фотонів до кількості $N_{\text{вх}}$ вхідних. Ефективність показує, яка частина сигналу зберігається і відновлюється, враховує втрати у середовищі.

2 Відтворюваність (Fidelity). Показує наскільки точно відновлений стан відповідає початковому, враховує фазу і амплітуду.

3. Час когерентності (Storage time). Це максимальний час, протягом якого зберігається когерентність. Він визначає тривалість зберігання інформації.

4. Ширина смуги (Bandwidth) Це діапазон частот, які може обробляти пам’ять. Визначає швидкість роботи з імпульсами, впливає на сумісність із джерелами світла.

5. Швидкодія (Speed). Це швидкість запису та зчитування інформації. Важлива для обробки сигналів у реальному часі, залежить від протоколу (EIT, AFC, GEM).

6. Ємність (Multimode capacity). Це кількість квантових станів, які можуть бути збережені одночасно. Ємність дозволяє зберігати багато фотонів або імпульсів, що критично для квантових мереж.

7. Масштабованість (Scalability). Це можливість інтеграції у великі квантові системи. Визначає перспективи практичного застосування.

8. Рівень шуму (Noise). Це небажані процеси, що спотворюють сигнал. Впливає на відтворюваність, критичний для квантових застосувань.

9. Технологічна складність – складність реалізації та експлуатації.

Основні критерії оцінки квантової пам’яті – ефективність, фіделітність, час когерентності, ширина смуги, швидкодія та масштабованість – не є абстрактними величинами. Вони безпосередньо визначаються фізичною природою системи та протоколом пам’яті, що використовується. Різні платформи (атомні ансамблі, твердотільні системи, резонатори) і різні протоколи (фотонне ехо, GEM, AFC, EIT) оптимізують різні параметри, що створює компроміси між ними.

1. Атомні газові ансамблі. Характеристика: холодні або теплі атомні гази, слабка взаємодія з оточенням, реалізація через EIT або GEM. Переваги: дуже добра когерентність, висока ефективність взаємодії зі світлом, добре контрольовані квантові стани. Недоліки: складні експериментальні умови (лазери, вакуум), обмежена інтеграція, малий час когерентності, обмежена ширина смуги. Добрі для високої точності, але не для довгого зберігання.

2. Твердотільні системи (рідкоземельні іони). Характеристика: іони в кристалах, сильне неоднорідне уширення, реалізація AFC, GEM. Переваги: довгий час зберігання (особливо у спінових станах), висока ємність та

ефективність, велика ширина смуги, стабільність, можливість інтеграції у чипи. Недоліки: потреба у низьких температурах, складність підготовки спектра. Найкращі для довготривалого зберігання і масштабування.

3. Резонаторні системи (cavity QED). Характеристика: один або кілька атомів у резонаторі, сильний зв'язок світло–матерія, дискретні моди. Переваги: дуже висока ефективність, висока швидкодія, точний контроль квантових станів, можливість створення однофотонних джерел, висока достовірність. Недоліки: складність реалізації, чутливість до втрат, обмежена масштабованість. Ідеальні для квантових інтерфейсів, але складні для масштабування.

4. Пам'ять на основі фотонного еха. Характеристика: використання дефазування та рефазування, використовує неоднорідне уширення, реалізація в газах і твердих тілах. Переваги: велика ширина смуги, висока швидкодія, можливість багатоканального зберігання. Недоліки: середня швидкодія, обмежена достовірність, шум у деяких схемах, складність керування імпульсами. Добра для швидких процесів, але має шумові обмеження.

5. Градієнтна пам'ять (GEM). Характеристика: контрольоване неоднорідне уширення, рефазування через зміну поля. Переваги: низький шум, висока швидкодія, висока керованість, висока ефективність, повний контроль часу, висока достовірність, придатність для квантових станів. Недоліки: складність створення стабільного градієнта, технічні вимоги до поля. Одна з найкращих універсальних схем.

Жодна система не є ідеальною. Вибір платформи залежить від задачі: квантові мережі: потрібна довга пам'ять → твердотільні системи; квантові процесори: потрібен точний контроль → резонатори; експериментальні дослідження → атомні гази.

В таблиці 10.3 наведено порівняння критеріїв оцінки різних платформ та протоколів

Таблиця 10.3. Порівняльна таблиця різних платформ/протоколів

Платформа / протокол	Ефек-тив-ність	Достовір-ність	Час зберіга-ння	Швид-кодія	Масштабо-ваність
Газові ансамблі	середня	висока	середній	середня	обмежена
Рідкозе-мельні іони	висока	висока	дуже великий	середня	висока
Резона-тори	дуже висока	дуже висока	малий	висока	низька
Фотон-не ехо	середня	середня	середній	висока	середня
GEM	висока	висока	середній	висока	добра

Розглянемо приклади.

1. Квантовий повторювач. Потрібна довготривала пам’ять, використовується твердотільна система або GEM.

2. Однофотонний інтерфейс. Потрібна висока точність, використовується резонаторна система.

3. Лабораторні експерименти. Дослідження фундаментальних ефектів, використовуються атомні гази.

Різні платформи квантової пам’яті відображають різні підходи до розв’язання однієї фундаментальної задачі – збереження квантової інформації. Не існує універсальної системи. Вибір залежить від конкретного застосування. Найбільш перспективними є гібридні підходи, що поєднують переваги різних платформ. Порівняння цих систем дозволяє краще зрозуміти напрямки розвитку квантових технологій і сформувати основу для створення ефективних квантових мереж майбутнього.

10.6. Функціонування квантової пам’яті у протоколах мережевого зв’язку

Квантові мережі – це наступний етап розвитку інформаційних технологій, у яких інформація передається і обробляється не класичними бітами, а квантовими станами. Основними носіями інформації в таких мережах є фотони, тоді як її обробка та зберігання часто здійснюється у матеріальних системах – атомах, іонах або твердотільних структурах. У цьому контексті ключову роль відіграють квантові інтерфейси – фізичні механізми, які забезпечують узгоджену взаємодію між різними елементами мережі. Саме вони дозволяють передавати квантову інформацію між різними носіями, зберігати її та відновлювати без втрати квантових властивостей. Квантовий інтерфейс – це система або процес, що забезпечує: перетворення квантового стану з одного фізичного носія в інший; передачу інформації між різними квантовими платформами; збереження когерентності та заплутаності. У більшості випадків це означає встановлення ефективної взаємодії між світлом (фотонами) – носіями інформації, і матеріальними системами – носіями пам’яті. У найпростішому випадку схематично це можна представити так:

фотон ↔ атом (або інша система)

Залежно від функції та фізичної реалізації квантові інтерфейси можна класифікувати за різними ознаками. Найбільш важливою є їх роль у передачі та обробці інформації, що дозволяє виділити кілька основних типів.

1. Інтерфейс «світло–матерія». У квантових інформаційних системах фотони є основними носіями інформації на великих відстанях, тоді як матеріальні системи (атоми, іони, тверді тіла) використовуються для її зберігання та обробки. Це створює необхідність у перетворенні квантових станів між світлом і матерією. Призначення даного інтерфейсу – перетворення квантового стану фотона у матеріальне збудження і навпаки:

фотон ↔ атомне (або інше) збудження

Основні функції: запис квантового стану світла у квантову пам’ять; зберігання інформації у матеріальному середовищі; відновлення фотонного

стану (зчитування); забезпечення зв'язку між каналами передачі і вузлами обробки. Інтерфейс реалізується через когерентну взаємодію світла з середовищем, зокрема: електромагнітно індуковану прозорість (EIT), Raman-переходи, ефекти фотонного еха, взаємодію в оптичних резонаторах (cavity-QED). Cavity QED (cavity Quantum Electrodynamics) – це розділ квантової оптики, який вивчає взаємодію квантового світла (фотонів) з атомами або іншими квантовими системами всередині оптичного резонатора. Інтерфейс забезпечує перенесення квантового стану таким чином, що квантова інформація зберігається, когерентність не порушується, можливе збереження і передача заплутаних станів. В результаті досягається ефективний зв'язок між передачею і зберіганням інформації, реалізація квантових пам'ятей, побудова квантових мереж. Інтерфейс «світло–матерія» – це «перетворювач фотона у квантову пам'ять і назад».

2. Частотні інтерфейси. У квантових мережах різні фізичні системи працюють у різних спектральних діапазонах: атомні системи зазвичай взаємодіють зі світлом у видимому або ближньому інфрачервоному діапазоні, тоді як оптичні волокна мають мінімальні втрати у телеком-діапазоні (≈1550 нм). Це створює необхідність узгодження частот фотонів між різними елементами мережі. Призначення такого інтерфейсу – перетворення частоти фотонів без втрати квантового стану:

$$\omega_1 \rightarrow \omega_2$$

Основні функції: узгодження квантових джерел і пам'ятей, забезпечення ефективної передачі через оптичні волокна, інтеграція різних платформ у єдину квантову систему. Частотне перетворення реалізується за допомогою нелінійної оптики, зокрема: сумарної частоти (sum-frequency generation), різницевої частоти (difference-frequency generation), параметричних процесів. Інтерфейс забезпечує зміну частоти фотона таким чином, що квантова інформація зберігається, когерентність не порушується, можливе збереження заплутаності. В результаті досягається спектральна сумісність елементів мережі, ефективна передача квантової інформації на великі відстані.

3. Модові / просторові інтерфейси. У квантових оптичних системах квантова інформація може кодуватися не лише у частоті, але й у просторових, поляризаційних та часових модах світла. Різні елементи квантової мережі (джерела фотонів, квантові пам'яті, оптичні волокна) часто працюють із різними типами мод, що вимагає їх узгодження. Призначення цих інтерфейсів – перетворення між різними модами світла без втрати квантового стану:

$$\text{мода}_1 \rightarrow \text{мода}_2$$

Основні функції: узгодження просторових профілів світлових пучків, забезпечення ефективного введення світла у хвилеводи або волокна, передача квантових станів між різними оптичними системами. Модове перетворення реалізується за допомогою оптичних елементів (лінзи, дзеркала), хвилеводних структур, фазових і амплітудних модуляторів, фотонних інтегральних схем. Інтерфейс забезпечує зміну просторової або модової структури світла таким чином, що квантова інформація зберігається, когерентність не порушується, можливе передавання заплутаних станів. В результаті досягається ефективне узгодження різних елементів квантової системи, мінімізація втрат при передачі світла, підвищення ефективності квантових інтерфейсів і пам'ятей. Модовий інтерфейс – це «узгодження форми світла» без зміни його квантового стану.

4. Інтерфейси між квантовими платформами (інтерфейс «квант–квант»). У сучасних квантових технологіях використовуються різні фізичні платформи: атоми, іони, фотони, надпровідні кубіти тощо. Кожна з них має свої переваги, наприклад, фотони ефективні для передачі інформації, тоді як атомні системи – для її зберігання. Це створює необхідність у перетворенні квантових станів між різними типами систем. Призначення – перетворення квантового стану між різними фізичними системами:

$$\text{система}_1 \leftrightarrow \text{система}_2$$

Основні функції: передача квантового стану між різними платформами, збереження когерентності та заплутаності, інтеграція різних квантових технологій у єдину систему. Інтерфейс реалізується через проміжну взаємодію, зазвичай за участю фотонів: «атом ↔ фотон ↔ інша система» або через квантові

перетворювачі (transducers), використовуючи резонатори, нелінійні процеси або спінові збудження. Інтерфейс забезпечує перенесення квантового стану таким чином, що інформація не втрачається, когерентність зберігається, можливе перенесення заплутаних станів між різними системами. В результаті досягається об'єднання різних квантових платформ, створення гібридних квантових систем, реалізація масштабованих квантових мереж. Інтерфейс «квант–квант» – це «перекладач між різними квантовими системами».

5. Квантові інтерфейси у квантових повторювачах. У квантових мережах передача інформації на великі відстані обмежується втратами у волокнах і декогеренцією. Для подолання цих обмежень використовуються **квантові повторювачі**, які розбивають канал на коротші ділянки та відновлюють квантову інформацію. Ключову роль у їх роботі відіграють квантові інтерфейси, що забезпечують взаємодію між фотонами, квантовою пам'яттю та вузлами мережі. Призначення – забезпечення передачі, зберігання та відновлення квантових станів у розподіленій мережі:

фотон ↔ пам'ять ↔ фотон

Основні функції: прийом і запис фотонів у квантову пам'ять, синхронізація ймовірнісних процесів генерації заплутаності, участь у процедурах обміну заплутаністю (entanglement swapping), передача квантових станів між сегментами мережі. Робота інтерфейсу базується на взаємодії «світло–матерія» (запис/зчитування), використанні квантової пам'яті як буфера, застосуванні протоколів заплутаності та вимірювань. Інтерфейс забезпечує узгоджену роботу вузлів мережі таким чином, що квантова інформація може зберігатися до моменту успішної передачі, різні ділянки мережі синхронізуються, зберігається когерентність і заплутаність. В результаті досягається передача квантової інформації на великі відстані, компенсація втрат у каналі, побудова масштабованих квантових мереж. Якщо стисло: інтерфейс у квантовому повторювачі — це «вузол узгодження і відновлення квантової інформації в мережі».

6. Інтерфейс «пам'ять–канал». Квантові процеси, такі як генерація фотонів або створення заплутаних станів, мають ймовірнісний (стохастичний) характер. Унаслідок цього відповідні події відбуваються у випадкові моменти часу і, як правило, не є синхронізованими між різними вузлами квантової мережі. У таких умовах виникає необхідність у механізмі, який забезпечує узгодження роботи різних елементів системи. Цю функцію виконує інтерфейс «пам'ять–канал». Призначення: забезпечення ефективного зв'язку між квантовою пам'яттю та оптичним каналом передачі інформації. Основні функції: прийом фотонів із каналу, зберігання квантового стану у пам'яті (буферизація), відкладене зчитування і передача далі. Квантова пам'ять у цьому випадку виконує роль синхронізуючого елемента, який «очікує» на необхідну подію, дозволяє узгодити моменти передачі, забезпечує коректну роботу квантових протоколів. В результаті досягається синхронізація квантових процесів, узгоджена робота вузлів мережі, можливість реалізації квантових повторювачів. Інтерфейс «пам'ять–канал» забезпечує буферизацію і синхронізацію ймовірнісних квантових процесів, дозволяючи узгодити роботу вузлів квантової мережі.

7. Інтерфейс часових режимів. У квантових оптичних системах інформація часто кодується у часовій структурі світлових імпульсів, наприклад, у вигляді коротких імпульсів або time-bin станів. Різні елементи квантових мереж можуть працювати з різною тривалістю імпульсів, часовими інтервалами або швидкістю обробки, що створює необхідність узгодження часових характеристик сигналів. Призначення – перетворення та керування часовою структурою квантових станів світла:

$$\text{часовий режим}_1 \rightarrow \text{часовий режим}_2$$

Основні функції: затримка та синхронізація квантових сигналів, перетворення тривалості імпульсів, узгодження часових інтервалів між подіями, формування time-bin квантових станів. Інтерфейс реалізується за допомогою квантових пам'ятей (як керованих затримок), дисперсійних середовищ, оптичних резонаторів і ліній затримки, електрооптичного керування. Інтерфейс

забезпечує зміну часової структури сигналу таким чином, що квантова інформація зберігається, когерентність не порушується, можливе узгодження незалежних квантових процесів. В результаті досягається синхронізація роботи елементів квантової мережі, ефективна обробка ймовірнісних подій, підвищення узгодженості квантових протоколів. Інтерфейс часових режимів – це «керування часом квантових сигналів без втрати їхнього стану».

Квантові інтерфейси є ключовими елементами квантових мереж, оскільки вони забезпечують передачу, перетворення та узгодження квантової інформації між різними системами. Однак, на відміну від класичних інтерфейсів, вони повинні працювати в умовах, де навіть незначні втрати або шум можуть призвести до руйнування квантового стану. Тому до квантових інтерфейсів висувається ряд суворих вимог, які визначають їх придатність для практичного використання.

Основні вимоги до квантових інтерфейсів:

1. Висока відтворюваність. Інтерфейс повинен передавати квантовий стан без спотворення $F \approx 1$. Фізичний зміст: збереження фази та амплітуди, відсутність спотворень квантового стану.

2. Висока ефективність. Мінімальні втрати при передачі і перетворенні. Фізичний зміст: кожна втрата – це втрата фотона, вона критична для квантових мереж.

3. Збереження когерентності. Інтерфейс повинен: не руйнувати суперпозицію, не викликати декогеренцію.

4. Збереження заплутаності. інтерфейс не повинен руйнувати квантову кореляцію, що важливо для квантових протоколів.

5. Узгодження параметрів (matching). Необхідно узгодити частоти, просторові моди, часові режими. Без цього ефективність різко падає.

6. Низький рівень шуму. Джерела шуму: спонтанне випромінювання, теплові ефекти, паразитні процеси. Шум має бути нижчим за квантовий рівень.

7. Широка смуга пропускання. Забезпечує здатність працювати з короткими імпульсами, сумісність із різними джерелами.

8. Швидкодія. Швидкий запис і передача, що важливо для мереж у реальному часі.

9. Масштабованість. Можливість інтеграції у великі системи, сумісність із фотонними технологіями.

10. Стабільність. Робота без постійного переналаштування, стійкість до зовнішніх впливів.

Саме ці вимоги визначають можливість створення практичних квантових мереж і технологій. Незважаючи на значний прогрес у розвитку квантових інтерфейсів і пам'яті, їх практична реалізація стикається з рядом складних технологічних проблем. Ці виклики пов'язані як із фундаментальними квантовими обмеженнями, так і з технічними аспектами створення стабільних і масштабованих систем. Подолання цих труднощів є необхідною умовою для побудови повноцінних квантових мереж.

Основні технологічні виклики:

1. Декогеренція як фундаментальне обмеження. Однією з головних проблем є декогеренція – процес втрати квантової когерентності через взаємодію з навколишнім середовищем. Фізична суть: квантова система взаємодіє з оточенням, фаза квантового стану стає невизначеною, система переходить у класичний стан. Джерела декогеренції: теплові коливання (фонони), магнітні та електричні шуми, неоднорідності середовища. Наслідки: втрата квантової інформації обмеження часу зберігання.

2. Оптичні втрати та ефективність. Квантова інформація часто переноситься фотонами, але фотони поглинаються в оптичних волокнах, виникають втрати при взаємодії з середовищем, ефективність запису і зчитування обмежена. Кожен втрачений фотон – це втрата інформації. Проблема: на відміну від класичних систем, квантові сигнали не можна просто підсилити. Рішення: використання квантових повторювачів, оптимізація інтерфейсів.

3. Шум: зниження відтворюваності, руйнування квантових станів.

4. Узгодження частот і спектральних характеристик. Різні квантові системи працюють у різних частотних діапазонах: атоми у видимій та ІЧ - діапазонах, телеком-волокна – інші довжини хвиль, твердотільні системи – ще інші частоти. До того ж вони мають різні часові масштаби, просторові моди. Наслідки: низька ефективність передачі, втрати сигналу. Рішення: квантове перетворення частоти, використання нелінійної оптики.

5. Слабка взаємодія світла і матерії: один фотон слабо взаємодіє з атомом. Вирішення: використання резонаторів, колективні ефекти.

6. Обмеження часу когерентності. Навіть у найкращих системах час зберігання обмежений. Складно поєднати довгий час з великою швидкодією.

7. Складність масштабування. Більшість сучасних експериментів працюють із невеликою кількістю вузлів, важко інтегрувати багато квантових елементів, зростає складність керування.

8. Технологічна складність. Це потреба у наднизьких температурах, стабільних лазерах, точному керуванні полями.

9. Інтеграція з фотонними платформами: складність поєднання різних матеріалів, втрати на межах середовищ.

10. Стабільність: чутливість до зовнішніх впливів, складність довготривалої роботи.

Різні фізичні платформи квантових технологій – фотони, атоми, іони, надпровідні кубіти – мають суттєво відмінні характеристики і не можуть безпосередньо взаємодіяти між собою. Саме тому для їх об’єднання необхідні спеціальні механізми перетворення квантових станів. Такі механізми реалізуються у вигляді квантових інтерфейсів.

Таким чином, квантові інтерфейси є ключовими елементами, що забезпечують зв’язок між різними фізичними системами і роблять можливим створення гібридних квантових архітектур. Гібридна квантова система – це система, що поєднує різні фізичні платформи для реалізації передачі, зберігання та обробки квантової інформації. Тобто гібридна система – це набір різних платформ, а інтерфейс забезпечує зв’язок між ними:

$$\text{Гібридна система} = \text{платформа}_1 + \text{інтерфейс} + \text{платформа}_2$$

Таким чином, інтерфейси виконують роль «перекладачів» між різними квантовими платформами. Без інтерфейсів системи ізольовані, квантова мережа неможлива. З інтерфейсами відбувається передача станів, зберігається когерентність, формується єдина система.

Щоб краще зрозуміти наведений матеріал, звернемося до прикладів.

1. Передача квантового стану між вузлами. Атом генерує фотон. Фотон передає інформацію через волокно. Інший вузол записує його у квантову пам’ять. Це базовий процес квантової мережі.

2. Частотне перетворення. Фотон з атомної системи має «незручну» частоту. За допомогою нелінійного кристалу його частота змінюється, інформація зберігається.

3. Квантовий повторювач. Заплутаність створюється між сусідніми вузлами, зберігається у пам’яті, об’єднується у довгий канал.

Квантові інтерфейси є центральним елементом квантових мереж, що забезпечує взаємодію між світлом і матерією, передачу інформації між різними системами, узгоджену роботу квантових вузлів. Розвиток ефективних квантових інтерфейсів є необхідною умовою для створення масштабованого квантового інтернету, що поєднуватиме різні квантові технології в єдину глобальну систему.

РОЗДІЛ 11. АРХІТЕКТУРА КВАНТОВИХ ПОВТОРЮВАЧІВ

11.1. Обмеження передачі станів на великих відстанях та методи їх подолання

Передача квантових станів на великі відстані є однією з центральних задач сучасної квантової інформатики та квантових комунікацій. Саме можливість надійної передачі квантової інформації між віддаленими вузлами лежить в основі квантового інтернету, квантової криптографії, розподілених квантових обчислень та глобальних квантових мереж. На відміну від класичних систем зв'язку, де інформація передається у вигляді електричних або оптичних сигналів і може бути підсилена або скопійована без фундаментальних обмежень, у квантових системах інформація кодується у квантових станах, наприклад, у станах фотонів. Це накладає на передачу квантових станів низку принципових фізичних факторів, пов'язаних із декогеренцією, втратами та неможливістю точного копіювання квантових станів. У класичному зв'язку ослаблення сигналу компенсується підсилювачами. Проте у квантовій механіці така процедура неможлива через фундаментальні закони квантової механіки, зокрема через теорему про заборону клонування: $\psi\rangle \nrightarrow |\psi\rangle \mid \psi\rangle$. Це означає, що невідомий квантовий стан неможливо точно скопіювати. Саме тому класичні методи регенерації сигналу не можуть бути безпосередньо використані у квантових мережах. Це змушує шукати принципово нові методи передачі інформації, які не мають аналогів у класичній теорії зв'язку. Основним носієм квантової інформації у системах далекого зв'язку зазвичай є фотонні стани. Фотони є зручними носіями інформації, оскільки слабко взаємодіють із середовищем, можуть передаватися оптоволокном і придатні для створення заплутаних станів. Однак навіть фотонні системи зазнають значних втрат на великих відстанях. Квантова інформація найчастіше передається фотонами через оптичні волокна і атмосферні канали. У реальному середовищі фотони взаємодіють із матеріалом, що призводить до втрат. Виділяють такі основні механізми втрат: поглинання – фотон передає енергію середовищу і зникає;

розсіювання – фотон змінює напрямок і не потрапляє до приймача; дефекти середовища – неоднорідності викликають додаткові втрати.

Узагальнено ці процеси описуються експоненційним законом загасання:

$$I(L) = I_0 e^{-\alpha L}, \qquad (11.1)$$

де I_0 – початкова інтенсивність, $I(L)$ – інтенсивність після проходження відстані L; L – довжина каналу., α – коефіцієнт загасання. Цей вираз означає, що зі збільшенням відстані кількість фотонів, які досягають приймача, швидко зменшується. У телекомунікаційних волокнах, наприклад, $\alpha \approx 0.2$ дБ/км. Це означає, що на сотнях кілометрів більшість фотонів втрачається. Ймовірність передачі фотона $\eta = e^{-\alpha L}$. При великих L, $\eta \to 0$. Фізично це означає, що фотон або поглинається середовищем, або розсіюється. В результаті ймовірність успішної передачі квантового біта (кубіта) падає експоненційно. У квантовій теорії інформації втрати описуються як втратний канал (loss channel). Його особливості наступні: випадкове зникнення фотонів, неможливість відновлення втраченого стану, стохастичний характер процесу. Це означає, що частина переданих квантових станів просто не існує на виході, інформація втрачається безповоротно. На відміну від класичних систем, тут немає можливості «відновити сигнал за шумом», якщо фотон втрачений. У класичних мережах сигнал можна підсилити через такий ланцюг: слабкий сигнал → підсилювач → сильний сигнал. У квантовій фізиці це неможливо через фундаментальний принцип – теорему про заборону клонування. Вона стверджує, що неможливо створити точну копію невідомого квантового стану. Це означає, що ми не можемо «скопіювати» квантовий сигнал, не можемо його підсилити без спотворення, будь-яке вимірювання руйнує стан. Отже, класичні ретранслятори непридатні для квантових систем.

Окрім фізичних втрат, важливою проблемою є декогеренція. Квантовий стан (наприклад, суперпозиція) зберігається лише тоді, коли система ізольована від зовнішнього середовища. Але через взаємодію з середовищем руйнується фазова когерентність. І тому навіть якщо фотон не втрачений, його квантовий стан може змінитися. Унаслідок декогеренції суперпозиція

$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ перетворюється на статистичну суміш $\rho = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|$, що означає втрату квантової інформації. Основні наслідки декогеренції – це руйнування суперпозиції, зменшення або повна втрата заплутаності, перехід до класичної поведінки. Інакше кажучи, система перестає бути «квантовою» у потрібному сенсі. У підсумку навіть ті фотони, які досягають приймача, можуть вже не нести корисної квантової інформації.

Особливо критичним є вплив втрат та декогеренції на квантову заплутаність. Заплутаність – це ресурс для квантової криптографії, квантової телепортації та квантових мереж. Втрати зменшують кількість доступних заплутаних пар. Декогеренція погіршує якість заплутаності (зменшує достовірність) В результаті, навіть якщо пара частинок доходить, вона може бути непридатною для використання. Окрім цього, втрати і декогеренція діють одночасно: частина фотонів зникає, частина псується. Це створює подвійний ефект: зменшення кількості сигналів і зниження якості тих, що залишилися. У підсумку ефективність передачі падає ще швидше, ніж можна було б очікувати від кожного ефекту окремо.

Ще одним обмеженням є пропускна здатність безповторювального каналу. Вона обмежується розглянутою у розділі 8 межею PLOB (8.31). При малих η, $K \approx \eta$ і швидкість передачі експоненціально зменшується з відстанню, оскільки $\eta = e^{-\alpha L}$. Це фундаментальна межа без використання квантових повторювачів. Фізично межа PLOB означає, що втрати у квантовому каналі неможливо компенсувати класичним підсиленням. Саме тому виникає необхідність у спеціальних методах подолання втрат.

Першим важливим методом є квантова телепортація де використовується заплутаний стан і передача здійснюється не через пряме перенесення фотона, а через спільне вимірювання, класичний канал і відновлення стану.

Однак для далеких відстаней потрібне розподілення заплутаності між віддаленими вузлами. Тут виникає проблема деградації заплутаності: $C(L) \sim e^{-\alpha L}$, де C – міра заплутаності. Для її подолання використовують квантові повторювачі. Квантовий повторювач (quantum repeater) – це елемент квантової

мережі, призначений для передавання квантової інформації та/або розподілу квантової заплутаності на великі відстані, де пряме передавання через один квантовий канал стає неефективним через втрати та декогеренцію. Квантовий повторювач розбиває довгий канал на короткі сегменти:

$$L = nL_0, \tag{11.2}$$

де L_0 – довжина окремого сегмента; n – кількість сегментів. У кожному сегменті створюється заплутаність, після чого використовується обміг заплутаністю (entanglement swapping):

$$|\Phi^+\rangle_{AB} \otimes |\Phi^+\rangle_{BC} \rightarrow |\Phi^+\rangle_{AC}. \tag{11.3}$$

Цей процес називається обміном заплутаністю. Фізично це означає, що два вузли, які ніколи не взаємодіяли безпосередньо, стають заплутаними. Ключовим елементом повторювачів є квантова пам’ять. Квантова пам’ять дозволяє тимчасово зберігати квантові стани, синхронізувати вузли мережі, накопичувати успішні події генерації заплутаності. Без квантової пам’яті масштабування мереж практично неможливе.

Наступним методом є квантова корекція помилок. Основна ідея квантової корекції помилок полягає в тому, що інформація одного логічного кубіта не зберігається в одному фізичному кубіті, а розподіляється між багатьма фізичними кубітами. Логічні стани $|0L\rangle$ та $|1L\rangle$ являють собою спеціальні багатокубітні заплутані стани, які дозволяють виявляти та виправляти помилки без руйнування квантової інформації. Наприклад, у коді Шора один логічний кубіт кодується дев'ятьма фізичними кубітами. Таке надлишкове кодування забезпечує захист від бітових і фазових помилок, а також від втрати когерентності. Водночас реалізація квантової корекції помилок потребує значних апаратних ресурсів, оскільки для надійного зберігання одного логічного кубіта необхідна велика кількість фізичних кубітів.

Ще одним методом є очищення заплутаності (entanglement purification). Нехай є декілька шумових заплутаних пар: $\rho_1, \rho_2, \ldots$ За допомогою локальних операцій та класичного зв’язку можна отримати меншу кількість пар із вищою

достовірністю (fidelity). Це критично важливо для квантових мереж великої протяжності.

Найбільш поширеною фізичною платформою далекого квантового зв'язку є оптоволоконні канали. Їх переваги: готова інфраструктура, низькі втрати у телеком-діапазоні, сумісність із фотонними джерелами. Недоліки: експоненціальне загасання, поляризаційні шуми, дисперсія.

Іншим напрямом є супутникові квантові канали. У космосі втрати значно менші через відсутність поглинання атмосферою на більшій частині шляху. Передача між супутником і Землею характеризується показником втрат $\eta \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, що краще за тисячокілометрові волоконні лінії. Саме тому супутникові системи розглядаються як основа глобального квантового інтернету.

Важливу роль відіграють також надпровідникові та атомні системи. Надпровідникові кубіти забезпечують швидку обробку інформації і високу інтеграцію. Атомні ансамблі добре взаємодіють із фотонами і придатні для квантової пам'яті. Гібридні системи намагаються поєднати переваги різних платформ.

Розглянемо декілька практичних прикладів.

1. Передача фотонів через оптичне волокно. Уявімо, що ми передаємо одиночні фотони через волокно довжиною 100 км. Для стандартного волокна втрати ≈ 0.2 дБ/км. На відстані 100 км значна частина фотонів втрачається, сигнал стає надзвичайно слабким. На відстані 300–500 км ймовірність успішної передачі стає майже нульовою, сигнал практично зникає. Навіть ті фотони, що доходять зазнають декогеренції через неоднорідності середовища. Це означає, що без додаткових технологій передача практично неможлива.

2. Квантова криптографія. У BB84 імовірність успішної передачі фотона: $P \sim e^{-\alpha L}$. На великих відстанях ключова швидкість різко падає. Тому використовують SNSPD, супутникові канали, повторювачі.

3. Квантова телепортація. При передачі через 100 км волокна прямий канал має великі втрати. Телепортація через заплутані пари дозволяє значно підвищити достовірність передачі.

4. Супутниковий квантовий зв'язок. Передача між супутником і Землею: втрати менші, ніж у волокні, але все одно значні. Чим менше середовище для взаємодії, тим менша декогеренція.

Проблема квантової передачі на далекі відстані є фундаментальною і відрізняється від класичних задач зв'язку. Вона виникає через поєднання фізичних і квантово-механічних обмежень: втрат у каналі, декогеренції та неможливості підсилення сигналу через теорему про заборону клонування. Втрати та декогеренція є основними обмеженнями квантової передачі інформації. Втрати зменшують кількість переданих квантових станів, тоді як декогеренція погіршує їх якість, руйнуючи ключові квантові властивості. Їх поєднання призводить до того, що передача на великі відстані стає малоефективною, заплутаність деградує, квантові протоколи перестають працювати. Для подолання цих обмежень використовуються квантова телепортація, квантові повторювачі, квантова пам'ять, очищення заплутаності, корекція помилок, супутникові канали. Саме поєднання цих технологій відкриває шлях до створення глобального квантового інтернету, у якому квантова інформація передаватиметься між континентами з високою точністю та збереженням квантової когерентності.

11.2. Архітектура сегментованого каналу та каскадний обмін заплутаністю

Передача квантової інформації на великі відстані стикається з експоненціальним зростанням втрат і декогеренції, що робить пряме поширення фотонів через довгі канали малоефективним. Саме тому у квантових мережах використовується принцип сегментації каналу, відповідно до якого довга лінія зв'язку поділяється на коротші ділянки. Така структура отримала назву сегментованого квантового каналу. Вона дозволяє радикально змінити підхід до

передачі інформації: замість боротьби з втратами на великій відстані — працювати з короткими, більш керованими ділянками. Ідея сегментації полягає в тому, що створити та підтримувати квантову заплутаність на коротких відстанях значно простіше, ніж у всьому каналі одразу. Тому між сусідніми вузлами спочатку незалежно формуються локальні заплутані стани. Таким чином, сегментований канал створює основу для поетапного формування далекої квантової кореляції між віддаленими вузлами мережі. Такий підхід дозволяє суттєво підвищити ефективність передачі.

Нехай потрібно передати квантову інформацію між вузлами A і B, розділеними великою відстанню L. У прямому каналі квантовий стан рухається безпосередньо від A до B, втрати експоненціально накопичуються по всій довжині. У сегментованому підході канал ділиться на N коротших відрізків довжиною L/N. Тобто замість одного довгого каналу маємо послідовність вузлів:

$$A \to C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_N \to B. \tag{11.4}$$

Кожен сегмент має значно менші втрати і дозволяє ефективніше створювати заплутаність.

Розглянемо, як змінюється ймовірність передачі при сегментації.

Для одного довгого каналу:

$$P_{direct} = e^{-\alpha L}. \tag{11.5}$$

Для сегментованого каналу кожен сегмент має довжину L/N, ймовірність успіху в сегменті:

$$P_{seg} = e^{-\alpha\, L/N}. \tag{11.6}$$

Хоча загальний канал все ще має втрати, ключова відмінність полягає в тому, що кожен сегмент можна незалежно повторювати, поки не буде досягнуто успіху. Це радикально змінює ефективність передачі. На межах сегментів розташовуються вузли: $C_1, C_2, \dots, C_N$. Функції вузлів: генерація заплутаності, зберігання станів (квантова пам’ять), виконання вимірювань, синхронізація процесів. Вони не підсилюють сигнал, а відновлюють квантовий зв’язок іншим

способом. Фактично, кожен вузол є активним елементом мережі, а не просто передавачем Сегментація змінює сам підхід до процесу передачі інформації. у класичному випадку передається сигнал, у квантовому – створюється заплутаність. Після цього квантовий стан передається через телепортацію. Це принципово інша стратегія.

Ідея сегментації реалізується через такі кроки:

1. Створення заплутаності в кожному сегменті. У кожному сегменті створюється пара заплутаних частинок між сусідніми вузлами.

2. Збереження станів. Оскільки процес імовірнісний, невдалі спроби повторюються, а успішні стани зберігаються.

3. З'єднання сегментів. Після того як усі сегменти готові виконується заміна заплутаності.

4. Отримання глобального зв'язку. В результаті виникає заплутаність між A і B.

Це дозволяє побудувати довгий канал поступово.

У процесі сегментації квантового каналу одним із ключових питань є вибір довжини окремих сегментів. На перший погляд може здатися, що чим коротші сегменти, тим краще, адже втрати в них менші. Проте на практиці ситуація значно складніша. Занадто дрібна сегментація призводить до зростання складності системи, тоді як надто довгі сегменти не дозволяють ефективно компенсувати втрати. Тому виникає важлива задача — знайти оптимальний розмір сегментів, який забезпечує максимальну ефективність квантової передачі. Оптимальний розмір залежить від типу каналу (волокно чи атмосфера), якості детекторів, коефіцієнта втрат α, часу когерентності, ефективності квантової пам'яті, швидкості генерації заплутаності, архітектури повторювача. Тому універсального значення не існує. Завжди існує компроміс між якістю передачі і складністю системи. У реальних системах сегменти зазвичай обирають у межах 50–100 км для оптоволоконних каналів. Це пояснюється балансом між втратами і складністю, а також характеристиками сучасних технологій. Неправильний вибір довжини сегментів може суттєво

знизити продуктивність або навіть зробити систему непридатною. Тому оптимізація цього параметра є важливим етапом проєктування квантових мереж.

Сегментація дає кілька ключових переваг: зменшення втрат у кожному сегменті; можливість повторних спроб у кожному сегменті; контроль якості на кожному етапі; масштабованість системи; зменшення впливу декогеренції. Головне, що система стає керованою на кожному рівні. Попри ефективність, сегментація має свої обмеження, а саме: необхідність квантової пам’яті, складна синхронізація між вузлами, накопичення помилок при з’єднанні, потреба в очищенні заплутаності.

Сегментація квантового каналу є фундаментальним принципом, що лежить в основі квантових повторювачів. Вона дозволяє перетворити практично нерозв’язну задачу дальньої передачі на керовану послідовність локальних операцій. Завдяки поділу каналу на короткі відрізки зменшується вплив втрат, з’являється можливість повторних спроб, забезпечується масштабованість системи. Однак сама по собі сегментація ще не забезпечує зв’язок. Після формування структури сегментованого каналу наступним етапом стає генерація та розподіл заплутаності між вузлами мережі. Саме заплутані стани є головним ресурсом квантового зв’язку, оскільки вони забезпечують можливість квантової телепортації, квантової криптографії та передачі квантової інформації без прямого копіювання станів. Тому після сегментування каналу в кожному сегменті створюються пари заплутаних фотонів або атомних станів, які розподіляються між сусідніми вузлами квантової мережі. Квантова заплутаність є центральним ресурсом для квантових комунікацій, квантових повторювачів і квантових мереж. Саме вона дозволяє реалізувати такі фундаментальні протоколи, як квантова телепортація, квантовий розподіл ключа та робота квантових повторювачів. Без заплутаності неможливо побудувати ефективні квантові мережі. Заплутаність – це особливий квантовий стан двох або більше частинок, при якому їхні властивості тісно пов’язані незалежно від відстані між ними, тобто якщо його не можна представити як добуток станів окремих

частинок. Наприклад, незалежні частинки описуються окремо, заплутані мають спільний стан. Це означає, що для двох фотонів вимірювання стану одного миттєво визначає стан іншого. Це не є передачею сигналу швидше за світло, а проявом квантових кореляцій. Без надійних способів її створення неможливо реалізувати такі протоколи, як квантова телепортація чи квантовий розподіл ключа. Тому одним із ключових завдань квантової інженерії є розробка ефективних методів генерації заплутаних станів. Ці методи мають забезпечувати високу якість заплутаності, достатню швидкість та сумісність із каналами передачі. Існує кілька фізичних підходів до генерації заплутаності, які базуються на різних механізмах взаємодії квантових систем. Найбільш поширеними є оптичні методи, але також активно досліджуються атомні та твердотільні платформи.

За механізмом генерації заплутаних станів усі джерела можна поділити на ймовірнісні та детерміновані. У ймовірнісних джерелах, таких як спонтанне параметричне понижувальне перетворення та чотирихвильове змішування, утворення заплутаних пар відбувається випадково і описується певною ймовірністю. Такі джерела відносно прості в реалізації, не потребують складних систем керування окремими квантовими об'єктами, працюють при кімнатній температурі, широко використовуються в експериментах з квантової криптографії. Проте вони не забезпечують генерацію заплутаних станів у наперед визначений момент часу. На відміну від них, детерміновані джерела базуються на керованих квантових переходах в окремих квантових системах – атомах, іонах, квантових точках або надпровідникових кубітах. Вони дозволяють створювати заплутані стани за запитом із високою ефективністю, однак потребують значно складнішої експериментальної інфраструктури. наднизьких температур і висувають високі вимоги до ізоляції від зовнішнього середовища.

Ефективні джерела повинні забезпечувати: високу точність (fidelity), стабільність, сумісність із каналами передачі, можливість синхронізації. Ці вимоги є критичними для роботи квантових повторювачів. У реальних умовах

виникають труднощі: втрати у системі, шум, нестабільність джерел, обмежена швидкість генерації. Це впливає на продуктивність всієї мережі.

Після розгляду методів генерації заплутаності важливо зрозуміти, які саме квантові стани при цьому утворюються. Не всі заплутані стани є однаково зручними чи придатними для практичного використання. У квантових комунікаціях особливу роль відіграють так звані типові (стандартні) заплутані стани, які мають чітко визначені властивості та широко застосовуються у протоколах передачі інформації. Ці стани є своєрідною «мовою» квантових мереж, на основі якої реалізуються телепортація, з'єднання заплутаності та інші ключові процеси. Найважливішими серед таких станів є Беллівські стани, а також їх узагальнення для багаточастинкових систем. Такі стани є базовими для телепортації і квантових повторювачів.

Після того як заплутаність створена, наступним кроком є її передача між просторово віддаленими вузлами квантової мережі. Саме цей процес – розподіл заплутаності – лежить в основі квантового зв'язку, адже дозволяє встановити корельований квантовий стан між різними точками простору. На відміну від класичної передачі інформації, у квантовому випадку передається не сам сигнал, а створюється спільний квантовий стан між вузлами. Це робить процес розподілу принципово іншим і значно складнішим. Найпростіший спосіб розподілу заплутаності такий: у вузлі-джерелі створюється пара заплутаних частинок, одна частинка залишається у вузлі А, а інша передається до вузла В. В результаті між А і В виникає заплутаний стан. Це базовий механізм квантового зв'язку. У реальних квантових мережах заплутаність не передається одразу на всю відстань. Вона створюється між сусідніми вузлами. У кожному сегменті формується локальна заплутаність. Потім ці сегменти об'єднуються. Передача заплутаних частинок здійснюється через оптичні волокна і вільний простір (атмосфера). Оптичні волокна – стабільні, сумісні з телекомунікаційними системами, обмежені втратами. Вільний простір характеризується меншими втратами на великих відстанях, але існує залежність від погодних умов. Передача заплутаності не є гарантованою. Фотон може бути

втрачений, сигнал може бути спотворений. Це пов'язано з декогеренцією. В результаті зменшення кількості заплутаних пар, погіршення їх якості. Отже, процес має ймовірнісний характер і не кожна спроба є успішною. Тому необхідні багаторазові спроби. Це є однією з головних проблем квантових мереж. Розподіл заплутаності між вузлами є основним процесом у квантових мережах, який забезпечує встановлення квантових кореляцій між віддаленими системами. Саме розподіл заплутаності створює основу для всіх квантових комунікацій і є центральним елементом майбутніх квантових мереж.

У реальних квантових системах заплутаність майже ніколи не є ідеальною. Через втрати, шум і декогеренцію квантові стани спотворюються, і їхні властивості відрізняються від теоретично досконалих. Тому виникає важливе питання: як кількісно оцінити якість заплутаності? Для цього в квантовій теорії інформації введено спеціальні метрики, які дозволяють оцінити ступінь заплутаності, визначити придатність стану для практичних задач, порівнювати різні квантові стани. Основні метрики, які використовуються на практиці наступні:

1. Fidelity (точність стану). Найпоширенішою метрикою є fidelity – міра близькості реального стану до ідеального:

$$F = \langle \psi_{ideal} \mid \rho \mid \psi_{ideal} \rangle, \qquad (11.7)$$

де $\mid \psi_{ideal} \rangle$ – ідеальний заплутаний стан; ρ – реальний (можливо змішаний) стан. При $F = 1$ маємо ідеальний стан, при $F = 0$ – повністю зіпсований стан. Ця метрика показує, наскільки стан придатний для практичного використання.

2.Конкуренція (Concurrence). Це метрика, яка безпосередньо вимірює ступінь заплутаності двокубітної системи: C = 0 – відсутність заплутаності, C = 1 – максимальна заплутаність. Цей показник дає пряму оцінку саме заплутаності, а не схожості станів.

3. Ентропія заплутаності. Ця метрика базується на понятті ентропії і характеризує кількість квантових кореляцій, ступінь невизначеності підсистеми. Для чистого стану чим більша ентропія, тим більша заплутаність .

4. Негативність (Negativity). Ще одна метрика, яка використовується для змішаних станів. Вона базується на аналізі матриці густини і дозволяє визначити наявність заплутаності. Може бути застосована до широкого класу станів.

5. Bell-нерівності. Якість заплутаності можна оцінювати через порушення нерівності Белла. Порушення нерівності свідчить про наявність квантової заплутаності.

Якість заплутаності безпосередньо впливає на точність телепортації, безпеку квантового зв'язку, ефективність повторювачів. Низька якість призводить до помилок, робить систему непридатною. Метрики якості заплутаності є необхідним інструментом для аналізу та контролю квантових систем. Вони дозволяють кількісно оцінити стан, визначити його придатність для використання та керувати процесами у квантових мережах. Серед різних метрик особливе значення мають точність і конкуренція, які широко застосовуються на практиці. Саме завдяки таким показникам стає можливим ефективне управління квантовими ресурсами та побудова надійних квантових каналів зв'язку. Для практичних задач існують пороги: мінімальне значення fidelity і мінімальний рівень заплутаності. Якщо стан не відповідає вимогам, його не використовують або очищують.

Під час розподілу заплутаності через втрати та шум фотони можуть втрачатися, їхні стани можуть змінюватися. Це призводить до зменшення кількості пар і погіршення якості. В результаті заплутаність стає «змішаною» і її необхідно очищати. Розподіл заплутаності між вузлами квантової мережі є складним процесом, який у реальних умовах відбувається випадково та з обмеженою ефективністю. Генерація заплутаних пар у різних сегментах каналу не синхронізована, а самі квантові стани мають обмежений час існування. У таких умовах виникає критична проблема: як узгодити результати, отримані в різний час у різних частинах мережі? Відповіддю на це питання є використання квантової пам'яті, яка відіграє ключову роль у процесі розподілу заплутаності. На відміну від класичних систем, де інформацію можна легко зберігати та

копіювати, у квантових мережах інформація існує у вигляді крихких квантових станів. Тому квантова пам’ять повинна не лише зберігати ці стани, а й робити це з мінімальними втратами їхніх квантових властивостей.

Квантова пам’ять забезпечує ефективний розподіл заплутаності через такі процеси:

1. Синхронізація розподілу заплутаності. У сегментованій мережі заплутаність у різних сегментах виникає незалежно, час успіху є випадковим. Наприклад, сегмент A–C вже має заплутаність, а сегмент C–B ще ні. Квантова пам’ять зберігає стан у вузлі C і дозволяє дочекатися другого сегмента. Без цього перший результат був би втрачений.

2. Буферизація заплутаних пар. Квантова пам’ять виконує функцію буфера, тобто накопичує заплутані пари і зберігає їх до моменту використання. Це дозволяє працювати асинхронно і підвищити ефективність системи.

3. Підтримка з’єднання заплутаності. Для виконання заміни заплутаності необхідно мати дві заплутані пари одночасно. Квантова пам’ять утримує одну пару і чекає на іншу. Це робить можливим побудову довгих квантових каналів.

4. Забезпечення очищення. Очищення заплутаності потребує кількох пар одночасно. Квантова пам’ять накопичує ці пари і дозволяє виконати очищення. Без пам’яті процес очищення неможливий.

5. Компенсація затримок у мережі. У квантових мережах існують затримки, пов’язані з передачею сигналів, обробкою результатів, класичною комунікацією. Квантова пам’ять компенсує ці затримки і зберігає стани до завершення процесів.

Завдяки квантовій пам’яті зменшується кількість втрат, підвищується ймовірність успіху, покращується узгодженість процесів. Це безпосередньо впливає на продуктивність мережі. Таким чином квантова пам’ять об’єднує всі процеси розподілу, забезпечує їх узгодженість і дозволяє працювати мережі як єдиній системі. Фактично вона є основним елементом інфраструктури. Попри важливість, квантова пам’ять має такі обмеження, як обмежений час когерентності, декогеренція, втрати при записі та зчитуванні. Це означає, що

стан не можна зберігати нескінченно довго. Незважаючи на існуючі технологічні обмеження, розвиток квантової пам'яті є критично важливим для створення масштабованих квантових мереж і реалізації квантового інтернету. Таким чином, генерація та розподіл заплутаності забезпечують створення корельованих квантових станів між віддаленими вузлами, що є необхідною умовою для реалізації більш складних протоколів.

Однак локальна заплутаність між окремими сегментами ще не забезпечує передачу інформації на великі відстані. Для створення єдиного далекого квантового каналу необхідно локальні заплутані пари необхідно об'єднати так, щоб виникла заплутаність між далекими вузлами, які не взаємодіяли безпосередньо, тобто об'єднати окремі ділянки заплутаності в одну глобальну кореляцію. Саме цю функцію виконує процедура з'єднання заплутаності (entanglement swapping) – основний механізм роботи квантових повторювачів. Під час з'єднання заплутаності виконується спільне вимірювання проміжних квантових систем, у результаті чого дві частинки, які ніколи безпосередньо не взаємодіяли, стають заплутаними. Завдяки багаторазовому повторенню цієї процедури заплутаність може поступово поширюватися на дедалі більші відстані. Таким чином, сегментація каналу, генерація локальної заплутаності та її подальше з'єднання утворюють єдиний фізичний механізм роботи квантових повторювачів і лежать в основі побудови масштабованих квантових мереж.

Ідея з'єднання заплутаності на перший погляд виглядає парадоксальною. Як можна створити квантовий зв'язок між двома частинками, які ніколи не взаємодіяли? Відповідь полягає у використанні спеціальних квантових вимірювань і властивостей заплутаних станів. Розглянемо цей процес. Нехай маємо три вузли A, C, B і дві заплутані пари: пара між A і C і пара між C і B. Система виглядає так: $(\mathrm{A}, \mathrm{C}_1)$ і $(\mathrm{C}_2, \mathrm{B})$, де C_1 і C_2 – частинки у вузлі C. Наша мета: створити заплутаність між A і B. При цьому частинки A і B ніколи не взаємодіяли безпосередньо. Це досягається через процес заміна заплутаності. У вузлі C над частинками C_1 і C_2 виконується Беллівське вимірювання. Це означає, що система проєктується на один із Беллівських станів. В результаті

квантовий стан всієї системи змінюється. Після вимірювання частинки A і B стають заплутаними, заплутаність «переноситься» на більшу відстань. Причому це відбувається навіть без прямої взаємодії A і B. Результат вимірювання у вузлі C передається до вузлів A і B класичним каналом. Це необхідно для корекції квантового стану. Після корекції отримується стандартний заплутаний стан.

У реальних мережах цей процес виконується багаторазово. Спочатку з'єднуються короткі сегменти, потім – довші і і так далі. В результаті формується заплутаність на великій відстані. Кожен етап з'єднання не є ідеальним і додає помилки. Основні джерела помилок – це недосконалі вимірювання, декогеренція, шум. В результаті якість заплутаності зменшується. Тому необхідне очищення заплутаності. Як і інші квантові процеси, з'єднання не гарантує ідеального результату. Результат залежить від вимірювання. Потрібна класична комунікація. Іноді потрібні повтори. Це впливає на швидкість роботи мережі і складність синхронізації. Для реалізації з'єднання необхідн квантова пам'ять (для зберігання станів), точні вимірювання класична комунікація і синхронізація процесів. Основні труднощі – це втрати і шум, недосконаліть вимірювань, накопичення помилок. Це означає необхідність додаткових процедур (очищення).

Розглянемо кілька прикладів з'єднання заплутаності.

1. Три вузли. Маємо мережау A – C – B. Створюється заплутаність A–C і створюється заплутаність C–B. У C виконується Беллівське вимірювання. В результаті виникає заплутаність між A і B. Це базовий приклад з'єднання.

2. Ланцюг із чотирьох вузлів. Мережа A – C_1 – C_2 – B. Здійснюється створення заплутаності в сегментах A–C_1 і C_1–C_2. Потім результат з'єднується з C_2–B. В результаті – заплутаність між A і B.

3. Телепортація після з'єднання. Після того як A і B стали заплутаними можна виконати квантову телепортацію. Це означає передачу стану без фізичного переміщення частинки.

З'єднання заплутаності є механізмом, що дозволяє будувати довгі квантові канали з коротких сегментів. Воно дає можливість створювати

заплутаність між віддаленими вузлами без прямої передачі квантових станів на великі відстані. Цей процес базується на Беллівських вимірюваннях і має ймовірнісний характер, що потребує використання додаткових механізмів, зокрема, квантової пам'яті та очищення заплутаності. Саме завдяки з'єднанню заплутаності квантові повторювачі можуть ефективно масштабувати квантові мережі, відкриваючи шлях до глобального квантового зв'язку.

11.3. Дистиляція заплутаності у вузлах повторювача

Квантова заплутаність є фундаментальним ресурсом сучасних квантових технологій. Саме вона лежить в основі квантової телепортації, квантової криптографії, квантових повторювачів та майбутнього квантового інтернету. Проте у реальних фізичних системах створення та передача ідеально заплутаних станів є надзвичайно складним завданням. Під час поширення квантових станів через оптоволоконні лінії або відкритий простір фотони взаємодіють із навколишнім середовищем, зазнають втрат, фазових шумів та декогеренції. У результаті початково максимальна заплутаність поступово деградує, а квантові кореляції між вузлами мережі слабшають. Це створює одну з головних проблем квантових мереж великої протяжності: навіть якщо заплутаність вдалося розподілити між віддаленими вузлами, її якість часто є недостатньою для виконання практичних квантових протоколів. Наприклад, квантова телепортація або квантова криптографія потребують високої точності заплутаних станів. Якщо ж рівень шуму надто великий, квантова інформація втрачається, а переваги квантового зв'язку зникають. Саме тому у вузлах квантових повторювачів використовується процедура дистиляції (очищення) заплутаності. Її основна ідея полягає у тому, щоб із великої кількості «поганих» або шумових заплутаних пар отримати меншу кількість пар із вищою якістю заплутаності. Іншими словами, дистиляція дозволяє концентрувати квантові кореляції, зменшуючи вплив шуму та декогеренції. На перший погляд може здатися, що якщо квантовий стан зіпсований, його вже неможливо відновити. Дійсно, ми не можемо «відремонтувати» одну конкретну заплутану пару. Але

квантова механіка дозволяє інше: використати кілька неідеальних пар, щоб отримати меншу кількість більш якісних.

У найпростішому випадку ідеальна заплутана пара кубітів описується одним із беллівських станів. Цей стан є максимально заплутаним, оскільки вимірювання одного кубіта миттєво визначає стан іншого незалежно від відстані. Проте у реальному каналі стан зазнає впливу шуму та переходить у змішаний стан

$$\rho = F \mid \Phi^+\rangle\langle\Phi^+ \mid +(1-F)\rho_{\text{шум}}, \qquad (11.8)$$

де ρ – матриця густини реального стану; F – точність (fidelity); $\rho_{\text{шум}}$ – шумова компонента. Величина fidelity $F = \langle\Phi^+ \mid \rho \mid \Phi^+\rangle$ характеризує ступінь близькості реального стану до ідеального беллівського стану. Якщо $F = 1$, стан є ідеальним. Якщо $F = {}^1\!/_2$, квантова заплутаність практично втрачається. Фізично деградація заплутаності виникає через поглинання фотонів, дефазування, флуктуації середовища, часову декогеренцію, втрати у детекторах.

У квантових повторювачах ця проблема є особливо критичною, оскільки заплутаність повинна зберігатися протягом тривалого часу та на великих відстанях. Саме тому після генерації та розподілу заплутаності виникає необхідність у її очищенні або дистиляції. Основна ідея дистиляції полягає в тому, що кілька шумових пар використовуються для отримання меншої кількості якісніших заплутаних станів. Схематично це виглядає так: n шумових пар перетворюються в m очищених пар, де m < n. Тобто частина ресурсів жертвується заради покращення точності.

Для практичної реалізації процедури очищення необхідні чітко визначені процедури – протоколи очищення. Такі протоколи описують які операції виконуються над квантовими станами, які вимірювання проводяться, за яких умов стани зберігаються або відкидаються. Базовий протокол очищення реалізується за допомогою локальних квантових операцій і класичної комунікації LOCC (Local Operations and Classical Communication). Кожен вузол

виконує локальні квантові операції. Результати вимірювань передаються класичним каналом і приймається рішення які пари залишити Причому квантова інформація не передається під час очищення і використовується лише класичний зв'язок. Важливо підкреслити, що дистиляція не створює заплутаність із нуля. Вона лише концентрує вже наявну заплутаність.

Нехай два вузли – A і B – мають дві однакові заплутані пари: пара 1 – (A_1, B_1) і пара 2 – (A_2, B_2) Обидві пари є неідеальними, мають точність $F < 1$. Мета: отримати одну пару з вищою якістю. Для цього у кожному вузлі (A і B) виконується двокубітна операція (найчастіше CNOT) за схемою $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$. Тобто перші кубіти – «основні», другі – «допоміжні». Ці операції створюють кореляції між парами. Після виконання операцій кубіти A_2 і B_2 вимірюються. Результати передаються класичним каналом між вузлами. Після порівняння результатів, якщо результати збігаються, то пара (A_1, B_1) зберігається. Якщо ні – пара відкидається. Це ключовий момент: відбувається фільтрація станів. У випадку успіху залишається одна пара і її точність (fidelity) вища, ніж у початкових. При цьому друга пара використовується і знищується. Розглянемо математичну модель дистиляції детальніше. Нехай початковий стан має fidelity F. Після одного циклу дистиляції:

$$F' = \frac{F^2 + {}^1\!/_9\,(1-F)^2}{F^2 + {}^3\!/_2\,F(1-F) + {}^5\!/_9\,(1-F)^2}. \qquad (11.9)$$

Ця формула показує, що $F' > F$, якщо початкове значення $F > {}^1\!/_2$. Тобто дистиляція ефективна лише тоді, коли початкова заплутаність не є повністю зруйнованою. Фізично це означає, що шум не повинен перевищувати певного критичного рівня.

Фізичний зміст дистиляції полягає у наступному. У процесі дистиляції частина заплутаних пар використовується для виявлення помилок в інших парах. Після вимірювань і порівняння результатів зберігаються лише ті пари, у яких імовірність помилки є мінімальною. Таким чином шумові кореляції відкидаються, а квантові кореляції концентруються. Це нагадує фільтрацію

шуму, але виконується у просторі квантових станів. Протокол очищення є ймовірнісним, тобто не всі спроби успішні, частина пар відкидається. Це означає, що необхідно мати багато початкових ресурсів. Очищення зазвичай виконується не один раз. Після першого етапу точність зростає. Отримані пари знову очищуються. Точність поступово зростає, але кількість пар зменшується. В результаті досягається висока якість стану. Таким чином очищення завжди пов'язане з компромісом: чим більше очищення, тим вища якість, але менше ресурсів (доступних пар). Це означає, що потрібно оптимізувати процес. Занадто агресивне очищення може знищити більшість пар. Слід зазначити, що очищення не є ідеальним. Воно потребує великої кількості ресурсів, залежить від якості початкових станів і має обмеження по часу (через декогеренцію). Крім того, якщо початковий стан занадто поганий, то очищення не працює.

Очищення заплутаності є вкрай важливим у квантових повторювачах, оскільки після кожного з'єднання заплутаність погіршується, помилки накопичуються. Квантовий повторювач складається з сегментів каналу, вузлів пам'яті, систем генерації заплутаності, процедур обміну заплутаністю, дистиляції. Після кожного етапу обміну заплутаністю точність F зменшується: $F_n < F_{n-1}$. Без дистиляції після кількох сегментів $F \to {}^{1}/_{2}$, і заплутаність стає непридатною. Тому у вузлах повторювача виконуються цикли очищення. Схематично це виглядає таким чином:

генерація → дистиляція →обмін заплутаністю → дистиляція.

Це дозволяє підтримувати високу якість квантового каналу навіть на великих відстанях.

Одним із найвідоміших протоколів дистиляції (очищення) квантової заплутаності, який використовується у квантових повторювачах та квантових мережах для підвищення якості заплутаних станів є протокол DEJMPS. Назва DEJMPS утворена від прізвищ авторів протоколу: **D**eutsch, **E**kert, **J**ozsa, **M**acchiavello, **P**opescu, **S**anpera. Основна ідея протоколу полягає в тому, щоб із кількох шумових заплутаних пар отримати меншу кількість пар із більшою

fidelity (точністю або «чистотою» заплутаності). Фізично протокол DEJMPS не створює нову заплутаність, не порушує квантову механіку, а концентрує вже існуючу заплутаність. Тобто багато слабких пар дозволяє отримати менше якісних пар. Протокол DEJMPS дозволяє зменшити частку шумових компонент, підвищити fidelity, відновити якість заплутаності. Нехай, наприклад, після першого циклу $F_1 > F_0$, після другого – $F_2 > F_1$. Тоді $F_n \to 1$. Проте кожен цикл зменшує кількість пар і збільшує часові затрати. Тому виникає компроміс між fidelity, швидкістю передачі і ресурсами мережі. Протокол DEJMPS є одним із фундаментальних інструментів квантових повторювачів, квантових мереж, далекого квантового зв'язку і масштабованого квантового інтернету. Без процедур дистиляції, зокрема DEJMPS, заплутаність експоненціально деградувала б із відстанню, що зробило б неможливим створення глобальних квантових комунікаційних систем.

Оскільки ефективність дистиляції заплутаності значною мірою залежить від фізичної реалізації квантової системи, наступним важливим питанням є вибір платформи, на якій реалізуються протоколи очищення. Різні фізичні системи – фотонні, атомні, іонні чи надпровідникові – мають власні особливості взаємодії, рівні шуму та часові масштаби когерентності. У фотонних системах дистиляція реалізується через поляризаційні перетворення, світлоподільник (дільник променя), однофотонні детектори. В атомних ансамблях – через колективні спінові стани, квантову пам'ять, Raman-переходи. У надпровідникових системах – через мікрохвильові резонатори, квантові вентилі, контрольовані імпульси.

Важливою проблемою є часове узгодження. Час когерентності $T_{ког.}$ має бути більшим за тривалість дистиляції $T_{дист.}$. Інакше стан втратить когерентність ще до завершення протоколу. Тому квантова пам'ять є критично важливим компонентом повторювачів.

Дистиляція суттєво впливає на масштабування мережі. Без дистиляції $F(L) \sim e^{-\alpha L}$. Із дистиляцією $F(L) \approx const$ у певному діапазоні відстаней. Тобто дистиляція компенсує накопичення шуму. Проте вона має власні

обмеження – це складність реалізації, потреба у великій кількості заплутаних пар, втрати при вимірюваннях, накопичення помилок вентилів. Тому практична реалізація дистиляції вимагає високоефективних детекторів, стабільних джерел фотонів, малошумових каналів.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Оптоволоконна квантова мережа. Нехай між вузлами створено заплутані пари з $F = 0{,}75$. Після дистиляції $F' = 0{,}90$. Це дозволяє виконувати квантову телепортацію з високою точністю.

2. Дві неідеальні пари. Є дві заплутані пари з $F = 0.7$. Після очищення залишається одна пара з $F \approx 0.85$. Це означає, що якість зросла, але кількість зменшилась.

3. Багатоетапне очищення. Початково маємо 8 пар з $F = 0.6$. Після першого етапу отримуємо 4 пари з $F = 0.75$. Після другого – 2 пари з $F = 0.9$. Після третього – 1 пара з $F \approx 0.95$.

4. Квантовий повторювач. На кожному сегменті $L_0 = 50$ км. Після обміну заплутаністю fidelity падає. Дистиляція відновлює якість заплутаності перед наступним етапом.

Важливим напрямом сучасних досліджень є поєднання дистиляції з квантовою корекцією помилок. Корекція помилок активно виправляє помилки, а дистиляція відбирає кращі стани. Разом ці методи створюють основу масштабованих квантових мереж.

Особливе значення має також багатовузлова дистиляція. У великих мережах: A ↔ B ↔ C ↔ D очищення повинно виконуватись узгоджено між багатьма вузлами. Це створює складні задачі синхронізації, керування ресурсами, маршрутизації заплутаності. У майбутньому саме такі технології стануть основою глобального квантового інтернету.

Таким чином, дистиляція заплутаності є одним із основних механізмів функціонування квантових повторювачів і далекого квантового зв’язку. Її головна мета полягає у підвищенні якості заплутаних станів шляхом перетворення великої кількості шумових пар на меншу кількість високоякісних

заплутаних ресурсів. Фізично дистиляція базується на локальних квантових операціях, класичному зв'язку, селекції результатів вимірювань, концентрації квантових кореляцій. Саме дистиляція дозволяє компенсувати деградацію заплутаності, що виникає через втрати, шум і декогеренцію у квантових каналах. У поєднанні з квантовою пам'яттю, обміном заплутаністю, квантовою телепортацією і корекцією помилок вона формує фундамент сучасних квантових повторювачів і відкриває шлях до створення масштабованих глобальних квантових мереж.

11.4. Динаміка функціонування та часова синхронізація вузлів

Функціонування квантових мереж великої протяжності є значно складнішим завданням, ніж передача класичної інформації. У класичних мережах сигнали можуть бути підсилені, скопійовані або повторно передані без фундаментальних фізичних обмежень. У квантових системах ситуація принципово інша, оскільки квантова інформація є надзвичайно чутливою до шуму, втрат та декогеренції. Особливо складною стає проблема узгодження роботи віддалених вузлів мережі, які повинні обмінюватися фотонами, виконувати квантові вимірювання, зберігати стани у квантовій пам'яті та здійснювати операції над заплутаними станами в чітко визначені моменти часу.

У квантових повторювачах та багатовузлових мережах критично важливими стають не лише просторові характеристики системи, але й часові процеси. Квантові стани існують протягом обмеженого часу, визначеного часом когерентності, а будь-яка затримка або неузгодженість між вузлами може призвести до втрати заплутаності та руйнування квантової інформації. Саме тому часову синхронізацію вузлів можна розглядати як одну з фундаментальних умов існування масштабованих квантових мереж.

У найзагальнішому вигляді квантова мережа складається з джерел фотонів, каналів передачі, квантових пам'ятей, детекторів, вузлів повторювачів, систем керування. Усі ці елементи повинні працювати узгоджено у часі.

Одним із ключових параметрів є час когерентності $T_{\text{ког.}}$. Він характеризує проміжок часу, протягом якого квантовий стан зберігає фазову когерентність. Для успішного функціонування мережі необхідно, щоб $T_{\text{опер.}} < T_{\text{ког.}}$, де $T_{\text{опер.}}$ – тривалість усіх операцій. Якщо ця умова не виконується, то інформація втрачається ще до завершення протоколу. Саме тому часові процеси стають критичними у квантових повторювачах.

Розглянемо структуру часових затримок у мережі.

Загальний час роботи можна записати як:

$$T_{\text{заг.}} = T_{\text{ген.}} + T_{\text{пер.}} + T_{\text{зберіг.}} + T_{\text{вим.}} + T_{\text{затр..}}, \qquad (11.10)$$

де $T_{\text{ген.}}$ – час генерації заплутаності; $T_{\text{пер.}}$ – час передачі фотона; $T_{\text{зберіг.}}$ – час зберігання у квантовій пам'яті; $T_{\text{вим.}}$ – час вимірювання; $T_{\text{затр..}}$ – затримка класичного сигналу. У великих мережах $T_{\text{затр..}}$ стає особливо важливим, оскільки результати вимірювань повинні бути передані між вузлами перед виконанням наступних операцій.

Час передачі сигналу

$$T_{\text{пер.}} = \frac{L}{v}, \qquad (11.11)$$

де L – довжина каналу; v – швидкість поширення сигналу. В оптоволокні $v = {}^{c}/_{n}$, де c – швидкість світла у вакуумі; n – показник заломлення. Для стандартного волокна $n \approx 1.5$. Тому $v \approx 2 \times 10^8$ м/с. На відстані $L = 1000$ км затримка становить $T_{\text{затр..}} \approx 5$ мс. Для квантових систем це дуже великий час.

Важливу роль у функціонуванні мереж відіграє часова синхронізація вузлів. Вона визначає узгодження моментів генерації фотонів, відкриття детекторів, запуску квантових операцій, виконання вимірювань, обміну класичними сигналами. Без синхронізації фотони можуть надходити у різний час, втрачати інтерференцію, не формувати заплутаність. Особливо важливою є синхронізація у протоколах обміну заплутаністю.

Нехай два фотони повинні одночасно потрапити на світлоподільник. Різниця часів Δt повинна бути меншою за час когерентності фотона, тобто $\Delta t <$

$T_{\text{ког.}}$. Інакше квантова інтерференція зникає. Фізично це означає втрату невідрізнюваності фотонів. Саме невідрізнюваність лежить в основі ефекту Хонга–Оу–Мандела (Hong–Ou–Mandel). У цьому ефекті два однакові фотони на світлоподільнику 50 : 50 інтерферують:

$$|1\rangle_a |1\rangle_b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_c |0\rangle_d - |0\rangle_c |2\rangle_d). \tag{11.12}$$

де a, b – вхідні моди; c, d – вихідні моди. Для спостереження цього ефекту потрібна надзвичайно точна синхронізація.

Точна синхронізація моментів генерації та реєстрації фотонів є лише частиною задачі координації квантової мережі. У реальних системах успішне створення заплутаності має імовірнісний характер, тому виникає потреба у механізмах тимчасового збереження квантових станів. Саме цю функцію виконує квантова пам'ять. Квантова пам'ять дозволяє компенсувати випадковість генерації заплутаності. Нехай імовірність успішної генерації $p \ll 1$. Тоді різні сегменти мережі успішно створюють заплутаність у різні моменти часу. Без пам'яті синхронізація майже неможлива. Квантова пам'ять дозволяє тимчасово зберігати стани, чекати готовності інших сегментів, виконувати обмін заплутаністю у потрібний момент. Час зберігання $T_{\text{зберіг.}}$ має задовольняти умову $T_{\text{зберіг.}} > T_{\text{очік.}}$, де $T_{\text{очік.}}$ – час очікування синхронізації. Інакше стан декогерує раніше, ніж завершиться протокол.

Коли квантові стани можуть бути тимчасово збережені та синхронізовані між різними вузлами, стає можливим реалізувати повний цикл роботи квантового повторювача. У зв'язку з цим важливо розглянути часову динаміку функціонування таких систем. У сегментованому каналі $L = nL_0$, де L_0 – довжина сегмента; n – кількість сегментів. Кожен сегмент генерує заплутаність, зберігає її, виконує обмін заплутаністю і запускає дистиляцію. Ці процеси повинні бути синхронізовані між усіма вузлами. Загальний час встановлення далекої заплутаності:

$$T_{\text{дал.}} \sim \frac{L_0}{cp} log_2 n, \tag{11.13}$$

де p – імовірність успішної генерації; c – швидкість світла. Формула показує, що час швидко зростає при малих p. Тому швидкодія мережі значною мірою визначається ефективністю джерел, якістю детекторів, точністю синхронізації.

Важливу роль відіграє часовий джитер. Часовий джитер σ_t характеризує невизначеність моменту реєстрації фотона. Великий джитер погіршує інтерференцію, знижує точність (fidelity), ускладнює обмін заплутаністю. Для високоточних систем $\sigma_t \ll T_{\text{ког.}}$. Саме тому сучасні SNSPD-детектори мають джитер у десятки пікосекунд.

Ще однією проблемою є мертвий час детекторів $T_{\text{мерт.}}$. Після реєстрації фотона детектор певний час не може приймати нові сигнали. Це обмежує швидкість передачі, частоту повторення протоколів.

У великих мережах важливо також враховувати асинхронність вузлів. Через температурні флуктуації, нестабільність лазерів, механічні вібрації виникають часові дрейфи $\delta t(t)$. Тому використовуються опорні годинники, фазова стабілізація і активний зворотний зв'язок.

Особливе значення має фазова синхронізація. У когерентних схемах гомодинного і гетеродинного детектування необхідно узгоджувати фази $\Delta\phi \approx 0$. Інакше інтенсивність $I \propto cos(\Delta\phi)$ стає нестабільним.

Описані фізичні процеси – декогеренція, часові затримки, джитер та нестабільність синхронізації – безпосередньо визначають ефективність функціонування квантової мережі. Для кількісного аналізу цих ефектів необхідно перейти до математичного опису часової динаміки квантових систем. Ймовірність збереження когерентності:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_2}}. \tag{11.14}$$

де T_2 – час фазової когерентності.

Імовірність успішної синхронізації:

$$P_{\text{синхр.}} = e^{-(\Delta t/\tau)^2}, \tag{11.15}$$

де τ – часовий масштаб фотонного імпульсу. Ця формула показує, що навіть малі часові помилки різко знижують ефективність мережі.

У багатовузлових системах загальна ефективність:

$$\eta_{\text{заг.}} = \eta^n P^n_{\text{синхр.}}, \tag{11.16}$$

де n – кількість вузлів. Тому масштабування квантових мереж потребує надзвичайно точної часової координації.

Розглянемо декілька практичних прикладів.

1. Оптоволоконний повторювач. Нехай: $L_0 = 100$ км. Час передачі $T_{\text{пер.}} \approx 0.5$ мс. Отже, квантова пам'ять повинна зберігати стан довше цього часу.

2. Вплив затримок. Нехай відстань між вузлами 100 км. Час передачі приблизно 0.5 мс. Після вимірювання потрібно чекати підтвердження. Це уповільнює всю систему

3. Два сегменти. Маємо мережу A – C – B. Сегмент A–C успішний за 1 мс. Сегмент C–B – за 5 мс. Отже, перший сегмент чекає 4 мс. Якщо час когерентності менше часу затримки $T_{\text{ког.}} < T_{\text{затр.}}$,стан деградує

4. Супутникова мережа. Рух супутника створює змінні затримки $T(t)$. Необхідна динамічна компенсація часових зсувів.

5. Надпровідникові квантові процесори. У надпровідникових схемах імпульси керування і мікрохвильові сигнали повинні бути синхронізовані з точністю до наносекунд.

Наведені приклади показують, що квантові процеси в мережі тісно пов'язані з передачею інформації про результати вимірювань та стан окремих вузлів. Такий обмін здійснюється за допомогою класичних каналів зв'язку, які є невід'ємною частиною будь-якої квантової комунікаційної системи. Класичний канал передає результати вимірювань, координує вузли, запускає наступні операції. Проте класичні сигнали також мають затримки

$$T_{\text{затр.}} = \frac{L}{c}. \tag{11.17}$$

У глобальних мережах $T_{\text{затр.}}$ може перевищувати час когерентності деяких систем. Саме тому сучасні квантові мережі потребують довгоживучої пам'яті, адаптивних алгоритмів, оптимізації маршрутизації. У перспективі розвиток квантових мереж вимагатиме створення квантових протоколів синхронізації,

квантових годинників, розподілених систем керування. Особливо важливими є оптичні атомні годинники, технології частотного гребінця (frequency comb), стабілізовані лазери.

Таким чином динаміка функціонування квантових мереж визначається складною взаємодією передачі фотонів, роботи квантової пам'яті, вимірювань, класичного керування, процесів декогеренції. Часова синхронізація вузлів є фундаментально необхідною умовою існування масштабованих квантових мереж, оскільки квантові протоколи вимагають точного узгодження всіх операцій у межах часу когерентності системи. Основними фізичними проблемами є затримки передачі, декогеренція, часовий джитер, нестабільність фаз, випадковість генерації заплутаності. Для їх подолання використовуються квантова пам'ять, високоточні детектори, системи активної стабілізації, фазове синхронізування, адаптивне керування мережею. Саме розвиток методів часової координації та синхронізації відкриває шлях до створення повноцінного квантового інтернету, у якому віддалені квантові системи працюватимуть як єдина когерентна інформаційна структура.

11.5. All-photonic повторювачі та сучасні експериментальні реалізації

Розвиток квантових мереж великої протяжності неминуче стикається з фундаментальною проблемою втрат фотонів та декогеренції квантових станів у каналах зв'язку. Раніше було показано, що для подолання експоненційного затухання сигналу використовуються квантові повторювачі, які дозволяють розділяти канал на сегменти, генерувати заплутаність на коротких відстанях, виконувати обмін і дистиляцію заплутаності. Однак традиційні архітектури повторювачів мають суттєвий недолік: вони потребують квантової пам'яті з великим часом когерентності та високою ефективністю запису і зчитування квантових станів. Саме квантова пам'ять залишається одним із найскладніших елементів сучасних квантових технологій. Проблема полягає в тому, що квантова пам'ять повинна працювати з одиничними фотонами, зберігати когерентність протягом тривалого часу, мати високу ефективність і

забезпечувати масштабованість системи. Реалізація всіх цих вимог одночасно є надзвичайно складною. Це стимулювало пошук альтернативних архітектур квантових повторювачів, у яких можна уникнути використання довготривалої квантової пам’яті. Одним із найперспективніших напрямів стали all-photonic повторювачі – повністю фотонні системи, у яких усі квантові операції виконуються лише над фотонними станами. Це архітектури квантових повторювачів, у яких усі операції генерації, передачі та розподілу заплутаності реалізуються виключно за допомогою фотонів без використання проміжних квантових запам'ятовуючих пристроїв.

Термін all-photonic repeater перекладається як повністю фотонний квантовий повторювач. У таких системах фотони є одночасно носіями інформації, ресурсом заплутаності, елементами квантової логіки. Тобто вся архітектура будується без атомної або спінової пам’яті. Перехід до all-photonic архітектур став можливим завдяки розвитку кластерних фотонних станів, лінійної квантової оптики, високоефективних однофотонних джерел, та надпровідникових детекторів, багатофотонної інтерференції. Саме ці технології дозволили реалізувати квантові протоколи, у яких функції пам’яті частково замінюються складною структурою фотонної заплутаності. Для розуміння принципів роботи all-photonic повторювачів необхідно спочатку розглянути фундаментальні проблеми традиційних повторювачів.

У стандартній архітектурі квантового повторювача необхідно створити заплутаність між сусідніми вузлами, зберегти її у квантовій пам’яті, дочекатися готовності інших сегментів, виконати обмін заплутаністю. Основною проблемою є часові затримки $T_{\text{затр.}}$. Якщо $T_{\text{затр.}} > T_2$, де T_2 – час когерентності пам’яті, то заплутаність руйнується. Саме квантова пам’ять обмежує швидкодію, масштабованість і стабільність мережі. All-photonic підхід прагне усунути цю проблему. Ідея полягає у тому, щоб не зберігати фотони, а створювати складні багатофотонні заплутані структури наперед. Ці структури називаються кластерними станами.

Кластерний стан – це багаточастинковий заплутаний стан $|\ C\rangle$. Наприклад, чотирифотонний кластер:

$$|\ C_4\rangle = \frac{1}{2}(|\ 0000\rangle + |\ 0011\rangle + |\ 1100\rangle - |\ 1111\rangle), \tag{11.18}$$

де $|\ 0\rangle$ і $|\ 1\rangle$ – базисні фотонні стани; знаки «+» і «−» визначають фазові кореляції. Фізично кластерний стан є мережею квантових кореляцій між багатьма фотонами. Саме такі структури дозволяють виконувати вимірювання, перенаправляти заплутаність, реалізовувати квантову логіку.

Багатофотонна структура кластерних станів дозволяє реалізувати складні квантові операції без використання довготривалої квантової пам'яті. Це відкриває можливість побудови повністю фотонних повторювачів, принцип роботи яких базується на вимірюваннях і фотонній інтерференції.

У звичайних традиційних квантових повторювачах заплутаність між різними сегментами мережі створюється не одночасно, а випадково. Наприклад, сегмент A − B уже успішно створив заплутаність, а сегмент B − C ще ні. Тоді вузол B повинен зберегти вже створений квантовий стан і чекати завершення інших сегментів. Тому виникає зв'язок:

квантова пам'ять ↔ час очікування,

де знак «↔» означає взаємний зв'язок. Він показує, що два явища тісно пов'язані, взаємно впливають одне на одного, одне визначає інше. Іншими словами, наведена схема означає наступне: необхідність очікування вимагає квантової пам'яті, а властивості пам'яті визначають допустимий час очікування. Тобто, чим довше очікування, тим кращою має бути пам'ять.

У all-photonic схемах зв'язок має вигляд:

кластерний стан ↔ паралельна фотонна обробка.

Паралельна фотонна обробка означає, що замість того, щоб чекати завершення одного процесу, система одночасно виконує багато фотонних операцій і працює з багатьма фотонами паралельно. Наведений зв'язок означає: складна структура кластерного стану забезпечує можливість паралельної фотонної обробки, а паралельна обробка реалізується саме завдяки кластерній заплутаності. Тобто

часову синхронізацію частково замінює складна структура багатофотонної заплутаності. Основою таких схем є квантові обчислення на основі вимірювань (measurement-based quantum computation). Ідея полягає у тому, що великий кластерний стан створюється заздалегідь, а подальші вимірювання окремих фотонів реалізують потрібні операції. Фотони у кластері відіграють роль вузлів, логічних каналів, ресурсів заплутаності.

У фотонному повторювачі центральне значення мають деревоподібні кластерні стани (tree-cluster states). Такі структури забезпечують захист від втрат фотонів, можливість корекції помилок, підвищення ймовірності успішної передачі. Наприклад, нехай η – це ефективність передачі фотона. Без корекції ймовірность успішної передачі $P_{\text{усп.}} \sim \eta$. У tree-cluster архітектурі:

$$P_{\text{усп.}} \to 1 - (1 - \eta)^m, \qquad (11.19)$$

де m – кількість резервних фотонних гілок. Фізично це означає, що навіть якщо частина фотонів втрачена, квантова інформація може бути відновлена. Таким чином кластерні стани виконують функцію фотонної надлишковості.

Деревоподібні кластерні стани забезпечують не лише стійкість до втрат, але й створюють структуру, в якій заплутаність може бути ефективно перенаправлена між віддаленими фотонами через локальні вимірювання. Саме цей механізм природно приводить до розгляду процедури обміну заплутаністю у all-photonic системах, яка реалізує перенесення квантових кореляцій без фізичного переміщення носіїв заплутаності. Обмін заплутаністю базується на Bell-вимірюваннях. У фотонних схемах Bell-вимірювання реалізуються через світлоподільники, інтерференцію, однофотонні детектори. Фізично процес базується на Hong–Ou–Mandel інтерференції: два невідрізнювані фотони одночасно надходять на світлоподільник, інтерферують і формують корельовані вихідні стани. Умовою є: $\Delta t \ll T_{\text{ког.}}$, де Δt – різниця часів приходу, $T_{\text{ког.}}$ – час когерентності. Саме тому all-photonic системи вимагають надзвичайно точної часової синхронізації.

Реалізація обміну заплутаністю у фотонних мережах неможлива без стабільного та контрольованого формування вхідних квантових станів світла. Тому подальший аналіз природно вимагає розгляду фізичних джерел фотонів, які визначають якість, чистоту та невідрізнюваність квантових сигналів у all-photonic архітектурах. Однофотонні джерела є критичними елементами all-photonic архітектур. Ідеальне джерело повинно випромінювати один фотон за імпульс, мати високу чистоту, забезпечувати невідрізнюваність фотонів. Для характеристики статистичних властивостей фотонного випромінювання використовується нормована кореляційна функція другого порядку $g^{(2)}(0)$. Вона визначає ймовірність одночасної реєстрації двох фотонів і дозволяє розрізняти теплове, когерентне та істинно квантове випромінювання. Для теплового світла $g^{(2)}(0) = 2$, для когерентного лазерного випромінювання $g^{(2)}(0) = 1$, а для ідеального однофотонного джерела $g^{(2)}(0) = 0$. Тому вимірювання $g^{(2)}(0)$ є основним методом експериментальної перевірки якості однофотонних та заплутаних фотонних джерел. У реальних системах $g^{(2)}(0) \ll 1$. Сучасні джерела, такі як квантові точки, параметричне розсіяння, центри NV у алмазі дозволяють отримувати високоякісні фотони.

Поряд із джерелами фотонів критичну роль у функціонуванні фотонних квантових мереж відіграють детектори, оскільки саме вони забезпечують завершення квантових протоколів через вимірювання, інтерференцію та постселективну обробку фотонних станів. Ефективність детектора позначається як $\eta_д$. Загальна ефективність системи:

$$\eta_{заг.} = \eta_t \eta_д, \qquad (11.20)$$

де η_t – ефективність передачі. Для масштабованих мереж необхідно, щоб $\eta_{заг.} \to 1$. Саме тому прорив у розвитку all-photonic повторювачів став можливим після появи SNSPD-детекторів. Їх переваги: $\eta_д > 0{,}95$, малий джитер, низький темновий рахунок, висока швидкодія.

Розглянуті фізичні механізми – кластеризація фотонних станів, інтерференція та вимірювально-орієнтована квантова обробка – дозволяють

якісно описати принципи роботи all-photonic повторювачів. Проте для оцінки їх масштабованості, ефективності та граничних можливостей необхідно перейти до формального математичного опису, який визначає фундаментальні обмеження таких архітектур у термінах ймовірностей успіху, втрат і ресурсної складності. Ймовірність передачі через волокно $P = e^{-\alpha L}$. де α – коефіцієнт затухання; L – довжина каналу. Без повторювачів швидкість передачі $R = e^{-\alpha L}$. All-photonic повторювачі дають можливість перейти до $R \sim poly(L)$, тобто поліноміального масштабування. Це є фундаментальною перевагою повторювачів. Однак реалізація all-photonic схем потребує великої кількості фотонів, складних кластерних структур, високої ефективності всіх компонентів. Число фотонів у кластері $N_{\text{кластер}}$ може досягати сотень або тисяч. Це створює серйозні експериментальні труднощі.

Отримані математичні співвідношення визначають фундаментальні вимоги до ефективності передачі, генерації кластерних станів та фотонної корекції помилок. Перевірка виконання цих умов у реальних системах приводить до аналізу сучасних експериментальних реалізацій all-photonic повторювачів. Однією з перших ключових робіт стала архітектура Азуми–Тамакі–Ло. У ній було показано можливість all-photonic повторювача, відсутність потреби у довготривалій пам'яті, використання деревоподібних кластерних станів. Ця схема стала фундаментом сучасних досліджень.

Інший напрям – інтегральна фотоніка. Фотонні чипи дозволяють генерувати, маршрутизувати, інтерферувати фотони на одному кристалі. Такі системи базуються на кремнієвій фотоніці, нітриді кремнію, літій-ніобатних платформах. Їх переваги: масштабованість; стабільність; компактність. У сучасних експериментах реалізуються багатофотонні кластерні стани, інтегровані Bell-вимірювання, фотонні логічні вентилі.

Велике значення мають також супутникові експерименти. Такі експерименти (зокрема супутник Micius) продемонстрували передачу заплутаних фотонів, квантову телепортацію і квантовий розподіл ключів на

тисячі кілометрів. Хоча ці системи ще не є повністю all-photonic повторювачами, вони демонструють реалістичність глобальних фотонних мереж.

Важливим напрямом є також повторювачі з корекцією помилок (fault-tolerant repeaters). У таких системах кластерні стани, фотонні коди та надлишковість компенсують втрати та помилки. Наприклад, використовується фотонне кодування за парністю (photonic parity encoding): $|0_L\rangle, |1_L\rangle$, де індекс L означає логічний кубіт. Інформація розподіляється між багатьма фотонами. Тому втрата окремих фотонів не руйнує логічний стан.

Експериментальний прогрес у генерації багатофотонних кластерних станів, інтегральній фотоніці та високоефективному детектуванні дозволяє перейти від окремих демонстраційних схем до аналізу системних переваг all-photonic архітектур у задачах далекого квантового зв'язку. До них відносять відсутність квантової пам'яті, потенційно високу швидкодію, сумісність із фотонними мережами, можливість інтеграції на чипах, роботу при кімнатній температурі. Однак існують і суттєві проблеми: великі втрати фотонів, низька ефективність Bell-вимірювань, складність генерації великих кластерів, вимоги до синхронізації, необхідність високоякісних однофотонних джерел. Саме тому сучасні дослідження спрямовані на покращення фотонних платформ, збільшення розмірів кластерних станів, інтегровану фотоніку, фотонні коди корекції помилок.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Фотонний кластерний стан. Генерується багатофотонна заплутаність $|C_N\rangle$. Вимірювання окремих фотонів реалізують логічні операції і створюють далеку заплутаність.

2. Bell-вимірювання. Два фотони надходять на світлоподільник. Успішна Hong–Ou–Mandel інтерференція підтверджує невідрізнюваність і дозволяє обмін заплутаністю.

3. Інтегральний фотонний чип. На одному кристалі реалізуються хвилеводи, джерела, інтерферометри, детектори. Це створює основу масштабованих квантових мереж.

4. Супутникова квантова комунікація. Фотонні стани передаються через атмосферу $L > 1000$ км, що демонструє можливість глобального квантового зв'язку.

Таким чином, повністю фотонні квантові повторювачі (all-photonic quantum repeaters) є одним із найперспективніших напрямів розвитку квантових мереж. Їх головна перевага полягає у відмові від довготривалої квантової пам'яті та переході до повністю фотонної архітектури, заснованої на багатофотонній заплутаності та квантових вимірюваннях. Фізично такі системи базуються на кластерних станах, фотонній інтерференції, Bell-вимірюваннях, лінійній квантовій оптиці і фотонній корекції помилок. Сучасні експериментальні досягнення, а саме: інтегральна фотоніка; SNSPD-детектори; однофотонні джерела; супутникові системи демонструють реалістичність створення масштабованих фотонних квантових мереж. Хоча all-photonic повторювачі все ще стикаються з великими технологічними труднощами, саме вони можуть стати основою майбутнього квантового інтернету, у якому передача, обробка та маршрутизація квантової інформації здійснюватиметься виключно за допомогою фотонів.

РОЗДІЛ 12. СТРУКТУРНА ОРГАНІЗАЦІЯ ТА ТОПОЛОГІЯ КВАНТОВИХ МЕРЕЖ

12.1. Організація вузлів та каналів у системах квантової комунікації

Сучасний етап розвитку інформаційних технологій характеризується переходом від класичних способів обробки та передачі інформації до квантових підходів, що базуються на фундаментальних законах квантової механіки. Квантові мережі розглядаються як ключовий елемент майбутньої інфраструктури зв'язку, яка забезпечить принципово нові можливості, зокрема, абсолютно захищену передачу даних, розподілені квантові обчислення та високоточні сенсорні системи. На відміну від класичних мереж, де інформація передається у вигляді бітів (0 або 1), у квантових мережах використовуються **кубіти**, які можуть перебувати у стані суперпозиції. Це означає, що інформація кодується не лише у значеннях, але й у квантових станах, що відкриває значно ширші можливості для її обробки та передачі. Однак реалізація квантових мереж пов'язана з рядом фундаментальних фізичних обмежень, таких як нестабільність квантових станів, втрати сигналу та вплив зовнішнього середовища. Саме тому виникає необхідність у створенні спеціальної фізичної архітектури, яка враховує ці обмеження та забезпечує ефективну роботу мережі.

Квантова мережа – це система взаємопов'язаних вузлів, яка забезпечує передачу інформації за допомогою фізичних носіїв (зазвичай фотонів), обробку та зберігання інформації у вигляді квантових станів із використанням фундаментальних явищ квантової механіки.

Ключовою особливістю квантових мереж є використання таких фізичних явищ, як: суперпозиція; квантова заплутаність; квантова інтерференція.

Квантова мережа може реалізовувати два основні підходи до передачі інформації:

1. Пряма передача квантового стану (наприклад, фотона через канал зв'язку).

2. Розподіл заплутаності між вузлами з подальшим використанням протоколів, таких як квантова телепортація.

Важливою особливістю є те, що квантову інформацію неможливо точно скопіювати (через теорему про заборону клонування), тому передача даних у таких мережах має принципово інший характер, ніж у класичних системах. Це означає, що у квантових мережах неможливо просто «підсилити» сигнал без його зміни, вимірювання квантового стану змінює сам стан, а передача інформації часто вимагає допоміжного класичного каналу. Таким чином, квантова мережа – це не просто аналог класичної мережі з новим типом сигналу, а якісно нова система, яка базується на законах квантової фізики та забезпечує принципово нові можливості для комунікації, обчислень і захисту інформації. Функціонування квантових мереж базується на використанні специфічних фізичних ресурсів, які не мають аналогів у класичних системах зв'язку. Саме ці ресурси визначають принципи передачі, обробки та збереження інформації, а також обмеження й можливості квантових технологій.

Фізична архітектура квантової мережі базується на трьох основних ресурсах: кубіти, фотони як носії інформації та квантова заплутаність. Їх узгоджене використання забезпечує реалізацію квантових протоколів і роботу всієї мережі.

1. Кубіти. Кубіт є фундаментальним елементом квантових мереж – аналогом біта в класичних системах. Це базова одиниця квантової інформації. На відміну від біта, який може набувати лише одного з двох значень (0 або 1), кубіт може перебувати у суперпозиції станів. Кубіт можна реалізувати різними фізичними системами, акими як поляризаційні стани фотонів, спін електронів або ядер, енергетичні рівні атомів, надпровідні квантові контури. Основними властивостями квантових мереж є можливість кодування більшої кількості інформації, ніж у класичних системах; чутливість до зовнішніх впливів (декогеренція); неможливість точного копіювання (теорема про заборону клонування).

2. Фотони як носії квантової інформації. Передача квантової інформації в мережах зазвичай здійснюється за допомогою фотонів. Це зумовлено їх унікальними властивостями: висока швидкість поширення (швидкість світла), слабка взаємодія з навколишнім середовищем, можливість точного контролю квантового стану, можливість передачі на великі відстані, сумісність з оптичними каналами (волокнами та вільним простором). Інформація у фотонах може бути закодована різними способами: у поляризації (горизонтальна/вертикальна), фазі хвилі, часових бінарних інтервалах (ранній/пізній імпульс), частотних станах. Кожен із цих способів має свої переваги та обмеження, які впливають на вибір каналу передачі. Фотони забезпечують передачу квантової інформації, але, на відміну від матеріальних систем, вони непридатні для довготривалого зберігання, що зумовлює необхідність використання квантових пам'ятей. Окрім фотонів, у вузлах мережі можуть використовуватись інші фізичні системи (наприклад, атоми чи тверді тіла), але саме фотони виконують роль «транспортного носія» між вузлами.

3. Квантова заплутаність як мережевий ресурс. Квантова заплутаність є основним ресурсом, який забезпечує унікальні можливості квантових мереж. Заплутаний стан двох або більше частинок означає, що їх квантові стани не можна описати незалежно один від одного. Це означає, що вимірювання одного фотона миттєво визначає стан іншого, незалежно від відстані. Заплутаність є основою квантової криптографії, квантової телепортації, розподілених квантових обчислень. Заплутаність не є матеріальним об'єктом, а виступає як ресурс, який потрібно створювати, підтримувати та передавати через мережу.

Розглянуті ресурси працюють не ізольовано, а у взаємозв'язку: кубіти визначають інформаційний зміст; фотони забезпечують передачу між вузлами; заплутаність створює кореляції, необхідні для складних протоколів. Наприклад, у процесі квантової телепортації квантовий стан кубіта передається за допомогою заплутаної пари фотонів. При цьому використовується також класичний канал зв'язку.

Ефективність використання фізичних ресурсів визначається рядом факторів, таких як час когерентності – як довго зберігається квантовий стан, ефективність генерації фотонів, якість заплутаності, рівень шуму та втрат. Ці параметри безпосередньо впливають на продуктивність і надійність квантової мережі.

Квантові мережі мають принципові відмінності від класичних мереж (табл. 12.1).

Таблиця 12.1. Відмінності класичних мереж від квантових

Характеристика	Класичні мережі	Квантові мережі
Одиниця інформації	Біт	Кубіт
Копіювання	Можливе	Неможливе (теорема про заборону клонування)
Передача	Підсилення сигналу	Регенерація через заплутаність
Безпека	Обчислювальна	Фізично гарантована
Вимірювання	Не впливає	Руйнує стан

Ці відмінності безпосередньо впливають на архітектуру мережі і визначають необхідність використання квантових повторювачів, застосування складних механізмів синхронізації, інтеграцію з класичними каналами. Ключові фізичні ресурси квантових мереж – кубіти, фотони та квантова заплутаність – формують основу всієї квантової комунікаційної інфраструктури. Саме тому подальший розвиток квантових мереж значною мірою залежить від удосконалення методів генерації, передачі та збереження цих ресурсів.

Розглянемо приклади.

1. Квантова криптографія (QKD). У протоколі BB84 фотони передаються з різними поляризаціями і будь-яка спроба перехоплення змінює стан. Це

дозволяє виявити прослуховування. Тому точність детекції та стабільність каналу критично важливі.

2. Квантова телепортація. Передача стану кубіта від вузла A до B проходить через такі етапи: створюється заплутана пара, виконується спільне вимірювання, результат передається класичним каналом, на вузлі B відновлюється стан. Стан передається без фізичного переміщення частинки.

3. Обмеження дальності. Якщо передавати фотони через 100 км волокна, то значна частина сигналу втрачається. Без повторювачів зв'язок стає ненадійним. Це пояснює необхідність спеціальної архітектури мережі.

Таким чином, фізична архітектура квантових мереж формується як багаторівнева система, що включає квантові вузли, повторювачі, квантову пам'ять і механізми розподілу заплутаності. Ефективність такої архітектури визначається не лише характеристиками окремих елементів, але й властивостями фізичного середовища, через яке передається квантова інформація. Одним із ключових компонентів фізичної архітектури квантових мереж є канали передачі квантової інформації. Саме канали зв'язку визначають рівень втрат, вплив декогеренції, дальність передачі та загальну масштабованість квантових мереж. На відміну від класичних систем, де сигнал можна підсилити або відновити без суттєвої втрати змісту, у квантових мережах передача інформації відбувається через збереження квантового стану. Це означає, що вибір фізичного носія інформації та каналу передачі є критично важливим для функціонування всієї мережі.

Основним і найбільш розвиненим середовищем для передачі квантової інформації на сьогоднішній день є оптичні волокна. Їх широке використання зумовлене тим, що сучасна телекомунікаційна інфраструктура вже базується на волоконно-оптичних технологіях, що створює сприятливі умови для інтеграції квантових мереж у існуючі системи зв'язку. Оптичне волокно являє собою тонкий діелектричний хвилевід, у якому світло поширюється завдяки явищу повного внутрішнього відбиття. Світловий сигнал утримується всередині волокна через різницю показників заломлення ядра та оболонки. Це дозволяє

фотонам поширюватися на великі відстані з відносно малими втратами, що є критично важливим для квантових мереж.

У квантових мережах через оптичні волокна передаються одиночні фотони або слабкі квантові сигнали, які кодують інформацію у вигляді квантових станів. Основні способи кодування: поляризація фотонів, фазові стани, часові біни, частотні моди. Особливістю є те, що передається не просто сигнал, а квантовий стан, який необхідно зберегти без спотворень. Оптичні волокна мають низку важливих переваг у квантових мережах. Це, зокрема розвинена інфраструктура (існуючі телекомунікаційні мережі можуть бути використані без повної перебудови); висока стабільність середовища (волокно захищає сигнал від зовнішніх впливів – вітер, атмосферні умови); низькі втрати у телеком-діапазоні (~1550 нм), що дозволяє передавати фотони на десятки і сотні кілометрів; сумісність із класичними системами (можливість одночасної передачі квантових і класичних сигналів).

Попри переваги, оптичні волокна мають суттєві обмеження:

1. Втрати сигналу. Інтенсивність світла зменшується експоненційно з відстанню. Типове загасання складає ≈ 0.2 дБ/км, після ~100–200 км сигнал стає дуже слабким. Це є головним фактором, що обмежує дальність квантового зв’язку.

2. Декогеренція квантових станів. Під час поширення змінюється фаза сигналу, можуть виникати випадкові флуктуації. Це призводить до втрати квантової інформації.

3. Дисперсія. Різні частотні компоненти сигналу поширюються з різною швидкістю. Через це імпульси розширюються, зменшується точність детекції.

4. Поляризаційні спотворення. У реальних волокнах змінюється поляризація світла, що ускладнює використання поляризаційного кодування.

Для покращення передачі квантової інформації застосовуються різні підходи: використання телекомунікаційного діапазону (1550 нм) для мінімізації втрат; застосування квантових повторювачів для розширення дальності; використання часових бінів замість поляризації (менша чутливість до

середовища); компенсація дисперсії та стабілізація фази. У практичних системах часто використовується спільна передача квантових сигналів і класичних сигналів (керування, синхронізація). Це досягається за допомогою частотного мультиплексування (WDM), фільтрації і розділення каналів. Однак класичні сигнали можуть створювати шум, тому їх вплив потрібно мінімізувати.

Попри те, що оптоволоконні канали є найбільш розвиненою та технологічно доступною платформою для квантового зв'язку, їх застосування суттєво обмежується експоненціальним загасанням сигналу у волокні. Навіть за мінімальних втрат у телекомунікаційному діапазоні ефективність передачі різко знижується зі збільшенням відстані, що ускладнює реалізацію глобальних квантових мереж лише на основі волоконної інфраструктури. Крім того, прокладання оптичних ліній на міжконтинентальних або важкодоступних ділянках є технічно складним і економічно затратним. У зв'язку з цим виникає необхідність у використанні альтернативних середовищ передачі квантової інформації. Одним із таких напрямів є вільнопросторові квантові канали, у яких фотони поширюються не через матеріальний хвилевід, а через атмосферу або космічний простір без використання фізичного хвилеводу. Такий підхід дозволяє суттєво збільшити дальність квантового зв'язку та створює основу для гнучкого розгортання мереж і забезпечення зв'язку там, де використання волокон є складним або неможливим**,** зокрема для супутникових квантових мереж і глобального квантового інтернету.

У вільнопросторових каналах фотони поширюються у вигляді спрямованого світлового пучка (зазвичай лазерного) між передавачем і приймачем. Основні елементи системи: джерело фотонів (лазер або квантове джерело), оптична система формування пучка, канал поширення (повітря або вакуум), приймач із детектором. Передача квантової інформації здійснюється шляхом кодування стану фотонів (поляризація, фаза, часові біни) та їх подальшої детекції. У вільному просторі відсутній фізичний хвилевід, тому фотони не обмежені стінками каналу, як у волокні. Це має як переваги, так і недоліки. Перевага: відсутність матеріальних втрат у середовищі (особливо у вакуумі),

можливість передачі на великі відстані (зокрема через космос). Але при цьому сигнал розширюється (дивергенція пучка), частина фотонів не потрапляє в приймач. Переваги вільнопросторових каналів: гнучкість розгортання (не потребують прокладання кабелів); можливість мобільного зв'язку між рухомими об'єктами (дрони, літаки, супутники); ефективність на великих відстанях у вакуум (мінімальні втрати в космічному просторі); швидке розгортання мережі, особливо в складних географічних умовах. Основні обмеження та проблеми:

1. Атмосферні впливи. У наземних умовах сигнал проходить через атмосферу, що призводить до поглинання (водяна пара, аерозолі), розсіювання (туман, пил), турбулентності. В результаті виникають флуктуації інтенсивності сигналу, випадкові зміни фази, зниження точності передачі.

2. Точність наведення. Оскільки пучок світла вузький, то передавач і приймач повинні бути точно вирівняні. Навіть невелике зміщення призводить до втрати сигналу.

3. Дивергенція пучка. Під час поширення пучок розширюється, зменшується щільність фотонів. Це обмежує ефективність передачі на великих відстанях.

4. Фонове освітлення. Зовнішнє світло (сонце, міське освітлення) створює шум, що ускладнює детекцію фотонів і підвищує рівень помилок.

Для підвищення ефективності використовуються: адаптивна оптика для компенсації атмосферних спотворень; вузькосмугові фільтри для зменшення впливу фонового світла; точні системи наведення для стабілізації положення променя; використання нічного часу або космічних каналів для зменшення шуму. Вільнопросторові канали використовуються в таких сценаріях як зв'язок між будівлями в межах міста; експериментальні квантові мережі; передача сигналів між наземними станціями та супутниками; мобільні квантові платформи (дрони, літаки). Особливо важливими вони є для створення глобальних квантових мереж, де волоконні канали є недостатніми.

Вільнопросторові квантові канали відкривають можливість передавання квантової інформації без використання оптичного волокна, що особливо

важливо для зв’язку на великих відстанях. Однак у межах наземних атмосферних каналів передача все ще обмежується впливом турбулентності атмосфери, поглинанням, розсіюванням та погодними умовами, які спричиняють додаткові втрати і декогеренцію квантових станів. Зі збільшенням відстані ці фактори стають дедалі суттєвішими та обмежують ефективність наземних вільнопросторових систем. Для зменшення впливу атмосфери та забезпечення глобального масштабу квантового зв’язку було запропоновано використання супутникових квантових каналів. У таких системах основна частина шляху фотонів проходить через космічний простір, де втрати значно менші, ніж у волоконних або атмосферних каналах. Саме тому супутникові технології розглядаються як один із ключових напрямів побудови глобальних квантових мереж і майбутнього квантового інтернету.

Супутниковий квантовий канал передбачає передачу квантових станів між наземними станціями через супутник.

Існує два основні підходи:

1. Супутник як джерело заплутаних фотонів. Супутник генерує пару заплутаних фотонів. Один фотон передається на одну наземну станцію, інший – на іншу. Між станціями встановлюється квантова кореляція.

2. Супутник як ретранслятор. Наземна станція передає фотон на супутник. Супутник перенаправляє його іншій станції. Таким чином забезпечується передача квантового стану.

Переваги супутникових каналів:

1. Малі втрати на великих відстанях. У космосі відсутнє поглинання та розсіювання і фотони поширюються майже без втрат. Це робить супутникові канали значно ефективнішими за волоконні на великих відстанях.

2. Глобальне покриття. Супутники можуть з’єднувати континенти, забезпечувати зв’язок у важкодоступних регіонах, формувати глобальну мережу.

3. Гнучкість архітектури. Супутникові канали дають можливість швидкого розгортання, забезпечують незалежність від наземної інфраструктури, інтеграці. з іншими типами каналів.

Основні обмеження та проблеми:

1. Атмосферні втрати. Хоча більша частина шляху проходить у вакуумі, при вході та виході сигнал проходить через атмосферу, виникають втрати та спотворення.

2. Точність наведення. Необхідно точно спрямувати пучок на супутник. Оскільки супутник рухається з великою швидкістю, навіть незначні помилки призводять до втрат.

3. Обмежений час зв’язку. Супутник перебуває у зоні видимості лише певний час, тому зв’язок є періодичним.

4. Технічна складність. Складні оптичні системи, високі вимоги до стабільності, значна вартість запуску та обслуговування. Для роботи супутникових каналів необхідно точне узгодження часу між станціями; компенсація затримок сигналу; стабілізація лазерного променя; використання систем відстеження положення супутника. Ці фактори є критично важливими для збереження квантових властивостей сигналу.

Супутникові канали виконують стратегічну функцію. Вони забезпечують міжконтинентальний зв’язок, доповнюють волоконні мережі і дозволяють створити єдину глобальну інфраструктуру. У поєднанні з квантовими повторювачами і наземними мережами, вони формують основу квантового інтернету.

У таблиці 12.2 наведено порівняння різних каналів передачі квантової інформації.

Таблиці 12.2. Порівняння різних каналів передачі квантової інформації

Характерис-тика	Оптичне волокно	Вільний простір	Супутнико-вий канал
Дальність	Обмежена (~100 км)	Середня	Дуже велика
Втрати	Стабільні, накопичуються	Змінні	Менші на великих відстанях
Стабільність	Висока	Низька	Середня
Інфра-структура	Розвинена	Мінімаль-на	Складна
Масштабуван-ня	Локальне/регіона-льне	Обмежене	Глобальне

Для ілюстрації наведеного матеріалу розглянемо приклади.

1. Квантова передача через волокно. У міських квантових мережах (наприклад, між лабораторіями) використовуються стандартні оптичні кабелі. Фотони передаються на відстань до кількох десятків кілометрів. Застосовується мультиплексування з класичними сигналами. Фізичний виклик: зменшення втрат і шуму від класичних каналів.

2. Вільнопросторовий зв'язок. Між двома будівлями встановлюються передавач і приймач, формується вузький лазерний пучок і передається квантова інформація. Однак навіть невелике зміщення або туман може порушити зв'язок.

3. Супутникова квантова комунікація. У глобальних експериментах супутник генерує заплутані фотони. Один фотон передається на одну наземну станцію, інший – на іншу. Таким чином забезпечується квантово-захищений зв'язок на тисячі кілометрів. Перевагою є мінімальні втрати у вакуумі космосу.

Таким чином, канали передачі інформації є фундаментальною складовою квантових мереж, оскільки саме вони забезпечують розповсюдження квантових станів між віддаленими елементами системи. Однак ефективність квантового

зв’язку визначається не лише характеристиками самих каналів, але й властивостями вузлів, між якими здійснюється передача інформації. Саме у вузлах виконуються генерація, прийом, обробка, зберігання та вимірювання квантових станів, а також реалізуються процеси розподілу заплутаності, квантової телепортації та корекції помилок. Крім того, архітектура вузлів безпосередньо впливає на масштабованість, стабільність і продуктивність усієї мережі.

Архітектура квантової мережі передбачає існування кількох типів вузлів, кожен з яких виконує специфічну функцію.

1. Джерела квантових станів (вузли генерації). Ці вузли відповідають за створення квантових носіїв інформації, зазвичай одиничних фотонів або заплутаних пар. Основні функції: генерація одиничних фотонів, створення заплутаних пар фотонів, кодування інформації у квантовий стан. Фізичні реалізації: нелінійні оптичні кристали (спонтанне параметричне розсіювання), квантові точки, атомні системи. Особливості: висока стабільність і контроль параметрів, синхронізація з іншими вузлами, низький рівень шуму. Ці вузли є початковою ланкою у передачі квантової інформації.

2. Квантова пам’ять. Квантова пам’ять – це вузол, призначений для тимчасового зберігання квантових станів без значної втрати їх властивостей. Основні функції: тимчасове зберігання кубітів, синхронізація процесів у мережі, буферизація квантових сигналів. Фізичні реалізації: атомні ансамблі, іонні пастки, твердотільні системи (NV-центри в алмазі). Основні параметри: час когерентності, ефективність запису та зчитування, точність відтворення стану. Квантова пам’ять є критично важливою для складних протоколів, таких як квантова телепортація та робота повторювачів.

3. Вузли-ретранслятори (квантові повторювачі). Ці вузли призначені для розширення дальності квантового зв’язку. Через втрати в каналах передача квантової інформації на великі відстані безпосередньо є неефективною. Це зумовлює необхідність використання квантових повторювачів. Основні функції: відновлення заплутаності між вузлами, поділ каналу на коротші сегменти,

відновлення квантового зв'язку на великих відстанях, виконання операцій перенесення заплутаності (entanglement swapping). На відміну від класичних підсилювачів, повторювачі не копіюють сигнал, працюють із заплутаними станами.

4. Обчислювальні вузли. У більш складних мережах вузли можуть виконувати функції квантових процесорів. Функції: обробка квантової інформації, виконання квантових алгоритмів, взаємодія з іншими вузлами мережі. Такі вузли є основою розподілених квантових обчислень.

5. Вузли-інтерфейси. Ці вузли забезпечують взаємодію між різними фізичними системами. Функції: перетворення квантових станів між різними платформами, узгодження частот і форматів сигналів, інтеграція різних типів кубітів. Наприклад, перетворення сигналу з надпровідного кубіта у фотон для передачі.

6. Гібридні вузли. У реальних квантових мережах вузли зазвичай поєднують кілька функцій: одночасно виконують генерацію, збереження та передачу, інтегрують квантові й класичні компоненти, керуються класичними системами. Такі вузли є основою сучасних експериментальних квантових мереж.

Таким чином, типи вузлів квантової мережі визначають її функціональні можливості та ефективність. Кожен тип вузла виконує специфічну роль, від генерації квантових станів до їх передачі, збереження та обробки. Взаємодія цих вузлів формує складну багаторівневу систему, яка забезпечує роботу квантової мережі. Особливо важливим є те, що більшість сучасних вузлів мають гібридний характер, поєднуючи квантові та класичні компоненти. Це дозволяє реалізовувати складні протоколи та забезпечувати надійне функціонування мережі в реальних умовах. Фізична реалізація вузлів квантової мережі визначає їх можливості щодо генерації, обробки, збереження та передачі квантової інформації. На відміну від класичних мереж, де вузли будуються на основі електронних компонентів, квантові вузли базуються на фізичних системах, здатних підтримувати квантові стани з високою точністю та стабільністю. Реалізація квантових вузлів можлива на різних фізичних платформах. Це можуть

бути іонні пастки, атомні ансамблі, твердотільні системи (NV-центри в алмазі), надпровідні квантові системи, фотонні системи. Порівняння різних фізичних платформ наведено в таблиці 12.3.

Таблиця 12.3. Порівняння різних фізичних платформ

Платформа	Час когерентності	Швид-кість	Масштабо-ваність	Інтеграція з мережею
Іонні пастки	Високий	Середня	Низька	Складна
Атомні ансамблі	Середній	Середня	Середня	Добра
NV-центри	Високий	Середня	Середня	Добра
Надпровідні системи	Низький/середній	Висока	Висока	Складна
Фотонні системи	Дуже високий	Дуже висока	Висока	Відмінна

Жодна з цих платформ не є універсальною, тому перспективним напрямом є розвиток гібридних систем, які поєднують різні фізичні підходи. Саме така інтеграція дозволяє створювати ефективні, масштабовані та функціональні квантові мережі. Приклад гібридного вузла: квантова пам’ять (атомна система); фотонний канал передачі; класична система керування. Переваги: використання сильних сторін різних платформ; підвищення ефективності мережі.

Оскільки у квантових мережах різні вузли можуть використовувати різні фізичні платформи для реалізації кубітів, то виникає необхідність у спеціальних механізмах – інтерфейсах між різними типами кубітів, які дозволяють передавати квантову інформацію між різнорідними системами без втрати її квантових властивостей. Основні труднощі взаємодії між різними кубітами пов’язані з такими факторами: різні частотні діапазони (оптичний, інфрачервоний, мікрохвильовий); різні механізми збереження інформації

(спінові, енергетичні, фотонні стани); різні умови роботи (кімнатна температура або кріогенні умови); різна швидкість обробки та передачі. Без узгодження цих параметрів передача квантового стану між системами призводить до втрати когерентності або повної втрати інформації. Найважливішим типом інтерфейсів є інтерфейси між матеріальними кубітами (атомами, іонами, твердотільними системами) та фотонами. Функції таких інтерфейсів: перетворення квантового стану матеріального кубіта у фотон; передача цього стану через канал; зчитування та запис стану в іншому вузлі. Фізичні механізми: випромінювання та поглинання фотонів; взаємодія атомів із резонаторними полями; використання оптичних резонаторів для підсилення взаємодії. Такі інтерфейси є ключовими для зв'язку між вузлами мережі.

Оскільки різні системи працюють на різних частотах, необхідно узгоджувати їх за допомогою перетворювачів. Тобто виникає завдання перенести квантовий стан фотона з однієї частоти на іншу без втрати інформації. Основні методи: нелінійна оптика (використання спеціальних кристалів); сумарна та різницева генерація частоти; параметричні процеси. Наприклад, фотон генерується при 800 нм, перетворюється у 1550 нм для передачі через волокно, після передачі знову перетворюється назад. У деяких випадках необхідна взаємодія між різними типами матеріальних систем. Наприклад, надпровідний кубіт (мікрохвильовий діапазон) і атомна система (оптичний діапазон). Рішення полягає у використанні проміжного фотонного каналу; перетворенні мікрохвильових сигналів у оптичні; застосуванні гібридних квантових пристроїв. Для ефективної роботи квантових мереж інтерфейси повинні відповідати таким вимогам: висока ефективність передачі мінімальні втрати сигналу; збереження когерентності квантовий стан не повинен руйнуватися; низький рівень шуму відсутність додаткових помилок; узгодження частот і фаз забезпечення сумісності систем.

Сучасні квантові мережі все частіше використовують гібридні підходи, у яких: різні типи кубітів виконують різні функції; фотони забезпечують передачу; матеріальні системи – збереження і обробку. Переваги: оптимізація

функціональності; підвищення ефективності мережі; можливість масштабування. У реальних квантових мережах вузли не є суто квантовими пристроями. Навпаки, їх функціонування можливе лише за умови тісної взаємодії квантових компонентів із класичними системами керування та обробки інформації. Це зумовлює формування гібридної архітектури, у якій квантові та класичні елементи працюють як єдине ціле. Такий підхід є не лише технічним компромісом, а фундаментальною необхідністю, оскільки багато квантових процесів не можуть бути завершені без участі класичних каналів і обчислень.

Існує кілька ключових причин, чому квантові вузли обов'язково мають класичну складову: необхідність вимірювання (результати квантових вимірювань є класичною інформацією); керування квантовими процесами (лазери, генератори сигналів і детектори контролюються класичними системами); обмін службовою інформацією (між вузлами передаються класичні дані – синхронізація, підтвердження); реалізація протоколів (багато квантових алгоритмів потребують класичної обробки результатів). Типовий квантовий вузол включає кілька взаємопов'язаних компонентів: квантова підсистема (кубіти: атомні, іонні, твердотільні; квантові пам'яті; джерела фотонів; детектори квантових станів); класична підсистема (електронні контролери; обчислювальні пристрої; системи обробки сигналів; програмне забезпечення керування); інтерфейсна частина (перетворення квантових сигналів у класичні; узгодження різних типів кубітів; обмін інформацією між підсистемами. Квантові та класичні процеси у вузлі працюють у тісній взаємодії, а саме: квантова система генерує або обробляє стан; виконується вимірювання; результат перетворюється у класичний сигнал; класична система аналізує результат і визначає подальші дії. Цей цикл повторюється багаторазово і є основою роботи квантових протоколів. Таким чином, квантова мережа фактично є кіберфізичною системою, де квантові процеси контролюються класичними засобами.

Розглянемо приклади, що ілюструють наведений матеріал.

1. Вузол квантової криптографії. У системі квантового розподілу ключів лазер генерує фотони, детектори вимірюють їх стан, класичний комп'ютер

аналізує результати. Таким чином, квантова частина забезпечує безпеку, класична – обробку.

2. Квантовий повторювач. У довгому каналі створюються заплутані пари між сусідніми вузлами, у проміжному вузлі виконується операція злиття (swapping), утворюється заплутаність між віддаленими точками.

3. Гібридний вузол. У сучасних експериментах квантова пам'ять зберігає стан, фотон переносить інформацію, класична система координує процес. Це демонструє необхідність інтеграції різних технологій.

Таким чином, організація вузлів та каналів у системах квантової комунікації є фундаментальною основою побудови квантових мереж. Фізична архітектура квантових мереж формується як складна багаторівнева система, у якій поєднуються квантові вузли, канали передачі інформації, механізми розподілу заплутаності та засоби синхронізації мережевих процесів. Поєднання ефективних фізичних каналів передачі інформації з функціонально розвиненими квантовими вузлами створює передумови для реалізації масштабованих систем квантового зв'язку, здатних забезпечити високий рівень захищеності, надійності та передачі квантової інформації на глобальних відстанях.

12.2. Топологічні схеми, синхронізація часу та мультиплексування

Побудова масштабованих квантових мереж потребує не лише створення фізичних каналів передачі та ефективних вузлів обробки інформації, але й організації всієї мережевої структури як єдиної узгодженої системи. Саме структура зв'язків між вузлами, або топологія мережі, визначає ефективність передачі квантової інформації, стійкість до втрат і можливості масштабування. На відміну від класичних мереж, де вибір топології здебільшого визначається міркуваннями пропускної здатності, вартості та надійності, у квантових системах передача інформації супроводжується жорсткими обмеженнями, пов'язаними з втратами, декогеренцією та необхідністю збереження квантової когерентності. Тому топологія мережі, механізми синхронізації часу між

вузлами та методи ефективного використання каналів зв'язку набувають особливого значення.

Топологічна організація визначає спосіб взаємодії між вузлами квантової мережі, впливає на масштабованість, надійність та ефективність розподілу заплутаності. Синхронізація часу є критично важливою через необхідність узгодження квантових операцій, роботи детекторів, квантової пам'яті та процедур обміну заплутаністю. Водночас мультиплексування дозволяє підвищити пропускну здатність квантових каналів і забезпечити більш ефективне використання ресурсів мережі. Саме ці аспекти формують основу функціонування сучасних та перспективних систем квантової комунікації.

Існують різні топології квантових мереж, які визначають структуру з'єднання вузлів і впливають на ефективність передачі квантової інформації (рис. 12.1). Розглянемо особливості кожної з них.

1. Лінійні (ланцюгові) топології *(рис.12.1, а)***.** Лінійна або ланцюгова топологія є найпростішим типом організації квантової мережі, в якому вузли з'єднані послідовно один за одним. Незважаючи на свою простоту, така структура відіграє важливу роль у дослідженні квантових комунікацій і часто використовується як базова модель для аналізу складніших мереж. У лінійній топології вузли розташовані у вигляді послідовного ланцюга A → B → C → D →…A. Кожен вузол з'єднаний лише з двома сусідніми (крім крайніх) і може передавати або приймати квантову інформацію тільки через найближчі вузли. У квантових мережах передача інформації в лінійній топології зазвичай реалізується через передачу фотонів від вузла до вузла, створення заплутаності між сусідніми вузлами і використання операції перенесення заплутаності (entanglement swapping) для встановлення зв'язку між віддаленими вузлами. Таким чином, довгий канал розбивається на коротші сегменти, що підвищує ефективність передачі. Лінійна топологія є природним середовищем для використання квантових повторювачів: розбиття каналу на сегменти; створення заплутаності між сусідніми вузлами; об'єднання сегментів у довгий канал. Без

повторювачів передача квантової інформації на великі відстані в лінійній мережі є неефективною.

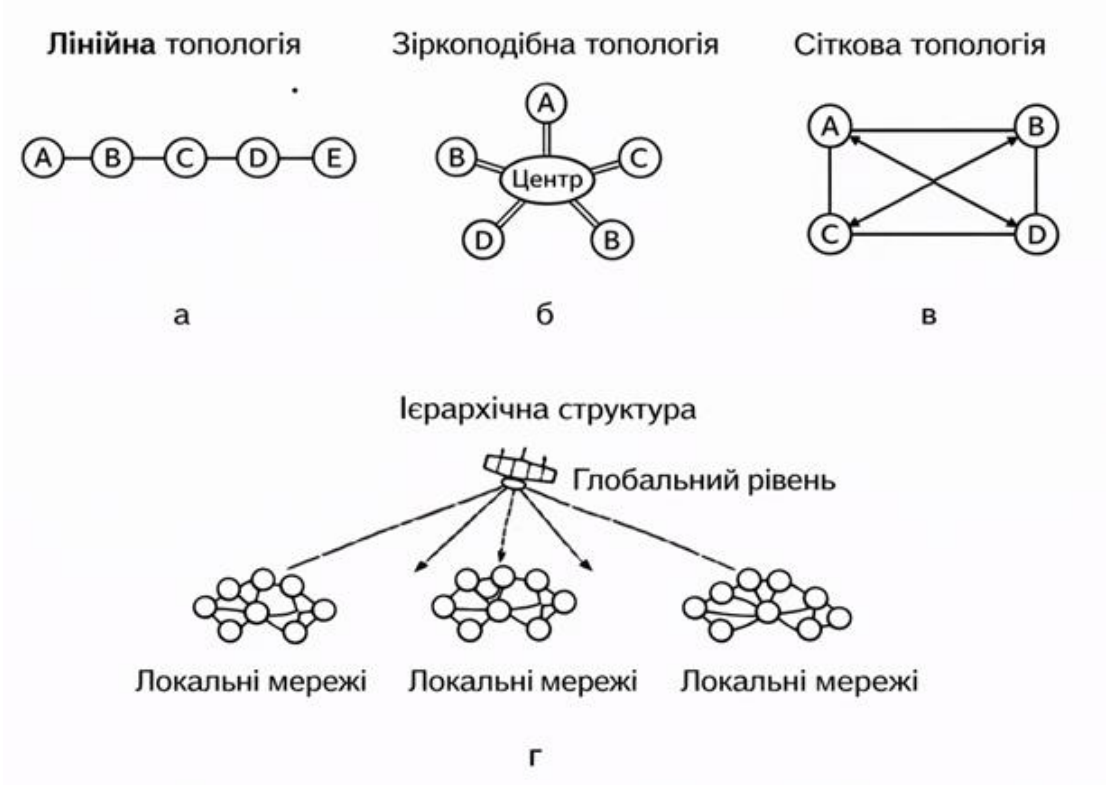


Рис. 12.1. Основні топології квантових мереж і способи розподілу заплутаності: а – лінійна топологія; б – зіркоподібна топологія; в – сіткова топологія; г – ієрархічна структура квантової мережі.

Лінійні топології використовуються у таких випадках: волоконно-оптичні квантові канали; експериментальні мережі; тестування квантових повторювачів; прототипи квантового інтернету. Лінійна топологія є базовою моделлю квантових мереж, яка дозволяє зрозуміти основні принципи передачі квантової інформації та вплив фізичних обмежень. Вона відзначається простотою реалізації та широко використовується в експериментальних дослідженнях. Водночас її суттєвими недоліками є накопичення втрат (кожен сегмент додає втрати, зростає ймовірність помилок при передачі), низька відмовостійкість (вихід з ладу одного вузла розриває мережу, оскільки відсутні альтернативні маршрути передачі) і обмежена масштабованість (збільшення кількості вузлів ускладнює синхронізацію і ефективність падає зі збільшенням довжини

ланцюга). Саме тому для побудови більш складних і надійних квантових мереж необхідно використовувати інші топології або комбіновані архітектури. Попри це, лінійні топології залишаються важливим етапом розвитку квантових мереж і основою для впровадження таких технологій, як квантові повторювачі.

2. Зіркоподібні топології *(рис.12.1, б)***.** Зіркоподібна топологія є одним із базових способів організації квантових мереж, у якому всі вузли підключені до одного центрального вузла. Така структура широко використовується як у класичних, так і в квантових системах, однак у квантових мережах вона має свої специфічні особливості, пов'язані з передачею квантових станів і розподілом заплутаності. У зіркоподібній топології існує один центральний вузол (хаб), який з'єднаний із кількома периферійними вузлами: Центр ↔ A, Центр ↔ B, Центр ↔ C,… . Особливості структури: периферійні вузли не мають прямого зв'язку між собою; вся взаємодія здійснюється через центральний вузол; центр виконує роль координатора або джерела квантових ресурсів.

У квантових мережах центральний вузол може виконувати кілька функцій: генерація заплутаних фотонів і їх розподіл між вузлами; посередництво у передачі квантових станів; координація протоколів і синхронізація. Передача інформації між двома периферійними вузлами (наприклад, A і B) відбувається через центр. Центр створює або отримує квантові стани, передає їх обом вузлам і забезпечує встановлення квантового зв'язку між ними. Переваги зіркоподібної топології: централізоване керування (всі процеси координуються одним вузлом); спрощена синхронізація (легше узгодити часові параметри); ефективний розподіл ресурсів (центр може генерувати заплутаність для багатьох вузлів одночасно); простота реалізації (менша кількість з'єднань порівняно з сітковою топологією). Недоліки та обмеження: єдина точка відмови (центральний вузол є критичним елементом, його вихід з ладу призводить до повної зупинки мережі); обмежена масштабованість (зі збільшенням кількості вузлів навантаження на центр зростає, виникають обмеження продуктивності); обмеження пропускної здатності (всі запити проходять через цент, можливі затримки та перевантаження).

Зіркоподібна топологія є особливо корисною в таких випадках:локальні квантові мережі (лабораторії, кампуси); системи квантового розподілу ключів (QKD); експериментальні платформи для тестування протоколів. У таких системах центральний вузол часто виконує роль джерела заплутаних фотонів. Зіркоподібна структура добре підходить для розподілу заплутаності. Центр генерує заплутані пари, передає їх різним вузлам і забезпечує квантову кореляцію між користувачами. Це дозволяє організувати багатокористувацькі квантові мережі; реалізувати протоколи безпечного зв'язку. Зіркоподібна топологія є ефективною та простою моделлю організації квантових мереж, яка забезпечує централізоване керування та зручний розподіл квантових ресурсів. Вона добре підходить для локальних систем і експериментальних досліджень. Водночас її основним недоліком є залежність від центрального вузла, що обмежує надійність і масштабованість. Тому для побудови великих квантових мереж ця топологія зазвичай використовується в поєднанні з іншими архітектурними підходами. Попри це, зіркоподібні мережі відіграють важливу роль у розвитку квантових комунікацій, особливо на початкових етапах впровадження технологій.

3. Сіткові (mesh) топології *(рис.12.1, в)***.** Сіткова (mesh) топологія є однією з найперспективніших архітектур для побудови масштабованих квантових мереж. На відміну від лінійних або зіркоподібних структур, у сіткових мережах вузли з'єднані між собою множинними каналами, що створює розгалужену структуру з кількома альтернативними шляхами передачі інформації. Така організація значно підвищує надійність і гнучкість мережі, що є особливо важливим з урахуванням чутливості квантових сигналів до втрат і шуму. У сітковій топології кожен вузол має зв'язки з кількома іншими вузлами, утворюючи мережу з багатьма маршрутами передачі. Існує кілька шляхів між будь-якими двома вузлами, відсутній єдиний центральний вузол. Мережа може мати регулярну або довільну структуру. Розрізняють: повну сітку (full mesh), де кожен вузол з'єднаний з усіма іншими і часткову сітку (partial mesh), де вузли з'єднані вибірково. У квантових мережах сіткова топологія дозволяє передавати

квантову інформацію різними маршрутами; обирати канал із найменшими втратами; використовувати альтернативні шляхи у разі відмови. Передача може здійснюватися через: прямі квантові канали між вузлами, послідовність вузлів із використанням квантових повторювачів, розподіл заплутаності різними шляхами. Переваги сіткової топології: висока відмовостійкість (при виході з ладу одного каналу існують альтернативні маршрути і мережа продовжує функціонувати); гнучкість маршрутизації (можливість вибору оптимального шляху, адаптація до змін умов (втрати, шум)); ефективне використання ресурсів (розподіл навантаження між каналами, підвищення ймовірності успішної передачі); масштабованість (мережу можна поступово розширювати, легко додавати нові вузли). Недоліки та обмеження: складність реалізації (велика кількість з'єднань, складна апаратна інфраструктура); проблеми синхронізації (необхідно узгоджувати роботу багатьох вузлів, різні канали мають різні затримки); складність керування (потреба у складних алгоритмах маршрутизації, необхідність управління квантовими ресурсами (заплутаністю)).

Сіткова топологія має специфічні аспекти у квантових системах, зокрема передача інформації залежить від якості квантових каналів, необхідно враховувати декогеренцію і втрати, маршрутизація повинна враховувати ймовірність успішної передачі, а не лише довжину шляху. Сіткові топології розглядаються як основа для регіональних і глобальних квантових мереж, квантового інтернету та інтеграції різних типів каналів (волокна, супутники, вільний простір). Вони дозволяють поєднувати різні технології в єдину систему. Сіткові (mesh) топології є найбільш гнучким і надійним підходом до побудови квантових мереж, оскільки вони забезпечують множинні маршрути передачі та високу відмовостійкість. Це особливо важливо в умовах квантових обмежень, таких як втрати сигналу та декогеренція. Попри складність реалізації та керування, саме сіткові структури є основою для майбутніх масштабованих квантових мереж і глобального квантового інтернету. Вони дозволяють ефективно використовувати квантові ресурси та адаптуватися до змін умов передачі, що робить їх ключовим елементом сучасних досліджень у цій галузі.

4. Ієрархічні та модульні структури *(рис.12.1, г)***.** У міру розвитку квантових мереж виникає потреба переходу від простих топологій до більш складних і масштабованих архітектур. Одним із найефективніших підходів до побудови великих систем є використання ієрархічних та модульних структур, які дозволяють організувати мережу у вигляді впорядкованої багаторівневої системи. Такі структури поєднують переваги різних топологій і забезпечують можливість поступового розширення мережі без втрати її ефективності. Ієрархічна структура передбачає поділ мережі на кілька рівнів: локальний рівень – це невеликі квантові мережі (лабораторії, кампуси); регіональний рівень – це об'єднання локальних мереж (міста, регіони); глобальний рівень – це зв'язок між великими сегментами (континенти). Кожен рівень виконує свою функцію та має власні технічні особливості.

Модульність означає, що мережа складається з окремих блоків (модулів), які можуть працювати автономно, але водночас інтегруються в більшу систему. Це забезпечує відносну незалежність, стандартизовані інтерфейси, можливість заміни або модернізації. Приклад модуля: локальна квантова мережа з кількома вузлами; квантовий повторювач як окремий функціональний блок. Переваги ієрархічних і модульних структур: масштабованість (можливість поступового розширення мережі, додавання нових модулів без перебудови всієї системи); зниження складності (кожен рівень або модуль розглядається окремо, спрощується проєктування та керування); гнучкість (можливість комбінування різних технологій, адаптація до різних умов передачі); надійність (локальні збої не обов'язково впливають на всю мережу, можливість ізоляції проблемних ділянок).

У квантових системах ієрархічні структури мають специфічні аспекти. Зокрема на різних рівнях використовуються різні типи каналів: локально – оптичні волокна; глобально – супутникові канали. Застосовуються різні технології: локальні вузли – квантові процесори; міжрівневі зв'язки – квантові повторювачі. Тому необхідна узгоджена синхронізація між рівнями. Ієрархічна структура дозволяє поєднувати різні типи топологій: лінійні сегменти для

передачі на середні відстані; зіркоподібні структури для локального керування; сіткові мережі для підвищення надійності. Такий підхід дозволяє використовувати переваги кожної топології. Ієрархічні та модульні структури є основою майбутнього квантового інтернету. Вони забезпечують глобальне масштабування, дозволяють інтегрувати різні технології і спрощують управління складною мережею. Таким чином, ієрархічні та модульні структури є ефективним підходом до побудови великих квантових мереж, оскільки вони забезпечують масштабованість, гнучкість і керованість системи. Поділ мережі на рівні та модулі дозволяє спростити її проєктування та адаптувати до різних умов передачі квантової інформації. Особливо важливим є те, що такі структури дозволяють інтегрувати різні топології та технології в єдину систему. Це робить їх ключовим елементом у реалізації глобального квантового інтернету та подальшому розвитку квантових комунікацій.

Однією з ключових задач квантових мереж є розподіл квантової заплутаності між віддаленими вузлами. Саме заплутаність виступає базовим ресурсом для таких процесів, як квантова телепортація, квантовий розподіл ключів і розподілені квантові обчислення. Важливою особливістю є те, що ефективність створення та підтримання заплутаності безпосередньо залежить від топології мережі, тобто способу з’єднання вузлів між собою. Розподіл заплутаності визначається кількома ключовими параметрами: довжина шляху між вузлами (чим більша відстань і кількість сегментів, тим більші втрати); кількість проміжних операцій (кожне перенесення заплутаності знижує її якість); наявність альтернативних маршрутів (можливість обрати оптимальний шлях); рівень шуму та декогеренції (залежить від кількості каналів і вузлів).

У лінійній мережі заплутаність передається послідовно від вузла до вузла. Використовується ланцюг сегментів, застосовується перенесення заплутаності, кожен етап знижує якість стану. В результаті накопичення помилок, зменшення ймовірності успішного розподілу, залежність від кожного вузла.

У зіркоподібній мережі центральний вузол відіграє ключову роль у розподілі заплутаності. Центр генерує або розподіляє заплутані пари, периферійні вузли отримують корельовані фотони. Переваги: ефективний розподіл на короткі відстані; централізований контроль. Обмеження: залежність від центрального вузла; обмежена масштабованість.

Сіткова мережа забезпечує кілька шляхів для розподілу заплутаності. Можливість вибору маршруту, паралельне створення заплутаності і підвищена гнучкість. Переваги: більша ймовірність успішного встановлення зв'язку, можливість обходу пошкоджених каналів, оптимізація передачі.

У великих мережах (ієрархічних структурах) заплутаність розподіляється між різними рівнями. Локальні мережі створюють заплутаність, регіональні рівні об'єднують сегменти, глобальні канали забезпечують передачу на великі відстані. Переваги: ефективне масштабування, оптимальне використання ресурсів. Якість заплутаного стану залежить від кількості етапів передачі, рівня шуму в каналах, точності операцій у вузлах. Загальні закономірності такі: більше вузлів → більше втрат; більше альтернативних шляхів → вища надійність; централізація → спрощення, але зниження стійкості. Для підвищення ефективності використовуються: вибір оптимального маршруту; паралельне створення заплутаності; використання квантових повторювачів; комбінування топологій. Топологія квантової мережі має вирішальний вплив на ефективність розподілу заплутаності, а отже і на роботу всієї системи.

У процесі переходу від експериментальних квантових систем до реальних мереж виникає необхідність забезпечення двох ключових властивостей: масштабованості та відмовостійкості. Саме вони визначають, чи може квантова мережа ефективно функціонувати при збільшенні кількості вузлів і чи здатна вона зберігати працездатність у разі збоїв. На відміну від класичних мереж, ці властивості у квантових системах реалізуються значно складніше через фундаментальні обмеження квантової механіки.

Масштабованість – це здатність мережі збільшувати кількість вузлів, розширювати географічне покриття, підвищувати обсяг переданої інформації без

суттєвого зниження ефективності. Основні виклики масштабування: втрати сигналу (квантові сигнали слабшають зі збільшенням відстані, ймовірність успішної передачі зменшується експоненційно); декогеренція (квантові стани втрачають когерентність з часом, складніше підтримувати стабільність у великих мережах); складність синхронізації (необхідно узгоджувати роботу великої кількості вузлів, зростає вплив часових затримок); обмеженість квантових ресурсів (генерація заплутаності є ресурсозатратною, квантові пам'яті мають обмежений час зберігання). Для забезпечення масштабованості застосовують такі методи: використання квантових повторювачів для поділу каналів; застосування ієрархічних структур; інтеграція різних типів каналів (волокна, супутники); розвиток гібридних квантово-класичних систем.

Відмовостійкість – це здатність мережі зберігати працездатність при пошкодженні вузлів або каналів, адаптуватися до змін умов передачі, забезпечувати безперервність зв'язку. Основні загрози: вихід з ладу вузлів, пошкодження каналів передачі, шум і декогеренція, помилки детекції. Лінійна топологія характеризується низькою відмовостійкістю. Один збій розриває мережу. Зіркоподібна топологія характеризується залежністю від центрального вузла. Це єдина точка відмови. Сіткова топологія характеризується високою відмовостійкістю через альтернативні маршрути передачі. Ієрархічні структури характеризуються локалізацією збоїв і підвищеною надійністю. Підвищення відмовостійкості здійснюється через використання альтернативних маршрутів, дублювання каналів, застосування квантової корекції помилок, динамічну маршрутизацію, моніторинг стану мережі.

Масштабованоість та відмовостійкість квантових мереж тісно пов'язані міжсобою, а саме: збільшення масштабу мережі підвищує ризик збоїв; складніші топології забезпечують кращу надійність. Тому необхідно знаходити баланс між складністю і ефективністю. Масштабованість і відмовостійкість є ключовими характеристиками квантових мереж, які визначають їх придатність до практичного використання. Забезпечення цих властивостей є складним завданням через втрати, декогеренцію та обмеженість квантових ресурсів.

Ефективне вирішення цієї задачі можливе лише за рахунок використання складніших топологій, гібридних архітектур та спеціалізованих технологій, таких як квантові повторювачі й корекція помилок. Саме ці підходи дозволяють створювати масштабовані та надійні квантові мережі, що є необхідною умовою для реалізації глобального квантового інтернету.

Наведемо декілька прикладів для кращого розуміння наведеного матеріалу.

1. Лінійна мережа з повторювачами. У довгому волоконному каналі вузли розташовані через кожні 50–100 км, кожен вузол виконує функцію повторювача, заплутаність передається від вузла до вузла. Недолік: накопичення помилок.

2. Зіркоподібна мережа в лабораторії. Центральний вузол генерує заплутані фотони, розсилає їх кільком користувачам, забезпечується квантовий розподіл ключів. Перевага: простота реалізації.

3. Сіткова міська мережа. Кілька вузлів з'єднані оптичними каналами. Існують альтернативні маршрути, тому при пошкодженні одного каналу використовується інший. Перевага: висока надійність.

4. Глобальна ієрархічна мережа. Локальні мережі з'єднані через супутники. Використовується комбінація волокон і вільного простору. Це формує основу квантового інтернету.

Топологія квантової мережі є основним фактором, що визначає її ефективність, надійність і можливість масштабування. Прості топології, такі як лінійна або зіркоподібна, підходять для базових або експериментальних систем, тоді як сіткові та ієрархічні структури є основою для майбутніх масштабних квантових мереж. Вибір топології визначає не лише архітектуру мережі, але й ефективність використання квантових ресурсів.

Однак сама топологічна організація мережі ще не гарантує ефективної роботи квантової системи. Навіть за наявності оптимальної структури з'єднань між вузлами необхідно забезпечити узгоджене виконання всіх квантових операцій у часі. У квантових мережах процеси генерації заплутаності, передача фотонів, робота детекторів і квантової пам'яті мають суворі часові обмеження та

повинні відбуватися синхронно. Квантова синхронізація необхідна для одночасного надходження фотонів, роботи інтерферометрів, узгодження квантових вимірювань, синхронної роботи квантової пам'яті, коректного функціонування повторювачів. Будь-які часові зсуви можуть призвести до втрати когерентності, зменшення достовірності заплутаних станів або повного зриву передачі інформації. У класичних телекомунікаційних системах синхронізація забезпечує правильну передачу даних, але її вимоги зазвичай обмежуються наносекундними або мікросекундними масштабами. У квантових мережах ситуація значно складніша. Тут точність синхронізації може визначати саму можливість передачі інформації. Це пов'язано з тим, що квантові процеси, зокрема реєстрація фотонів і збереження когерентності, відбуваються на надзвичайно малих часових інтервалах (пікосекунди – наносекунди). Навіть незначні відхилення в часі можуть призвести до втрати квантових кореляцій або неправильного інтерпретування результатів вимірювання. Таким чином, синхронізація часу є не просто допоміжним елементом, а фундаментальною складовою фізичної архітектури квантових мереж.

У квантових мережах багато процесів мають строго визначену часову залежність. Синхронізація необхідна для узгодження моментів передачі та прийому фотонів, забезпечення коректної роботи квантових вимірювань, реалізації протоколів квантової криптографії, координації операцій у квантових повторювачах. Наприклад, у протоколах квантового розподілу ключів синхронізація вирішує такі завдання, як визначення часу приходу фотонів; відбір коректних подій детекції; відсікання шуму та фонових сигналів. Через відсутність синхронізації відбувається збільшення кількості помилок, зниження швидкості генерації ключа, втрата безпеки протоколу. Для створення заплутаності між вузлами необхідно одночасно генерувати або отримувати фотони, точно узгоджувати моменти їх взаємодії, виконувати вимірювання у визначені часові вікна. Особливо це важливо для процесів перенесення заплутаності і квантової телепортації. У квантових системах використовується поняття часового вікна детекції. Квантові детектори не реєструють фотони

безперервно, а працюють у так званих часових вікнах. Часове вікно – це короткий інтервал часу, протягом якого очікується прихід фотона. Тривалість вікна може становити від пікосекунд до наносекунд. Якщо фотон приходить поза цим вікном, він не реєструється або вважається шумом. Тому передавач і приймач повинні бути точно узгоджені. Навіть невеликий часовий зсув призводить до втрати сигналу.

Більшість квантових протоколів використовують квантовий канал (для передачі станів) і класичний канал (для обміну службовою інформацією). Синхронізація між ними необхідна для узгодження результатів вимірювань, передачі допоміжних даних і координації протоколів. Ефективна синхронізація повинна забезпечувати: високу точність (наносекундний або навіть пікосекундний рівень); стабільність у часі; узгодженість між усіма вузлами мережі; мінімальні затримки. Таким чином, синхронізація часу є критично важливим елементом квантових протоколів, оскільки вона забезпечує коректну передачу, детекцію та обробку квантової інформації. Вона визначає точність вимірювань, рівень шуму та ефективність роботи всієї мережі. Без належної синхронізації реалізація більшості квантових протоколів, зокрема квантового розподілу ключів і телепортації, є неможливою. Тому розробка точних і стабільних методів синхронізації є одним із ключових напрямів розвитку квантових мереж.

У квантових мережах використовуються різні методи синхронізації:

1. Синхронізація за допомогою класичних сигналів. Найпростішим і найпоширенішим методом є використання класичних каналів зв’язку для передачі синхронізаційних сигналів. Принцип такий: один вузол (опорний) генерує часовий сигнал, інші вузли приймають і узгоджують свій час, а потім застосовується корекція затримок. Для реалізації застосовуються електронні імпульси, оптичні синхронізаційні сигнали, стандартні протоколи синхронізації. Переваги: простота реалізації; сумісність із класичними мережами. Недоліки: обмежена точність; залежність від затримок у каналі.

2. Оптична синхронізація. У квантових мережах часто використовується синхронізація за допомогою оптичних імпульсів – передача спеціальних світлових імпульсів разом із квантовим сигналом. Принцип: передавач надсилає синхронізаційний імпульс, він поширюється тим самим каналом, що й квантові сигнали, приймач використовує його як часову мітку, на основі цього відкривається вікно детекції. Переваги: висока точність, мінімальні додаткові затримки, узгодженість із фотонними каналами. Недоліки: можливість взаємного впливу з квантовими сигналами, необхідність фільтрації. Оптична синхронізація використовується у системах квантового розподілу ключів, волоконно-оптичних мережах.

3. Синхронізація за допомогою атомних годинників. Атомні годинники забезпечують надзвичайно стабільний відлік часу. Принцип: базуються на частотах переходів атомів, забезпечують стабільність до наносекунд і краще. Переваги: синхронізація віддалених вузлів, довготривала стабільність мережі.Обмеження: висока вартість, складність інтеграції.

4. Супутникова синхронізація (GPS). Для великих мереж використовується глобальна система синхронізації. Принцип; вузли отримують часові сигнали від супутників, забезпечується єдина часовóва шкала. Переваги: глобальне покриття, незалежність від локальних каналів. Недоліки: обмежена точність для квантових задач, затримки сигналу.

5. Двостороння синхронізація (two-way timing). Цей метод базується на обміні сигналами між вузлами. Принцип: вузол А надсилає сигнал вузлу В; вузол В відповідає сигналом назад; обчислюється затримка та коригується час. Переваги: компенсація затримок каналу; висока точність. Недоліки: складність реалізації; потреба у двосторонньому зв’язку.

6. Синхронізація на основі квантових сигналів. У перспективних системах використовується сама квантова інформація як основа синхронізації. Принцип: часові кореляції між заплутаними фотонами; використання квантових подій як часових міток. Переваги: дуже висока точність; природна інтеграція з

квантовими протоколами. Недоліки: складність реалізації; експериментальний характер**.**

7. Гібридні методи синхронізації.

У реальних квантових мережах зазвичай застосовується комбінація кількох підходів. Наприклад, глобальна синхронізація через GPS, локальна – через оптичні імпульси, корекція – двосторонніми методами**.** Переваги: підвищена точність; стійкість до помилок; адаптивність.

Методи синхронізації часу у квантових мережах є критично важливими для забезпечення коректної роботи квантових протоколів. Вони дозволяють узгоджувати процеси генерації, передачі та детекції квантових станів із високою точністю. Особливо важливою є синхронізація у системах квантової телепортації. Якщо результати вимірювань надходять із затримкою, відновлення квантового стану стає неможливим. Розглянемо приклад. Нехай квантова пам'ять має час когерентності $T_{\text{ког.}} = 1$ мс. Час передачі між вузлами $t = 0.8$ мс. Тоді система ще здатна зберегти квантовий стан. Якщо ж $t > T_{\text{ког.}}$, то стан деградує до класичного.

Синхронізація також визначає швидкість генерації заплутаності. Якщо частота генерації фотонів $f = {}^{1}/_{T}$, де T – період між імпульсами, то порушення часової узгодженості призводить до втрати частини фотонів.

У квантових мережах точність синхронізації визначає ефективність передачі та обробки квантової інформації. Одним із ключових факторів, що обмежують цю точність, є джитер – випадкові флуктуації часу приходу сигналів відносно їх очікуваного значення. На відміну від класичних систем, де джитер може призводити лише до незначних помилок, у квантових мережах він безпосередньо впливає на коректність квантових вимірювань і збереження квантових станів. У квантових системах джитер проявляється як зміщення часу детекції фотонів, невизначеність моменту вимірювання, розмиття часових вікон. Основними причинами джиттера є: електронні компоненти (нестабільність генераторів і детекторів); оптичні канали (флуктуації швидкості поширення

сигналу); атмосферні впливи (у вільному просторі), турбулентність і зміни показника заломлення; детектори фотонів (обмежена точність реєстрації); системи синхронізації (неточності у передачі часових сигналів). Вплив джитера на квантові протоколи проявляється через: збільшення помилок детекції (фотони можуть реєструватися поза правильним часовим вікном, зростає кількість хибних подій); зниження якості заплутаності (порушується часове узгодження фотонів, зменшується ступінь кореляції між ними); погіршення інтерференції (квантова інтерференція залежить від точного збігу у часі, джитер знижує контраст інтерференційних ефектів); вплив на QKD (збільшується рівень помилок (QBER), зменшується швидкість генерації ключа, може знижуватися безпека системи). Із джитером пов'язане часове вікно детекції. При малому джитері отримуємо вузьке вікно детекції і менше шуму. При великому джитері потрібно розширювати вікно, звідси більше помилок. Таким чином, джитер прямо впливає на компроміс між точністю детекції і рівнем шуму. Для зменшення джитера використовують такі методи: покращення апаратури (використання високостабільних генераторів, застосування точних фотонних детекторів); оптимізація каналів (стабілізація температури, зменшення впливу середовища); цифрова обробка сигналів (фільтрація шуму, корекція часових відхилень); синхронізація високої точності (використання оптичних імпульсів, двосторонні методи синхронізації).

Квантові повторювачі є ключовим елементом для передачі квантової інформації на великі відстані. Вони дозволяють подолати втрати в каналах зв'язку шляхом розбиття довгого каналу на коротші сегменти та використання процесів перенесення заплутаності. Проте ефективна робота таких систем неможлива без високоточної синхронізації між усіма вузлами мережі. Синхронізація в мережах з квантовими повторювачами є значно складнішою, ніж у простих квантових каналах, оскільки вона повинна враховувати не лише передачу сигналів, а й координацію складних квантових процесів. У мережах із повторювачами канал поділяється на сегменти: A ↔ B ↔ C ↔ D. Кожен сегмент незалежно створює заплутаність, передає результати вимірювань, очікує

синхронізації з іншими сегментами. Проблема полягає в тому, що заплутаність повинна бути створена у всіх сегментах у сумісні часові інтервали. Для виконання перенесення заплутаності необхідно синхронізувати моменти створення заплутаних пар, узгодити час проведення вимірювань у вузлах, передати класичні результати між вузлами. Якщо ці процеси не узгоджені, операція не дає потрібного результату і квантовий стан втрачається. Наприклад, для виконання операції перенесення заплутаності два фотони повинні бути виміряні одночасно. Навіть невеликий часовий зсув робить операцію некоректною. Тому основним елементом синхронізації у мережах із повторювачами є квантова пам'ять. Вона зберігає квантові стани до завершення інших процесів, компенсує затримки між сегментами, узгоджує час виконання операцій. У мережах із повторювачами виникають затримки у квантових каналах, у класичних каналах, у процесах обробки сигналів. Для їх компенсації використовуються двостороння синхронізація, попереднє калібрування каналів, адаптивне налаштування часу. У таких мережах застосовуються спеціалізовані протоколи узгодження часу генерації фотонів, синхронізація детекції, обмін класичними повідомленнями про результати. Ці протоколи повинні враховувати затримки, працювати в реальному часі, забезпечувати високу точність. Синхронізація в таких мережах має гібридний характер: квантові процеси визначають часові вимоги; класичні канали забезпечують координацію. Наприклад, створення заплутаності – квантовий процес, передача результатів вимірювань – класичний процес. Синхронізація в мережах із квантовими повторювачами є складною багаторівневою задачею, яка передбачає узгодження роботи багатьох вузлів і процесів. Вона забезпечує коректне виконання операцій перенесення заплутаності та ефективну передачу квантової інформації на великі відстані.

Розглянемо приклади синхронізація часу у квантових мережах

1. Квантовий розподіл ключів. У системі QKD фотони передаються з певною частотою. Приймач відкриває вікна детекції синхронно. Якщо синхронізація порушена, зростає кількість помилок.

2. Заплутані фотони. У експерименті з заплутаними фотонами два детектори повинні реєструвати події одночасно і визначається кореляція між сигналами. Якщо виникає джитер, кореляція розмивається і результати стають менш точними.

3. Супутникова квантова мережа. Сигнал проходить через атмосферу. Виникають змінні затримки, тому необхідно постійно коригувати часові мітки.

Подальший розвиток технологій синхронізації є ключовим для створення масштабованих і високоточних квантових мереж, зокрема глобального квантового інтернету.

Синхронізація часу є необхідною умовою стабільної роботи квантової мережі, оскільки забезпечує узгоджене виконання квантових операцій та коректну взаємодію між вузлами. Проте навіть при ідеальній синхронізації ефективність системи значною мірою визначається тим, наскільки раціонально використовуються доступні канали зв’язку. У реальних квантових мережах ресурси передачі є обмеженими, а процеси генерації та розподілу заплутаності мають імовірнісний характер. На відміну від класичних систем, де можна збільшити потужність сигналу або використовувати підсилювачі, у квантових мережах ці підходи непридатні через фундаментальні обмеження квантової механіки, зокрема заборону клонування квантових станів. Тому виникає потреба одночасної передачі кількох потоків квантової та класичної інформації через спільну фізичну інфраструктуру. Саме цю задачу вирішують методи мультиплексування, які дозволяють підвищити пропускну здатність каналів, оптимізувати використання ресурсів мережі та забезпечити масштабованість квантових комунікаційних систем.

Мультиплексування – це технологія, що дозволяє передавати кілька потоків інформації через один фізичний канал без взаємного спотворення. У квантових мережах мультиплексування є значно складнішим, ніж у класичних, оскільки необхідно зберігати квантову когерентність і уникати взаємного впливу сигналів. У квантових мережах мультиплексування виконує кілька важливих функцій: підвищення пропускної здатності (одночасна передача кількох потоків,

збільшення швидкості передачі інформації); ефективне використання ресурсів (оптимізація використання каналів, зменшення простою системи); паралельна передача квантових станів (одночасне передавання кількох кубітів, підтримка багатокористувацьких систем); підвищення надійності (можливість резервування каналів, використання альтернативних потоків).

Мультиплексування у квантових мережах має специфічні особливості, а саме: необхідність збереження квантових властивостей (когерентності, заплутаності); відсутність можливості копіювання сигналу; чутливість до взаємних перешкод між каналами. Це робить реалізацію мультиплексування значно складнішою, ніж у класичних системах. У практичних системах мультиплексування використовується також для спільної передачі квантових і класичних сигналів, передачі службової інформації (синхронізація, керування), інтеграції квантових мереж із класичною інфраструктурою.

Залежно від того, яка саме характеристика сигналу використовується для розділення потоків, виділяють кілька основних типів мультиплексування:

1. Часове мультиплексування (Time Division Multiplexing, TDM). Часове мультиплексування (Time Division Multiplexing, TDM) – це метод передавання інформації, при якому кілька незалежних потоків даних передаються через один фізичний канал у різні проміжки часу. У такому підході кожному потоку або користувачу виділяється окремий часовий інтервал (тайм-слот), протягом якого він може передавати інформацію. Передача фотонів організовується у вигляді послідовності коротких часових імпульсів:

$$T = N\Delta t, \qquad (12.1)$$

де T – повний цикл передачі; N – кількість часових слотів; Δt – тривалість одного слоту. Кожен часовий слот відповідає окремому квантовому сигналу або окремому користувачу мережі. Наприклад, якщо джерело генерує фотони кожні 1 нс, то $\Delta t = 1$ нс. При N=100 маємо $T = 100$ нс. Фізично це означає, що протягом 100 нс через один канал можуть бути послідовно передані 100 окремих квантових сигналів. У квантових системах TDM має кілька важливих переваг: підвищення пропускної здатності каналу, можливість одночасної роботи кількох

користувачів, ефективніше використання джерел фотонів, зменшення простою каналу. Однак для квантових мереж часове мультиплексування потребує дуже точної синхронізації. Якщо фотон надходить поза межами свого часовго вікна, виникають помилки детектування та порушується інтерференція. Умову коректної роботи можна записати як $\delta t \ll \Delta t$, де δt – похибка синхронізації; Δt – тривалість часового слоту. Це означає, що похибка синхронізації повинна бути значно меншою за тривалість слоту.

2. Частотне мультиплексування (Frequency Division Multiplexing, FDM / WDM). Частотне мультиплексування (Frequency Division Multiplexing, FDM) – це метод передавання інформації, при якому кілька незалежних інформаційних потоків одночасно передаються через один фізичний канал, але на різних частотах або довжинах хвиль. Кожному каналу виділяється власний спектральний діапазон, завдяки чому сигнали не заважають один одному. У квантових мережах частотне мультиплексування зазвичай реалізується для фотонних сигналів через використання різних довжин хвиль: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$. Кожна довжина хвилі відповідає окремому квантовому каналу. Фізично це означає, що через одне оптичне волокно одночасно можуть передаватися декілька потоків квантової інформації без необхідності створення окремих фізичних ліній зв'язку.

Сумарна швидкість передачі при частотному мультиплексуванні:

$$R_\Sigma = \sum_i^N R_i, \tag{12.2}$$

де R_Σ – загальна швидкість передачі; R_i – швидкість окремого спектрального каналу; N – кількість частотних каналів. Наприклад, якщо через волокно передаються три канали зі швидкостями: $R_1 = 1\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$, $R_2 = 2\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$, $R_3 = 1{,}5\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$ то сумарна швидкість $R_\Sigma = 4{,}5\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$.

У квантових системах важливою умовою є спектральна роздільність каналів. Сусідні канали не повинні перекриватися, тобто має виконуватися умова: $\Delta\nu > \delta\nu$, де $\Delta\nu$ – відстань між каналами; $\delta\nu$ – спектральна ширина

сигналу. Це необхідно для уникнення взаємних перешкод між фотонами різних каналів.

Основні переваги частотного мультиплексування: значне підвищення пропускної здатності каналу, можливість одночасної передачі багатьох квантових потоків, ефективне використання оптичної інфраструктури, сумісність із сучасними телекомунікаційними волокнами. Проте у квантових мережах існують і складнощі, зокрема: спектральні шуми, дисперсія у волокні, необхідність високоточної фільтрації, складність синхронізації багатьох спектральних каналів. Частотне мультиплексування є одним із ключових методів підвищення продуктивності майбутніх квантових мереж і глобального квантового інтернету.

3. Просторове мультиплексування (Spatial Multiplexing). Просторове мультиплексування (Spatial Division Multiplexing, SDM) – це метод передавання інформації, при якому кілька незалежних потоків даних одночасно передаються через різні просторово розділені канали. У квантових мережах такими каналами можуть бути окремі оптичні волокна, різні моди поширення світла або незалежні оптичні траєкторії. Фізично просторове мультиплексування означає, що квантова інформація передається паралельно через декілька незалежних просторових шляхів: $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_N$, де C_i – окремий просторовий канал; N – кількість незалежних каналів. На відміну від часового чи частотного мультиплексування, тут розділення відбувається не за часом і не за спектром, а саме за фізичним простором передачі. Сумарна швидкість передачі системи:

$$R_\Sigma = \sum_{i}^{N} R_{i,} \tag{12.3}$$

де R_Σ – загальна швидкість передачі; R_i – швидкість окремого i-того просторового каналу; N – кількість незалежних просторових каналів. Якщо всі канали однакові, то $R_\Sigma = NR$. Наприклад, якщо використовується 4 незалежні волоконні канали зі швидкістю $R = 1\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$, то $R_\Sigma = 4\,{}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$.

На відміну від часового або частотного мультиплексування, розділення потоків відбувається за просторовою координатою, тобто кожен канал використовує власний фізичний шлях поширення сигналу. Загальна пропускна здатність системи визначається сумою швидкостей усіх просторових каналів. Таким чином, просторове мультиплексування дозволяє істотно підвищити ефективність використання телекомунікаційної системи без збільшення смуги частот або швидкості роботи окремого каналу. Хоча математичний вираз для сумарної швидкості передачі при частотному та просторовому мультиплексуванні має однаковий вигляд фізичний зміст цих методів суттєво відрізняється. У частотному мультиплексуванні незалежні канали формуються за рахунок різних частотних або спектральних інтервалів у межах одного фізичного каналу зв'язку. Натомість у просторовому мультиплексуванні канали розділяються просторово та передаються різними фізичними шляхами або модами поширення сигналу. Таким чином, частотне мультиплексування використовує спектральний ресурс системи, тоді як просторове мультиплексування – її просторові ступені свободи.

У квантових мережах просторове мультиплексування може реалізовуватись кількома способами: використання кількох паралельних оптичних волокон; передача через багатомодові волокна; використання різних просторових мод фотонів; передача через незалежні атмосферні канали. Основні переваги просторового мультиплексування: значне збільшення пропускної здатності, паралельна передача великої кількості квантових станів, зменшення навантаження на окремі канали, підвищення надійності системи. Недоліки: складність вирівнювання каналів, взаємні просторові перешкоди, чутливість до атмосферних спотворень, складність детектування багатьох мод. У квантових мережах просторове мультиплексування часто поєднується з часовим і частотним мультиплексуванням, що дозволяє створювати багатовимірні системи передачі інформації з дуже високою пропускною здатністю.

4. Поляризаційне мультиплексування (Polarization Division Multiplexing, PDM). Поляризаційне мультиплексування – це метод передавання інформації,

при якому кілька незалежних інформаційних потоків передаються одночасно через один фізичний канал, але з використанням різних поляризаційних станів світла. У квантових мережах фотони можуть мати різні поляризації, наприклад горизонтальну та вертикальну. Оскільки ці стани є ортогональними, тобто $\langle H \mid V \rangle = 0$, то вони можуть використовуватися як незалежні канали передачі інформації. Фізично це означає, що два потоки квантової інформації можуть одночасно передаватися одним оптичним волокном або через один вільнопросторовий канал без взаємного змішування.

У найпростішому випадку сумарна швидкість передачі:

$$R_\Sigma = R_H + R_V, \tag{12.4}$$

де R_H – швидкість передачі для горизонтальної поляризації; R_V – швидкість передачі для вертикальної поляризації. Якщо обидва канали мають однакову швидкість, то $R_\Sigma = 2R$. Наприклад, якщо кожен поляризаційний канал забезпечує $R = 1\ {}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$, то загальна швидкість $R_\Sigma = 2\ {}^{\text{Мбіт}}/_{\text{с}}$.

У квантових комунікаціях поляризація є одним із найпоширеніших способів кодування кубітів. Поляризаційне мультиплексування особливо ефективне у квантовій криптографії (bb84, e91), квантовій телепортації, передачі заплутаних фотонів, волоконно-оптичних і супутникових квантових каналах. Основними перевагами поляризаційного мультиплексування є: подвоєння пропускної здатності без додаткових каналів; сумісність із фотонними квантовими системами; можливість одночасної передачі кількох квантових потоків; ефективне використання оптичної інфраструктури. Однак у реальних системах виникають проблеми: поляризаційна дисперсія; випадкове обертання поляризації у волокні; атмосферні спотворення; декогеренція поляризаційних станів. Через це необхідні системи компенсації поляризації та стабілізації каналу. У сучасних квантових мережах поляризаційне мультиплексування часто поєднується з часовим, частотним і просторовим мультиплексуванням, що дозволяє суттєво збільшити пропускну здатність і масштабованість квантових систем зв’язку.

5. Мультиплексування за часовими біновими станами (time-bin multiplexing). Мультиплексування за часовими біновими станами – це метод передавання квантової інформації, у якому різні квантові стани кодуються у часових інтервалах прибуття фотона. У такому підході один фотон може перебувати у суперпозиції двох або більше часових станів – «раннього» та «пізнього» імпульсів. Базисні часові бінові стани записуються як $|e\rangle$, $|l\rangle$, де $|e\rangle$ – ранній часовий бін (early); $|l\rangle$ – пізній часовий бін (late). Квантовий стан фотона у time-bin кодуванні: $|\psi\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|l\rangle$, де α, β – комплексні амплітуди ймовірностей. Фізично це означає, що фотон не має визначеного моменту проходження, а перебуває у суперпозиції двох часових позицій. Мультиплексування реалізується шляхом передачі великої кількості часових бінів через один канал: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$, де t_i – окремий часовий бін; N – кількість часових позицій. Кожен часовий бін може нести окремий квантовий стан або окремий інформаційний потік. Повний цикл передачі: $T = N\Delta t$, де T – повний часовий інтервал; Δt – риваліть одного біна. Наприклад, якщо $\Delta t = 1$ нс, а використовується $N = 100$, то $T = 100$ нс.

Однією з головних переваг часових бінових станів є їх висока стійкість до декогеренції у волоконно-оптичних каналах. На відміну від поляризаційних станів, часові біни значно менше залежать від флуктуацій середовища та поляризаційних змін у волокні. Умовою коректного розділення часових бінів є $\delta t \ll \Delta t$, де δt – похибка детектування або синхронізації; Δt – інтервал між часовими біновими станами. Це означає, що система синхронізації повинна працювати з дуже високою точністю.

Time-bin мультиплексування широко використовується у квантовій криптографії, квантовій телепортації, волоконно-оптичних квантових мережах, системах далекого квантового зв'язку, квантових повторювачах. Для створення часових бінових станів часто використовують інтерферометри Маха–Цендера, які розділяють фотонний імпульс на два часово зміщені компоненти. Основні переваги: висока стійкість до шумів; хороша сумісність із оптичними волокнами; можливість далекої передачі; ефективне мультиплексування великої кількості

станів. Основні недоліки: складна синхронізація; високі вимоги до точності детекторів; необхідність стабільних інтерферометрів; накопичення фазових помилок. Мультиплексування за часовими біновими станами є одним із найперспективніших підходів для побудови масштабованих квантових мереж та глобального квантового інтернету.

6. Гібридне мультиплексування (Hybrid Multiplexing). Гібридне мультиплексування – це метод передавання інформації, у якому одночасно поєднуються декілька способів мультиплексування, наприклад часове, частотне, просторове та поляризаційне. Такий підхід дозволяє значно збільшити пропускну здатність квантової мережі та ефективніше використовувати фізичні ресурси каналу зв'язку. У квантових системах гібридне мультиплексування означає, що квантова інформація одночасно розділяється за часом, за довжиною хвилі, за поляризацією, за просторовими модами. Наприклад, один фотонний канал може використовувати: $(\lambda_i, t_j, P_k, S_m)$, де λ_i – спектральний (частотний) канал; t_j – часовий бін; P_k – поляризаційний стан; S_m – просторова мода. Таким чином кожна комбінація параметрів формує окремий незалежний інформаційний канал. Загальна пропускна здатність системи:

$$R_\Sigma = N_t N_f N_p N_s R, \qquad (12.5)$$

де N_t – кількість часових каналів; N_f – кількість частотних каналів; N_p – кількість поляризаційних каналів; N_s – кількість просторових каналів; R – швидкість одного базового каналу. Наприклад, якщо використовується: 10 часових бінів; 4 довжини хвилі; 2 поляризації; 3 просторові моди, то

$$R_\Sigma = 10 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{R} = 240\ \mathrm{R}$$

Це означає, що пропускна здатність збільшується у 240 разів порівняно з одним каналом.

У квантових мережах гібридне мультиплексування особливо важливе через обмеженість квантових ресурсів і високу вартість генерації заплутаних станів. Поєднання кількох типів мультиплексування дозволяє збільшити швидкість генерації ключів, підвищити ефективність квантових повторювачів,

покращити масштабованість мереж, зменшити вплив втрат у каналі. Наприклад, часове мультиплексування використовується для послідовної передачі імпульсів; частотне – для паралельних спектральних каналів; поляризаційне – для подвоєння кількості станів; просторове — для передачі через кілька мод або волокон. Умовою ефективної роботи є незалежність каналів: $\langle \psi_i \mid \psi_j \rangle \approx 0,\ i \neq j$, де ψ_i, ψ_j – квантові стани різних каналів. Це означає мінімізацію взаємних перешкод між каналами.

Основні переваги гібридного мультиплексування: дуже висока пропускна здатність; ефективне використання інфраструктури; можливість масштабування глобальних квантових мереж; паралельна передача великої кількості квантових станів. Недоліки: складна система синхронізації; високі вимоги до стабільності; складність детектування; накопичення шумів і декогеренції; складність керування великою кількістю каналів. Гібридне мультиплексування є одним із ключових напрямів розвитку майбутнього квантового інтернету, оскільки саме поєднання кількох методів передачі дозволяє реалізувати високошвидкісні та масштабовані квантові мережі глобального рівня.

Кожен із цих підходів має свої переваги та обмеження, що визначають область його застосування. Найбільш перспективним є використання гібридних методів, які дозволяють максимально ефективно використовувати квантові канали. Розвиток технологій мультиплексування є важливим кроком до створення високопродуктивних і масштабованих квантових мереж. Мультиплексування є ефективним інструментом підвищення пропускної здатності квантових мереж, однак його реалізація суттєво обмежується фундаментальними законами квантової механіки. Одним із найважливіших обмежень є теорема про заборону клонування. Іншим суттєвим обмеженням є декогеренція та втрати. Квантові стани є дуже чутливими до взаємодії із середовищем. При передачі кількох сигналів зростає рівень шуму. Взаємодія між каналами може призводити до втрати когерентності.

У мультиплексованих системах можливі перехресні впливи між каналами – це небажаний вплив одного сигналу на інший. Причини: неповне спектральне розділення (у WDM); перекриття часових імпульсів (у TDM); взаємодія мод (у просторовому мультиплексуванні); недосконаліть фільтрів. Наслідки: спотворення квантових станів; збільшення ймовірності помилок; зниження якості заплутаності.

Слід зазначити, що фотонні детектори також обмежують ефективність мультиплексування. Для них характерна скінченна роздільна здатність у часі, обмежена спектральна селективність, наявність темного шуму. Наслідками є складність розділення каналів; обмеження кількості одночасних сигналів; зростання помилок при детекції.

Мультиплексування потребує значних ресурсів: джерел одиничних фотонів; генерації заплутаних пар; квантових пам'ятей. Проблема полягає в тому, що ресурси обмежені і не можуть масштабуватися довільно. У мультиплексованих системах складніше підтримувати заплутаність. Необхідна синхронність між каналами, зростає ймовірність втрат, складніше виконувати перенесення заплутаності. Збільшення кількості каналів призводить до зростання шуму; погіршення якості сигналу; зниження ефективності передачі. Отже, існує оптимальна кількість каналів для кожної системи. Квантові обмеження мультиплексування визначають фундаментальні межі ефективності передачі інформації у квантових мережах. Тому розробка ефективних методів мультиплексування у квантових мережах потребує глибокого врахування як фізичних законів, так і технічних можливостей сучасних систем.

Наведемо приклади мультиплексування.

1. Часове мультиплексування в QKD. Фотони передаються у різні часові слоти. Кожен слот відповідає окремому біту ключа. Синхронізація забезпечує правильну інтерпретацію.

2. Частотне мультиплексування. Кілька квантових каналів передаються одночасно. Кожен має свою довжину хвилі. Використовується спектральне розділення.

3. Комбінована передача. Один канал використовується для класичних сигналів керування, інший – для квантових станів. Застосовується фільтрація для зменшення шуму.

Таким чином, ефективність квантових мереж визначається не лише фізичними властивостями каналів передачі, а й правильною організацією топології, точною синхронізацією процесів та раціональним використанням ресурсів зв'язку. Топологічні схеми забезпечують структуру взаємодії між вузлами мережі, синхронізація часу дозволяє узгоджувати квантові операції та зберігати когерентність станів, а мультиплексування підвищує пропускну здатність і масштабованість системи. Поєднання цих підходів є необхідною умовою для створення надійних і високопродуктивних квантових комунікаційних мереж та майбутнього квантового інтернету.

12.3. Гібридні інтерфейси та інтеграція з класичною інфраструктурою

Однією з найскладніших інженерних проблем у квантових мережах є забезпечення взаємодії між різними фізичними платформами. Як було розглянуто раніше, вузли квантової мережі можуть базуватися на різних системах – атомах, іонах, твердотільних дефектах або надпровідних контурах. Кожна з цих платформ має свої переваги, але водночас працює в різних фізичних умовах і на різних частотах. Це створює фундаментальну проблему – несумісність квантових систем. Наприклад, квантова пам'ять може ефективно працювати з фотонами у видимому діапазоні, тоді як передача на великі відстані через оптичні волокна найкраще відбувається у телекомунікаційному діапазоні (~1550 нм). Без спеціальних механізмів узгодження ці системи не можуть взаємодіяти без втрати квантової інформації. Саме тому у квантових мережах важливу роль відіграють гібридні інтерфейси та перетворювачі частоти, які забезпечують зв'язок між різними фізичними середовищами.

Несумісність різних фізичних платформ, на яких реалізуються кубіти є однією фундаментальних проблем побудови квантових мереж. На відміну від класичних мереж, де всі пристрої працюють із універсальним цифровим

форматом інформації, у квантових системах спосіб кодування та обробки інформації безпосередньо залежить від фізичної природи носія. Це створює суттєві труднощі при об'єднанні різних квантових пристроїв у єдину мережу. Квантові системи, що використовуються у вузлах мережі, відрізняються за такими параметрами, як частота випромінювання, механізми збереження квантового стану, умови роботи (температура, середовище), швидкість обробки інформації. Основним причинами несумісності можуть бути різні частотні діапазони (фотонні системи – оптичний діапазон, надпровідні кубіти – мікрохвильовий діапазон), різні механізми кодування (поляризація, фаза, час для фотонів, спін або енергетичні рівні для атомів), різні умови функціонування (кімнатна температура для деяких твердотільні системи, кріогенні температури для надпровідних кубітів), різні часові масштаби (фотонні процеси дуже швидкі, квантові пам'яті повільніші, але стабільні). Несумісність платформ призводить до таких проблем: складність передачі квантових станів між вузлами; втрати інформації при перетворенні; обмеження масштабованості мережі; необхідність додаткових інтерфейсів. Для подолання цієї проблеми використовуються: інтерфейси «матерія–світло»; перетворювачі частоти; гібридні квантові системи. Ці технології дозволяють передавати інформацію між різними платформами, узгоджувати параметри сигналів, інтегрувати різні квантові пристрої. Розглянемо їх більш детально.

1. Квантові інтерфейси «матерія–світло». Одним із ключових елементів квантових мереж є інтерфейси, що забезпечують взаємодію між різними фізичними носіями інформації. Найважливішим серед них є квантовий інтерфейс «матерія–світло», який дозволяє передавати квантову інформацію між локальними вузлами (де вона зберігається і обробляється) та каналами зв'язку (де вона транспортується). Цей інтерфейс є критичним для побудови будь-якої квантової мережі, оскільки поєднує дві принципово різні фізичні системи. У квантових мережах матеріальні системи (атоми, іони, твердотільні дефекти) використовуються для зберігання і обробки квантової інформації, а фотони (світло) використовуються для передачі інформації на відстань. Інтерфейс

«матерія–світло» забезпечує перетворення квантового стану матеріального кубіта у фотон, передачу цього стану через канал і відновлення стану в іншому вузлі. Інтерфейс працює на основі взаємодії між квантовою системою та електромагнітним полем. При цьому відбуваються такі основні процеси: випромінювання фотона матеріальною системою; поглинання фотона іншим вузлом; перенесення квантового стану між системами. Ці процеси повинні відбуватися так, щоб зберігалася когерентність, не руйнувалася заплутаність, мінімізувалися втрати.

Фізична реалізація квантового інтерфейсу «матерія–світло» здійснюється через атомні системи (атоми або іони взаємодіють із лазерним випромінюванням, квантовий стан записується або зчитується через фотони), квантові точки (напівпровідникові структури, що генерують одиничні фотони, використовуються для інтегрованих систем), NV-центри в алмазі (дефекти в кристалі алмазу забезпечують стабільний зв’язок зі світлом і можуть працювати при кімнатній температурі), оптичні резонатори (підсилюють взаємодію між світлом і матерією і підвищують ефективність передачі). Ефективний інтерфейс повинен забезпечувати: високу ефективність перетворення (мінімальні втрати при передачі); збереження когерентності (квантовий стан не повинен руйнуватися); узгодження частот (сумісність із каналами передачі); низький рівень шуму (мінімізація помилок). Основні проблеми пов’язані з такими аспектами, як слабка взаємодія світла і матерії (фотони слабо взаємодіють із матеріальними системами, складно досягти високої ефективності), втрати та шум (частина фотонів втрачається, виникають помилки при передачі), несумісність частот (різні системи працюють у різних діапазонах, потрібне додаткове перетворення частоти). Інтерфейси «матерія–світло» забезпечують зв’язок між вузлами мережі, передачу квантових станів на відстань, реалізацію протоколів (телепортація, QKD), інтеграцію різних платформ. Без таких інтерфейсів побудова квантової мережі є неможливою. Сучасні квантові мережі будуються за гібридним принципом. Оскільки різні платформи виконують різні

функції, використовуються інтерфейси для взаємодії і формується єдина система.

2. Перетворення частоти фотонів. Однією з ключових задач у квантових мережах є узгодження різних фізичних платформ, які працюють у різних спектральних діапазонах. Наприклад, квантові пам'яті часто взаємодіють із фотонами у видимому або ближньому інфрачервоному діапазоні, тоді як передача інформації на великі відстані через оптичні волокна є найбільш ефективною у телекомунікаційному діапазоні (~1550 нм). Це створює необхідність у перетворенні частоти фотонів – процесі зміни довжини хвилі фотона без втрати його квантового стану. Перетворення частоти – це процес, у якому: фотон із частотою ν_1 перетворюється у фотон із частотою ν_2. Квантова інформація (стан, фаза, заплутаність) при цьому зберігається і відбувається зміна довжини хвилі без втрати когерентності. Цей процес є критичним для сумісності різних квантових систем, передачі інформації на великі відстані і побудови гібридних мереж.

Перетворення частоти фотонів базується на явищах нелінійної оптики, коли електромагнітне поле взаємодіє з нелінійною поляризацією середовища. У результаті цієї взаємодії відбувається перерозподіл енергії між світловими хвилями, що призводить до зміни частоти фотонів. Основними механізмами перетворення є параметричні нелінійні процеси, зокрема: генерація сумарної частоти $\nu_{\text{вих}} = \nu_1 + \nu_2$ (SFG); генерація різницевої частоти $\nu_{\text{вих}} = \nu_1 - \nu_2$ (DFG). У цих процесах енергія не поглинається середовищем, а перерозподіляється між взаємодіючими хвилями, що дозволяє змінювати частоту фотонів без руйнування їх квантового стану. Ці процеси реалізуються у спеціальних нелінійних матеріалах (літій-ніобат – $LiNbO_3$, калій-титаніл-фосфат – KTP), оптичних хвилеводах, інтегрованих фотонних пристроях. Для використання у квантових мережах процес повинен зберігати когерентність, зберігати заплутаність, мати високу ефективність, вносити мінімальний шум.

Перетворення частоти не є ідеальним процесом. Основні проблеми пов'язані з втратами сигналу (не всі фотони перетворюються, знижується

ефективність передачі), додатковим шумом (виникають паразитні фотони, погіршується якість сигналу), складністю узгодження фаз (необхідно точно узгодити параметри хвиль, порушення фазових умов знижує ефективність). В результаті: зниження точності передачі, деградація заплутаності, обмеження ефективності мережі**.** Завдання інженерії полягає **у** мінімізації цих ефектів та забезпеченні високої ефективності перетворення. Перетворення частоти є необхідним для передачі квантової інформації через оптичні волокна, інтеграції різних типів кубітів, створення гібридних квантових систем, узгодження джерел і детекторів.

3. Гібридні квантові системи. Жодна платформа не є універсальною. Розвиток квантових мереж неможливий без поєднання різних фізичних платформ, кожна з яких має свої переваги. Саме це призводить до формування гібридних квантових систем – комплексів, у яких взаємодіють різні типи квантових носіїв інформації. Гібридний підхід є одним із найперспективніших напрямів, оскільки дозволяє використовувати сильні сторони кожної технології та компенсувати їхні недоліки.

Гібридна квантова система – це система, у якій різні фізичні реалізації кубітів об’єднані в одну архітектуру, інформація передається між різними типами носіїв, використовуються спеціальні інтерфейси для взаємодії. Типова ідея: один тип системи – для обчислень; інший – для передачі; ще інший – для зберігання. Гібридні системи включають такі основні компоненти: **квантові** процесори (надпровідні кубіти, іонні пастки, квантові точки) – виконують обчислення; квантові канали (фотони в оптичних волокнах, вільнопросторові канали) – забезпечують передачу інформації; квантові пам’яті (атомні ансамблі, твердотільні дефекти) – зберігають квантові стани; інтерфейси **(**«матерія–світло», перетворювачі частоти.) – забезпечують взаємодію між компонентами. Гібридна система працює як ланцюг перетворень: квантова інформація створюється у процесорі, перетворюється у фотон, передається через канал, приймається іншим вузлом, записується у квантову пам’ять. Ключову роль тут відіграють інтерфейси. Переваги гібридних систем: універсальність (поєднання

різних функцій); гнучкість (можливість адаптаці; масштабованість (побудова великих мереж); ефективність (використання оптимальних рішень для кожної задачі).

Гібридні системи є основою квантових комунікаційних мереж, квантових повторювачів, квантового інтернету. Вони дозволяють інтегрувати різні технології, забезпечити передачу на великі відстані, реалізувати складні квантові протоколи. Без цих технологій створення глобальної квантової мережі було б практично неможливим.

Розглянемо приклади.

1. Інтерфейс атом–фотон. Квантова пам'ять зберігає стан у атомі, цей стан переноситься на фотон, фотон передається через канал. Основна умова – збереження когерентності.

2. Перетворення частоти для волоконного зв'язку. Фотон генерується при 800 нм, проходить через нелінійний кристал і перетворюється на 1550 нм. Після чого передається через волокно з мінімальними втратами.

3. Гібридна квантова мережа. Надпровідний кубіт обробляє інформацію. Через інтерфейс вона передається фотону і фотон транспортує її до іншого вузла. Там інформація знову записується в матеріальну систему.

Гібридні інтерфейси та перетворювачі частоти є важливими елементами сучасних квантових систем, оскільки вони забезпечують сумісність між різними фізичними платформами та каналами передачі інформації. Завдяки таким технологіям стає можливим узгодження характеристик фотонів, квантової пам'яті, надпровідникових кубітів і телекомунікаційних мереж.

Проте ефективна робота окремих квантових пристроїв ще не гарантує створення повноцінної глобальної інфраструктури зв'язку. Для практичної реалізації масштабованих квантових комунікацій необхідно забезпечити взаємодію квантових систем із уже існуючими класичними мережами передачі даних. Попри унікальні можливості квантових технологій – передачу квантових станів, розподіл заплутаності, квантову криптографію та квантову телепортацію – сучасні квантові мережі не можуть працювати автономно без підтримки

класичних каналів зв’язку. Саме класичні мережі забезпечують маршрутизацію, синхронізацію, передавання службової інформації, керування вузлами та обмін результатами вимірювань. У результаті формується гібридна архітектура, у якій класичні й квантові канали функціонують одночасно та взаємодіють між собою.

У квантових протоколах класичні канали відіграють надзвичайно важливу роль. Квантова інформація не може бути повністю використана без класичного супроводу. Наприклад, у квантовій телепортації результат вимірювання передається класичним каналом, у QKD класичний канал використовується для перевірки ключа, у квантових повторювачах класичні сигнали повідомляють про успіх операцій, координують перенесення заплутаності, синхронізують сегменти мережі. Таким чином, класичні канали є невід’ємною частиною квантових мереж. Класичні канали повинні забезпечувати надійність передачі (мінімальні втрати даних), низькі затримки (швидке реагування системи), високу точність синхронізації; безпеку (захист від несанкціонованого доступу). Класичні та квантові канали працюють разом, зокрема квантові сигнали передають інформацію, класичні – керують процесом. Цикл роботи містить такі етапи: передача квантового стану, вимірювання, передача результату класичним каналом, виконання подальших дій. У цьому контексті особливо важливим стає питання не лише організації класичних каналів, але й їх ефективної інтеграції з квантовими каналами передачі інформації, що забезпечує узгоджене функціонування всієї мережі. у загальному вигляді гібридна квантово-класична мережа містить квантові канали, класичні канали, квантові вузли, системи синхронізації, системи керування мережею.

Архітектура інтегрованих мереж, будується за багаторівневим принципом. Подібно до класичних мереж, у квантових системах також виділяють окремі функціональні рівні. Однак їх структура суттєво відрізняється через специфіку квантових процесів. У гібридних квантово-класичних мережах зазвичай виділяють декілька взаємопов’язаних рівнів, кожен із яких виконує окремі функції передачі та обробки інформації.

Нижній рівень становить фізичний квантовий канал. Він забезпечує безпосередню передачу квантових і класичних сигналів через фізичні канали зв'язку: оптичне волокно; вільнопросторові канали; супутникові лінії. Саме на цьому рівні відбувається поширення фотонів, виникають втрати, шум і декогеренція. Над фізичним рівнем розташовується рівень розподілу заплутаності. Його завдання – створення, передача та підтримка заплутаних пар між вузлами мережі. На цьому рівні реалізуються генерація заплутаних пар, обмін заплутаністю, очищення заплутаності, робота квантових повторювачів. Третій рівень становить рівень керування мережею. Саме тут класична інфраструктура відіграє вирішальну роль. Класичні системи координують вузли, запускають генерацію заплутаності, передають результати вимірювань, виконують синхронізацію часу, здійснюють маршрутизацію. У квантових мережах передавання кубіта не допускає його копіювання або повторного читання. Через це виникає новий тип маршрутизації – маршрутизація через розподіл заплутаності. Наприклад, нехай A ↔ C, C ↔ B. Тоді через розподіл заплутаності

$$|\Phi^+\rangle_{AC} \otimes |\Phi^+\rangle_{CB} \rightarrow |\Phi^+\rangle_{AB}. \qquad (12.6)$$

Це означає, що вузли A і B стають заплутаними без прямої взаємодії. Для координації таких операцій необхідна високоточна синхронізація часу. У квантових мережах навіть наносекундні похибки можуть призводити до втрати когерентності. Тому класична система синхронізації є критично важливим компонентом.

Особливу роль у інтегрованих мережах відіграє квантова пам'ять. У класичних мережах інформація зберігається у вигляді копій бітів. У квантових системах стан потрібно зберігати безпосередньо $|\psi(t)\rangle$. Без квантової пам'яті узгодження класичних і квантових процесів стає практично неможливим.

Важливим напрямом інтеграції є сумісність класичних телекомунікаційних мереж із квантовими каналами. Більшість сучасної інфраструктури працює в телекомунікаційному діапазоні ($\lambda \approx 1550$ нм). Однак багато квантових систем генерують фотони на інших довжинах хвиль. Для

узгодження використовуються перетворювачі частоти. Вони дозволяють інтегрувати атомні системи, надпровідникові кубіти, фотонні джерела, волоконні мережі.

Одним із ключових аспектів інтеграції є спільне використання каналів. У сучасних мережах часто застосовується мультиплексування, коли класичні та квантові сигнали передаються через одне волокно. Наприклад, $\lambda_q \neq \lambda_c$, де λ_q – квантовий канал; λ_c – класичний канал. Це дозволяє реалізувати мультиплексування за довжиною хвилі. Однак класичні сигнали створюють шум, який погіршує якість квантових станів. Це накладає серйозні вимоги на інтеграцію класичних і квантових каналів. Залежно від технічних вимог, рівня шуму та необхідної точності, інтеграція класичних і квантових каналів може здійснюватися різними способами. Найбільш поширеними є спільна передача сигналів в одному каналі, тобто використання одного фізичного каналу; використання окремих каналів, що передбачає фізичне розділення каналів та гібридні підходи, що поєднують обидві стратегії.

Функціонування квантових мереж неможливе без ефективного обміну службовою (класичною) інформацією між вузлами. Цей обмін реалізується за допомогою спеціальних протоколів керування, які координують квантові процеси, забезпечують синхронізацію та дозволяють інтерпретувати результати вимірювань. На відміну від класичних мереж, де службові протоколи відповідають переважно за маршрутизацію і передачу даних, у квантових мережах вони виконують критичну роль – завершують квантові операції. Протоколи обміну службовою інформацією забезпечують передачу результатів квантових вимірювань; синхронізацію вузлів мережі; координацію квантових операцій; контроль стану системи; узгодження параметрів протоколів. Наприклад, вони забезпечують передачу інформації про базиси вимірювання у QKD, обмін результатами детекції, сигналізацію про успішне створення заплутаності. На відміну від класичних мереж, тут протоколи повинні враховувати обмеження квантових вимірювань, часову критичність операцій, залежність від фізичних процесів.

Ефективна робота такої гібридної системи можлива лише за умови їх точної часової синхронізації. Наприклад, у квантовій телепортації квантовий стан передається миттєво (через заплутаність), але його відновлення можливе лише після отримання класичного сигналу. Синхронізація квантових і класичних процесів є більш складною задачею, ніж синхронізація в окремих каналах, оскільки необхідно узгодити процеси, що відбуваються у різних фізичних і часових масштабах. У квантових мережах багато операцій мають гібридний характер: квантові процеси – це генерація, передача, вимірювання; класичні процеси – це обробка результатів, передача команд. Для їх узгодження необхідно точно визначати момент виконання квантових операцій, синхронізувати передачу класичних повідомлень, координувати послідовність дій у вузлах мережі. Робота квантового протоколу включає такі етапи: генерація квантового стану або заплутаності, передача квантового сигналу, виконання вимірювання, передача результатів класичним каналом, виконання коригуючих або наступних операцій. Ці етапи повинні бути узгоджені у часі, інакше система працює некоректно. До основних механізмів синхронізації, які застосовуються у квантових мережах, належать такі підходи: часові мітки: **(**кожна подія має часову прив’язку, що дозволяє узгоджувати дії вузлів), сигнали синхронізації (вони передаються разом або окремо від квантових сигналів і визначають часові вікна), двостороння синхронізація (обмін сигналами між вузлами, компенсація затримок), гібридні методи (поєднання різних підходів, підвищення точності).

Розгортання квантових мереж у глобальному масштабі є складним і ресурсомістким завданням. Тому одним із найбільш практичних підходів є інтеграція квантових технологій в існуючі телекомунікаційні мережі, які вже мають розвинену інфраструктуру, стандарти та засоби керування. Такий підхід дозволяє не створювати мережу «з нуля», а використовувати вже наявні канали зв’язку, обладнання та протоколи, адаптуючи їх до вимог квантової передачі інформації. Інтеграція передбачає використання оптичних волокон телеком-мереж для передачі квантових сигналів, поєднання квантових і класичних каналів, адаптацію існуючих технологій до квантових задач. Це дозволяє

зменшити витрати на розгортання, прискорити впровадження забезпечити масштабованість. Інтеграція з існуючими мережами є найбільш реалістичним шляхом впровадження квантових технологій. Вона дозволяє поступово розширювати систему і забезпечує сумісність із сучасною інфраструктурою.

Для кращого розуміння практичної реалізації розглянутих принципів доцільно розглянути конкретні приклади інтеграції класичних і квантових мереж у сучасних системах квантової комунікації.

1. Квантова криптографія. У системах QKD квантовий канал використовується для передачі кубітів, а класичний – для порівняння базисів, корекції помилок, privacy amplification.

2. Квантова телепортація. Квантовий стан передається через заплутаність. Класичний канал передає результат вимірювання. Лише після цього стан відновлюється. Отже, без класичного каналу процес неможливий.

3. Мережа з повторювачами. Квантові вузли створюють заплутаність. Класичні сигнали повідомляють про успіх операцій і система координує наступні кроки.

Таким чином, розвиток квантових мереж неможливий без ефективної взаємодії квантової та класичної інфраструктури. Гібридні інтерфейси, перетворювачі частоти та механізми узгодження різних фізичних платформ забезпечують передачу квантових станів між неоднорідними елементами мережі та дозволяють інтегрувати квантові системи з уже існуючими телекомунікаційними каналами. Водночас класична мережа виконує критично важливі функції синхронізації, маршрутизації, керування та обміну службовою інформацією, без яких реалізація квантових протоколів була б неможливою. Поєднання квантових і класичних технологій формує основу гібридної мережевої архітектури, здатної забезпечити масштабованість, надійність і практичне впровадження майбутнього квантового інтернету.

12.4. Концепція глобального квантового інтернету та перспективи розвитку

Розвиток квантових технологій поступово переходить від лабораторних експериментів до створення повноцінних мережевих систем. Якщо класичний інтернет забезпечує глобальну передачу інформації у вигляді бітів, то наступним етапом еволюції є глобальний квантовий інтернет – мережа, яка забезпечує передачу квантових станів і розподіл заплутаності між віддаленими вузлами на планетарному рівні. Глобальний квантовий інтернет розглядається як інфраструктура майбутнього, яка забезпечить абсолютно захищений зв’язок, розподілені квантові обчислення, нові типи сенсорних і вимірювальних систем. Головною особливістю квантового інтернету є те, що інформація не просто передається між вузлами, а може існувати у вигляді глобально розподілених квантових станів. Це відкриває принципово нові можливості, зокрема абсолютно захищений зв’язок, розподілені квантові обчислення, квантову телепортацію, синхронізацію надточних годинників, глобальні квантові сенсорні мережі та нові моделі обробки інформації. Разом із тим реалізація глобального квантового інтернету є надзвичайно складною задачею. Квантові стани дуже чутливі до впливу середовища, а втрати та декогеренція швидко руйнують передану інформацію. Крім того, фундаментальні закони квантової механіки забороняють класичні методи підсилення сигналу. Саме тому побудова глобальної квантової мережі потребує нових фізичних принципів, спеціальних мережевих архітектур та складних механізмів керування.

Ідея квантового інтернету базується на розподілі квантової заплутаності між вузлами мережі. Якщо два вузли мають спільний заплутаний стан, вони можуть реалізовувати квантову телепортацію та інші квантові протоколи. У цьому стані квантові системи вже не можна описувати незалежно одна від одної. Вимірювання однієї частинки миттєво визначає результат для іншої, незалежно від відстані між ними. Глобальний квантовий інтернет фактично являє собою систему вузлів, між якими підтримується мережа заплутаних станів. У такій мережі передача інформації здійснюється не шляхом класичного пересилання

сигналу, а через маніпуляцію спільними квантовими станами. На відміну від класичного інтернету, де дані копіюються і маршрутизуються, у квантовому інтернеті копіювання невідомого стану неможливе через теорему про заборону клонування, тобто $|\psi\rangle \nrightarrow |\psi\rangle\,|\psi\rangle$. Це фундаментально змінює архітектуру мережі та принципи її функціонування.

Глобальний квантовий інтернет має багаторівневу структуру (рис.12.1).



Рис.12.1. Концептуальна схема глобального квантового інтернету.

Його можна умовно поділити на кілька рівнів. Кожен із них виконує свою роль і взаємодіє з іншими.

1. Фізичний рівень. Це базовий рівень, який відповідає за реалізацію квантових сигналів. На цьому рівні відбувається передача фотонів через фізичні канали: оптичні волокна, атмосферні канали, супутникові лінії зв'язку. Як було показано раніше ймовірність успішної передачі фотона:

$$\eta = e^{-\alpha L}, \tag{12.7}$$

де α – коефіцієнт загасання; L – загальна відстань. Це означає, що зі збільшенням відстані кількість фотонів експоненційно зменшується. Функції цього рівня: генерація квантових станів; передача фотонів; детекція сигналів; підтримка фізичних каналів (волокна, супутники). Особливості: чутливість до втрат і шуму; залежність від фізичних параметрів середовища.

2. Рівень розподілу заплутаності. На цьому рівні формується мережа заплутаних пар між вузлами. Для великих відстаней застосовується сегментація каналу. У кожному сегменті створюється локальна заплутаність, після чого використовується обмін заплутаністю. Це дозволяє поступово створювати заплутаність між дуже віддаленими вузлами. Заплутаність виступає основним ресурсом квантового інтернету.

3. Рівень квантової маршрутизації (мережевий рівень). Відповідає за організацію зв'язку між вузлами. У класичних мережах маршрутизація визначає шлях передачі пакетів даних. У квантових мережах маршрутизація означає вибір шляху створення заплутаності. Критеріями вибору маршруту можуть бути: втрати каналу; точність (fidelity) заплутаності; час когерентності; завантаження мережі.

4. Рівень керування мережею. Забезпечує координацію роботи всієї системи. На цьому рівні виконується: синхронізація вузлів; координація квантових операцій; обмін класичною службовою інформацією; контроль помилок. Класичний і квантовий канали працюють одночасно. Класичний канал потрібен для передачі результатів вимірювань та керування телепортацією.

5. Прикладний рівень. Це найвищий рівень, на якому реалізуються такі функції: квантовий розподіл ключів (QKD); квантова телепортація; розподілені обчислення; квантові сенсори.

Всі рівні працюють у тісній взаємодії: фізичний рівень передає квантові сигнали, рівень заплутаності створює ресурс, мережевий рівень організовує передачу рівень керування координує процеси, прикладний рівень використовує результат.

В таблиці 12.4. наведено порівняння функціональних рівнів класичних і квантових мереж.

Таблиця 12.4. Порівняння функціональних рівнів класичних і квантових мереж.

Рівень	Класичні мережі	Квантові мережі
Фізичний	Передача сигналів	Передача квантових станів
Канальний	Передача кадрів	Розподіл заплутаності
Мережевий	Маршрутизація	Квантова маршрутизація
Прикладний	Сервіси	Квантові протоколи

Основним механізмом передачі інформації у квантовому інтернеті є квантова телепортація. Тобто сам кубіт фізично не передається. Передається лише класична інформація і квантовий стан відновлюється у віддаленому вузлі. Телепортація дозволяє обходити проблему прямих втрат у каналі. Однак ефективність квантової телепортації безпосередньо залежить від можливості підтримувати заплутаність між віддаленими вузлами мережі. На великих відстанях це ускладнюється втратами фотонів та декогеренцією, через які якість заплутаних станів швидко погіршується. Унаслідок цього пряма передача заплутаності на глобальні відстані стає практично неможливою. Для подолання цієї проблеми у квантовому інтернеті використовуються квантові повторювачі,

які дозволяють розбивати довгі канали на коротші сегменти, поступово формуючи заплутаність між далекими вузлами. Без квантових повторювачів глобальна квантова мережа була б неможливою. Квантовий повторювач виконує генерацію локальної заплутаності, квантову пам'ять, очищення заплутаності і обмін заплутаністю. Пряма передача експоненційно спадає з відстаню. З повторювачами залежність стає значно слабшою. Це одна з головних причин, чому квантові повторювачі є ключовою технологією майбутнього квантового інтернету. Проте робота квантових повторювачів пов'язана з імовірнісним характером генерації та обміну заплутаністю. Різні сегменти мережі досягають успіху у різний момент часу, тому виникає необхідність тимчасового збереження вже створених квантових станів до завершення всіх етапів передачі. Саме цю функцію виконує квантова пам'ять, яка є ключовим елементом глобального квантового інтернету та забезпечує синхронізовану роботу повторювачів, процедур очищення заплутаності та квантової телепортації. Для глобальних мереж потрібні пам'яті з дуже великим часом когерентності.

За масштабом і просторовим охопленням мережі квантовий інтернет поділяється на такі рівні: локальні квантові мережі, регіональні квантові мережі, глобальні сегменти квантового інтернету. В основу такого поділу покладений географічний масштаб мережі. Цей поділ відображає відстань між вузлами; тип використовуваної інфраструктури; складність архітектури; необхідність додаткових технологій (наприклад, повторювачів або супутників).

Локальні квантові мережі охоплюють невеликі відстані (метри – кілометри). Це мережі в межах лабораторії, будівлі або кампусу. Вони використовують оптичні волокна і характеризуються високою стабільністю, мінімальними втратами сигналу. Часто не потребують квантових повторювачів. Функції таких мереж – тестування технологій, локальна передача квантової інформації, з'єднання квантових процесорів.

Регіональні квантові мережі охоплюють середні відстані (десятки – сотні кілометрів). Застосовуються для з'єднання міст або регіонів. Використовують волоконно-оптичні лінії. Можливе застосування квантових повторювачів або

довірених вузлів, складніша синхронізація. Функції: розширення мережі, інтеграція різних вузлів, передача на сотні кілометрів.

Глобальні сегменти квантового інтернету охоплюють великі відстані (тисячі кілометрів і більше). Застосовуються для міжконтинентального з'єднання. Використовують супутникові канали. Складна багаторівнева архітектура. Функції**:** глобальний обмін квантовою інформацією, об'єднання регіональних мереж.

Архітектурні рівні квантового інтернету дозволяють структуровано організувати складні процеси передачі та обробки квантової інформації. Поділ на рівні забезпечує ефективність, масштабованість і гнучкість системи. Особливістю квантових мереж є наявність рівня розподілу заплутаності та тісна інтеграція з класичними каналами керування. Така багаторівнева архітектура є основою для створення глобального квантового інтернету.

Одним із найперспективніших напрямів реалізації квантового інтернету є супутникові квантові мережі. У супутниковому каналі більша частина шляху проходить у вакуумі, тому втрати значно менші і можливим є з'єднання віддалених наземних станцій. Це робить супутникові системи перспективними для міжконтинентального зв'язку. Основні функції супутникових систем: глобальна передача квантової інформації (з'єднання континентів, передача квантових станів на тисячі кілометрів); розподіл заплутаності (супутник генерує або ретранслює заплутані фотони і передає їх до різних наземних вузлів); квантовий розподіл ключів (QKD) (забезпечення захищеного зв'язку між віддаленими точками, реалізація глобальних криптографічних систем); синхронізація мережі **(**використання супутників як глобального джерела часу, узгодження роботи вузлів). Супутникові канали доповнюють волоконні мережі, створюючи єдину систему.

Виділяють такі типи супутникових квантових систем: супутник як джерело (генерує фотони або заплутані пари і передає їх на землю); супутник як ретранслятор (приймає сигнал і передає далі, частково виконує роль квантового повторювача); супутник як вузол мережі (виконує функції обробки і керування,

інтегрується в мережу як активний елемент). Переваги супутникових систем: мала загальна втрата сигналу (більша частина шляху у вакуумі, менше поглинання і розсіювання); глобальне покриття (можливість створення міжконтинентальних каналів, незалежність від наземної інфраструктури); масштабованість (додавання нових супутників розширює мережу, можливість формування глобальної системи). Основні виклики: атмосферні ефекти (турбулентність, розсіювання світла, втрати при вході в атмосферу); точність наведення (необхідність точного позиціонування, вузькі пучки світла); обмежений час зв'язку (супутник рухається, канал доступний лише певний час); технічна складність (складне обладнання, високі вимоги до стабільності). Супутникові системи відіграють визначальну роль у глобальному квантовому інтернеті. Вони є основним елементом глобальної архітектури, забезпечують передачу на великі відстані і поєднують окремі регіональні мережі. Для наземних каналів ключову роль відіграють квантові повторювачі. Вони здійснюють поділ каналу на сегменти, відновлюють заплутаність, зменшують вплив втрат. В результаті відбувається передача квантової інформації на великі відстані без втрати якості.

Квантовий інтернет відкриває принципово нові можливості у сфері обробки, передачі та захисту інформації. Завдяки використанню квантових явищ – суперпозиції, заплутаності та квантових вимірювань – він дозволяє реалізувати функції, які є недоступними або суттєво обмеженими в класичних мережах. Потенційні застосування квантового інтернету охоплюють широкий спектр галузей від криптографії до науки та інженерії. Квантовий інтернет забезпечує принципово новий рівень безпеки (гарантоване виявлення підслуховування, захист від атак навіть квантових комп'ютерів). Він використовується для захисту державних і фінансових систем. Квантовий інтернет дозволяє об'єднувати кілька квантових процесорів у єдину систему, що дозволяє виконання складних задач спільно. Квантовий інтернет забезпечує квантову телепортацію інформації, тобто передачу квантових станів без фізичного переміщення носія. Він дозволяє

об’єднувати квантові сенсорні мережі в єдину систему, що підвищує точність вимірювань і дає можливість його застосування в геодезії, медицині, навігації.

Попри значний прогрес у розвитку квантових мереж, реалізація повноцінного глобального квантового інтернету все ще супроводжується низкою фундаментальних і технічних проблем. Втрати у каналах передачі, декогеренція, обмежений час когерентності квантової пам’яті, складність масштабування повторювачів, низька ефективність генерації та детектування фотонів істотно ускладнюють побудову стабільних і протяжних квантових мереж. Крім того, важливими залишаються проблеми синхронізації вузлів, інтеграції різних фізичних платформ і сумісності квантових та класичних систем керування. Усе це свідчить про те, що існуючі технології ще не забезпечують повною мірою вимоги майбутнього глобального квантового інтернету. Саме тому сучасні дослідження спрямовані на створення нових підходів і технологій, здатних подолати наявні обмеження та забезпечити практичну реалізацію масштабованих квантових мереж. До таких перспективних напрямів належать удосконалені квантові повторювачі, високоефективна квантова пам’ять, супутникові системи нового покоління, інтегровані фотонні платформи, гібридні квантові інтерфейси та методи квантової корекції помилок. Передбачається формування гібридної системи, яка включає локальні волоконні мережі, супутникові магістралі, квантові дата-центри, глобальні центри керування заплутаністю. У найближчі десятиліття очікується: поява квантових мереж великих міст; інтеграція квантових дата-центрів; створення супутникових квантових магістралей; розвиток глобального квантового інтернету. Особливу роль відіграватимуть квантові повторювачі, квантова пам’ять, фотонні технології та гібридні квантово-класичні мережі. Таким чином, глобальний квантовий інтернет є новим етапом розвитку інформаційних технологій, у якому передача інформації базується на фундаментальних принципах квантової механіки. Попри серйозні технологічні труднощі, пов’язані з втратами, декогеренцією та масштабуванням, сучасні дослідження демонструють реальну можливість створення глобальних квантових мереж. Поєднання волоконних,

атмосферних і супутникових каналів, а також розвиток квантових повторювачів і гібридних архітектур відкривають перспективу формування повноцінного квантового інтернету, здатного забезпечити новий рівень захисту інформації, обчислювальних можливостей та глобальної комунікації.

12.5. Характеристика протоколів квантового розподілу ключів у мережах

Одним із найважливіших практичних застосувань квантових мереж є квантовий розподіл ключів (Quantum Key Distribution, QKD). Саме технології QKD стали першими квантовими комунікаційними системами, які перейшли від теоретичних досліджень до реального впровадження у телекомунікаційних мережах. На відміну від класичної криптографії, безпека якої базується на складності математичних задач, квантовий розподіл ключів спирається на фундаментальні закони квантової механіки. Це означає, що захист інформації визначається не обчислювальними ресурсами потенційного порушника, а фізичними принципами природи.

Потреба у створенні квантових криптографічних систем зумовлена розвитком квантових обчислень. Основними класичними криптографічними алгоритмами з відкритим ключем, які сьогодні широко використовуються для захисту інформації в інтернеті, банківських системах, VPN, цифрових підписах та захищених мережах є RSA та ECC. RSA (Rivest–Shamir–Adleman) – це криптографічний алгоритм, безпека якого базується на складності факторизації великих чисел. Ідея RSA полягає в тому, що легко перемножити два великі прості числа, але виконати зворотну операцію – розкласти дуже велике число n на множники – надзвичайно складно для класичних комп’ютерів. ECC (Elliptic Curve Cryptography) – це криптографія на еліптичних кривих. Її безпека базується на складності задачі дискретного логарифмування на еліптичних кривих. Поява потужних квантових комп’ютерів може зробити вразливими багато сучасних криптографічних алгоритмів, зокрема RSA та ECC, оскільки алгоритм Шора дозволяє ефективно факторизувати великі числа та обчислювати дискретні

логарифми. У таких умовах виникає необхідність у принципово нових методах захисту інформації, які залишатимуться безпечними навіть за наявності квантових обчислювальних систем. Саме тому квантовий розподіл ключів розглядається як одна з ключових технологій майбутньої інформаційної безпеки.

Основна ідея QKD полягає у використанні квантових станів для передачі секретного ключа між двома сторонами, які традиційно називають Аліса і Боб. Будь-яка спроба перехоплення квантового стану неминуче змінює його через принцип невизначеності та неможливість точного копіювання невідомого квантового стану. Таким чином система автоматично виявляє присутність порушника, якого зазвичай називають Єва. Фізично передача інформації у QKD найчастіше реалізується за допомогою фотонів. Квантовий стан фотона може описуватись суперпозицією. Саме ці стани використовуються для кодування бітів секретного ключа. Однак існує багато різних протоколів квантового розподілу ключів, які відрізняються фізичними принципами реалізації, типом квантових станів, методами виявлення атак і вимогами до обладнання. Одні протоколи використовують поляризацію одиночних фотонів, інші – квантову заплутаність, а ще інші базуються на безперервних змінних квантових полів. Тому для розуміння сучасних квантових мереж необхідно детально розглянути основні протоколи QKD, їх фізичні принципи, математичні основи та практичні особливості.

Розглянемо принципи, на яких базується квантова криптографія. Першим фундаментальним принципом є теорема про заборону клонування: $|\psi\rangle \nrightarrow |\psi\rangle\,|\psi\rangle$. Вона означає, що невідомий квантовий стан неможливо точно скопіювати. Отже, порушник не може непомітно зробити копію фотона, зберегти її та передати оригінал далі.

Другим фундаментальним принципом є квантове вимірювання. Якщо стан вимірюється у неправильному базисі, результат стає випадковим, а сам стан змінюється. Це означає, що будь-яке перехоплення залишає слід у системі. Ключовим параметром QKD є квантова бітова помилка (Quantum Bit Error Rate, QBER):

$$QBER = \frac{N_{error}}{N_{total}}, \tag{12.8}$$

де N_{error} – кількість помилкових бітів; N_{total} – загальна кількість переданих бітів. Якщо QBER перевищує певний поріг, сторони роблять висновок про можливу атаку або надмірний шум каналу. Після встановлення квантового каналу сторони виконують просіювання ключа, корекцію помилок, і підсилення конфіденційності (privacy amplification) – скорочення ключа для усунення інформації, яку могла отримати Єва. Після цього формується остаточний секретний ключ.

Першим і найвідомішим протоколом квантового розподілу ключів є BB84, запропонований Чарльзом Беннетом і Жилем Брассаром у 1984 році. BB84 використовує два взаємно незкомутовані базиси поляризації фотонів: прямолінійний базис: $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ і діагональний базис: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, де

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{12.9}$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{12.10}$$

Аліса випадково обирає біт, базис, поляризацію фотона. Боб випадково обирає базис вимірювання. Після передачі вони через класичний канал порівнюють лише базиси. Біти, для яких базиси співпали, залишаються у ключі. Ймовірність правильного вибору базису:

$$P = \frac{1}{2}. \tag{12.11}$$

Отже, приблизно половина фотонів відкидається. Нехай Єва вимірює фотони у випадковому базисі. Імовірність помилки:

$$P_{\text{помилка}} = \frac{1}{4}. \tag{12.12}$$

Тобто виникає QBER ≈ 25 %, що легко виявляється.

Переваги BB84: простота реалізації; висока теоретична безпека; широке практичне застосування. Недоліки: потреба в однофотонних джерелах; чутливість до втрат; обмежена дальність.

Попри те, що протокол BB84 став основою сучасного квантового розподілу ключів і продемонстрував принципову можливість безпечної передачі секретної інформації, його практична реалізація виявила низку технічних обмежень. Однією з головних проблем є використання неідеальних джерел одиночних фотонів. У реальних системах часто застосовуються слабкі когерентні імпульси, які інколи містять більше одного фотона. Це створює можливість для атаки типу розділення за кількістю фотонів (photon-number-splitting, PNS), за якої зловмисник може перехопити частину фотонів без суттєвого порушення статистики передачі. Необхідність підвищення стійкості протоколу до таких атак привела до розробки модифікованих схем квантового розподілу ключів, однією з яких став протокол SARG04. Хоча він використовує ті самі квантові стани, що й BB84, принцип формування та узгодження ключа в ньому організований інакше, що дозволяє підвищити безпеку при роботі з реальними фотонними джерелами.

Протокол SARG04 був запропонований як модифікація BB84 для кращого захисту від атаки розщеплення за числом фотонів (photon-number-splitting attack). У BB84 слабкі лазерні імпульси можуть містити декілька фотонів. Це дозволяє Єві перехопити один фотон без внесення помилок. SARG04 використовує іншу процедуру просіювання ключа. Замість оголошення базису Аліса повідомляє пару можливих станів,,наприклад, $\{|0\rangle, |+\rangle\}$. Боб може визначити біт лише в окремих випадках.

Основна перевага SARG04 полягає в тому, що він краще захищений від атак на багатофотонні імпульси. Однак швидкість генерації ключа нижча і обробка складніша. Протокол SARG04 став важливим етапом розвитку квантового розподілу ключів, оскільки дозволив підвищити стійкість систем до атак, пов’язаних із використанням неідеальних джерел фотонів. Проте як BB84, так і SARG04 належать до класу протоколів, що базуються на передачі окремих квантових станів між відправником і приймачем. У таких схемах безпека визначається властивостями квантового вимірювання та неможливістю точного копіювання квантового стану. Подальший розвиток квантової криптографії

привів до появи іншого підходу, у якому ключову роль відіграє не передача одиночних фотонів, а квантова заплутаність. Саме на цьому принципі базується протокол E91, запропонований Артуром Екертом, де безпека забезпечується фундаментальними квантовими кореляціями між заплутаними частинками та перевіркою нерівностей Белла.

Протокол E91 запропонований Артуром Екертом у 1991 році. Він базується на квантовій заплутаності. Використовується стан Белла:

$$| \Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | 00\rangle + | 11\rangle. \qquad (12.13)$$

Одна частинка надсилається Алісі, інша – Бобу. Безпека E91 базується на порушенні нерівності Белла: S≤2. У квантовій механіці $S = 2\sqrt{2}$. Порушення нерівності означає існування квантової заплутаності, відсутність локальних прихованих параметрів, неможливість непомітного перехоплення. Переваги E91: фундаментальна безпека; виявлення атак через порушення кореляцій; висока стійкість. Недоліки: складність генерації заплутаних пар; потреба у високоточних детекторах.

Протокол E91 продемонстрував, що квантова заплутаність може бути основою абсолютно нового підходу до захищеного обміну ключами. Його безпека безпосередньо пов’язана з перевіркою нерівностей Белла, які підтверджують наявність некласичних квантових кореляцій між частинками. Однак практична реалізація такого підходу виявилась досить складною, оскільки потребує високоточного контролю квантових вимірювань і статистичного аналізу кореляцій. Це стимулювало розробку спрощених протоколів на основі квантової заплутаності (entanglement-based протоколів), які зберігали переваги використання заплутаних станів, але були більш придатними для реальних квантових мереж. Одним із таких протоколів став BBM92, який можна розглядати як практичну адаптацію ідей E91 без необхідності явної перевірки нерівностей Белла.

Протокол BBM92 є спрощеним варіантом E91. Він також використовує заплутані пари:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (12.14)$$

Аліса та Боб вимірюють фотони у випадкових базисах. Якщо базиси співпали – результати антикорельовані. Протокол BBM92 на відміну від E91 не потребує перевірки нерівностей Белла, простіший у реалізації і придатний для реальних квантових мереж. Саме BBM92 часто використовується у супутникових системах QKD.

Протокол BBM92 став одним із найважливіших практичних варіантів квантового розподілу ключів на основі заплутаності та широко використовується у сучасних експериментальних квантових мережах. Проте більшість протоколів типу BB84, SARG04, E91 і BBM92 базуються на дискретних квантових станах, тобто використовують окремі фотони або дискретні стани поляризації. Такі системи потребують високоефективних однофотонних джерел і детекторів, що ускладнює їх масштабування та інтеграцію з класичною телекомунікаційною інфраструктурою. Пошук більш сумісних із сучасними оптичними мережами рішень привів до розвитку протоколів квантового розподілу ключів на основі неперервних змінних – CV-QKD. У цих системах інформація кодується не у дискретних станах фотонів, а в безперервних параметрах електромагнітного поля, таких як амплітуда та фаза світлової хвилі. У CV-QKD використовують когерентні стани $|\alpha\rangle$. Аліса модулює амплітуду і фазу. Боб використовує гомодинне та гетеродинне детектування. Швидкість секретного ключа:

$$K = \beta I_{AB} - \chi BE, \quad (12.15)$$

де β – ефективність корекції помилок; I_{AB} – взаємна інформація Аліси та Боба; χBE – інформація Єви. Переваги CV-QKD: сумісність із класичними телекомунікаціями; використання стандартних фотодетекторів; висока швидкість. Недоліки: чутливість до шуму; складна теорія безпеки; обмеження дальності.

Розглянуті протоколи квантового розподілу ключів реалізують різні фізичні підходи до забезпечення безпечного обміну інформацією. Одні з них, такі як BB84 і SARG04, базуються на передачі дискретних квантових станів, тоді

як E91 і BBM92 використовують квантову заплутаність як основний ресурс безпеки. Своєю чергою, CV-QKD застосовує принципово інший підхід, заснований на безперервних параметрах електромагнітного поля та гомодинному детектуванні. Кожен із цих протоколів має власні переваги, обмеження, вимоги до обладнання та рівень стійкості до різних типів атак.

Попри високу безпеку, існують певні проблеми в реалізації квантового розподілу ключів QKD. Це зокрема втрати фотонів, шум, декогеренція, недосконаліть джерел, атаки на детекторы по сторонніх каналах (detector side-channel attacks). Для подолання цих проблем використовують: стани-приманки (decoy states); квантові повторювачі; квантову корекцію помилок; квантовий розподіл ключів (QKD), незалежний від вимірювальних пристроїв. Сучасні дослідження спрямовані на інтеграцію QKD у класичний інтернет, супутникові квантові мережі, квантовий інтернет, глобальні системи розподілу ключів. Очікується, що QKD стане основою урядового зв'язку, банківських мереж, військових систем, критичної інфраструктури.

Таким чином, протоколи квантового розподілу ключів є фундаментальною основою безпечних квантових мереж і майбутнього квантового інтернету. Їхня головна перевага полягає у використанні законів квантової механіки для забезпечення інформаційної безпеки, що принципово відрізняє QKD від класичних криптографічних систем. Розвиток QKD безпосередньо пов'язаний із вдосконаленням фотонних джерел, квантових детекторів, квантової пам'яті та квантових повторювачів. Саме поєднання цих технологій дозволить створити масштабовані квантові мережі глобального рівня. У перспективі квантовий розподіл ключів може стати базовою технологією захисту інформації в умовах розвитку квантових комп'ютерів та формування глобального квантового інтернету.

12.6. Аналіз вразливостей та фізичних атак на квантові канали

Квантові мережі та системи квантового розподілу ключів розглядаються як один із найбільш перспективних напрямів розвитку інформаційної безпеки. На

відміну від класичної криптографії, стійкість якої базується переважно на математичній складності певних задач, безпека квантових систем визначається фундаментальними законами квантової механіки. Зокрема, неможливість точного копіювання невідомого квантового стану, незворотність квантового вимірювання та наявність квантових кореляцій забезпечують принципову можливість виявлення стороннього втручання у процес передачі інформації. Саме ці властивості стали основою розвитку квантового розподілу ключів (QKD) та концепції квантового інтернету. Проте твердження про «абсолютну безпеку» квантових систем є справедливим лише для ідеалізованих моделей. Реальні квантові мережі складаються з фізичних пристроїв – лазерів, фотонних джерел, детекторів, оптичних волокон, електронних схем керування та синхронізації. Усі ці елементи мають технічні обмеження, шуми, втрати та недосконалості. Саме тому практична безпека квантових каналів визначається не лише законами квантової механіки, а й реальними фізичними характеристиками обладнання.

У процесі розвитку квантових комунікацій було виявлено, що навіть якщо теоретичний протокол є абсолютно захищеним, його фізична реалізація може містити вразливості. Це призвело до появи нового напряму досліджень – аналізу фізичних атак на квантові системи. На відміну від класичних криптоаналітичних методів, фізичні атаки спрямовані не на злам математичного алгоритму, а на використання особливостей реального обладнання. Зловмисник може впливати на фотонні джерела, детектори, системи синхронізації або параметри каналу передачі з метою отримання інформації без виявлення.

Особливу небезпеку становить те, що багато фізичних атак не порушують формально квантових принципів безпеки. Вони використовують технічні недоліки реалізації: багатофотонні імпульси, шум детекторів, часові затримки, недосконаліть генераторів випадкових чисел, втрати у волокні або особливості електроніки. У результаті система, яка теоретично повинна бути захищеною, може стати вразливою до практичного перехоплення інформації. Перехід від теоретичних моделей до реальних квантових мереж закономірно приводить до необхідності детального аналізу потенційних загроз. Розглянемо основні типи

фізичних атак, механізми їх реалізації, математичні моделі вразливостей та способи захисту від них. Особливу увагу слід приділити взаємозв'язку між фізичними параметрами каналу та рівнем безпеки системи, оскільки саме цей зв'язок визначає практичну надійність квантових комунікацій.

Безпека квантового каналу базується на передачі квантових станів

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \tag{12.16}$$

де $|0\rangle$ і $|1\rangle$ – базисні стани кубіта; α та β – комплексні амплітуди ймовірностей. У теоретичних моделях передбачається, що джерела створюють ідеальні одиночні фотони; канал не містить сторонніх шумів; детектори працюють без помилок; параметри системи стабільні. Проте реальні фізичні системи мають втрати; шум; часові флуктуації; недосконалості оптичних елементів; температурні нестабільності; обмежену ефективність детекторів. Ймовірність передачі фотона через канал:

$$\eta = e^{-\alpha L}, \tag{12.17}$$

де η – коефіцієнт передачі; α – коефіцієнт загасання; L – довжина каналу. Зі збільшенням відстані втрати зростають експоненційно. Це створює умови, за яких зловмисник може маскувати свої дії під природні втрати каналу.

Однією з найпростіших фізичних атак є атака перехоплення та повторної передачі (Intercept-Resend Attack). Суть атаки: зловмисник перехоплює фотон, виконує вимірювання, формує новий фотон і передає його далі. У протоколі BB84 ймовірність вибору правильного базису

$$P = \frac{1}{2}. \tag{12.18}$$

Якщо базис вибрано неправильно, виникає помилка:

$$QBER = \frac{1}{4}. \tag{12.19}$$

де $QBER$ – квантова бітова помилка. Тобто атака створює статистично помітний рівень помилок. Проте у реальних каналах завжди існують шуми. Тому

$$QBER_{\text{заг.}} = QBER_{\text{шум.}} + QBER_{\text{атака.}} \tag{12.20}$$

Якщо природний шум достатньо великий, зловмисник може приховати свою присутність.

Атака перехоплення-вимірювання є фундаментальною моделлю втручання у квантовий канал, оскільки безпосередньо використовує незворотність квантового вимірювання. Проте така атака досить легко виявляється через зростання рівня помилок у переданому ключі. У реальних квантових системах значно небезпечнішими є атаки, які використовують не порушення самих квантових принципів, а недосконалості фізичної реалізації обладнання. Однією з найважливіших практичних проблем є те, що реальні джерела випромінювання часто генерують не ідеальні одиночні фотони, а слабкі когерентні імпульси з випадковим числом фотонів. Саме ця особливість відкриває можливість для складнішої атаки – атаки розщеплення за числом фотонів (Photon-number-splitting attack, PNS-атаки), яка дозволяє отримувати інформацію без суттєвого збільшення рівня помилок у каналі. Ця атака використовує недосконаліть джерел випромінювання та наявність багатофотонних імпульсів. У практичних системах замість ідеальних однофотонних джерел часто використовують слабкі когерентні імпульси. Кількість фотонів у таких імпульсах описується розподілом Пуассона:

$$P(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}, \tag{12.21}$$

де $P(n)$ – ймовірність появи n фотонів; μ – середнє число фотонів. Ймовірність багатофотонного імпульсу

$$P(n \geq 2) = 1 - (1 + \mu)e^{-\mu}. \tag{12.22}$$

Якщо імпульс містить декілька фотонів, зловмисник може відокремити один фотон, пропустити інші далі, зберегти фотон у квантовій пам’яті, виконати вимірювання після оголошення базисів. Така атака не створює додаткових помилок. Саме для боротьби з PNS-атаками були розроблені протоколи SARG04 і стан-приманка QKD (decoy-state QKD).

Якщо PNS-атака базується на перехопленні частини фотонів без порушення квантового стану решти імпульсу, то наступний клас атак експлуатує

фізичні особливості роботи детекторів. У реальних системах саме детектори є одним із найбільш уразливих компонентів, оскільки їх поведінка може суттєво відрізнятися від ідеалізованих теоретичних моделей. Це відкриває можливість для атак, у яких зловмисник впливає безпосередньо на режим роботи приймача. Однією з найнебезпечніших серед них є атака засліплення детекторів (Detector Blinding Attack), у якій квантові детектори примусово переводяться у класичний режим функціонування, що дозволяє частково або повністю контролювати результати вимірювань. Однофотонні детектори працюють у режимі лавинного пробою. Якщо подати сильне лазерне випромінювання, детектор переходить у класичний режим. Тоді зловмисник може контролювати момент спрацювання, керувати результатами вимірювань, приховувати свою присутність. Енергія фотона $E = h\nu$, де h – стала Планка; ν – частота. При сильному опроміненні сумарна потужність $P = Nh\nu$, де N – число фотонів за секунду. Якщо $P > P_{\text{крит.}}$, детектор перестає працювати як квантовий. Ця атака стала одним із найважливіших аргументів на користь квантового розподілу ключів, незалежного від пристроїв (device-independent QKD).

Якщо в Detector Blinding Attack зловмисник повністю контролює поведінку детектора за допомогою інтенсивного випромінювання, то в атаці часових зсувів (Time-Shift Attack) використовується інша особливість реальних квантових приймачів – неоднакова часова чутливість детекторів. Таким чином, акцент зміщується від прямого «засліплення» обладнання до експлуатації його часових характеристик і технічної неідеальності. На відміну від Detector Blinding Attack, де основною метою є повний контроль над роботою детекторів, атака часових зсувів (Time-Shift Attack) використовує тонші особливості фізичної реалізації квантових систем. У реальних детекторах ефективність реєстрації фотонів залежить від моменту часу надходження сигналу. Якщо два детектори мають різні часові характеристики, зловмисник може зміщувати момент приходу фотона. Якщо зловмисник зміщує час прибуття фотонів, він може змінити ймовірність спрацювання окремих детекторів і тим самим отримати часткову інформацію про ключ без суттєвого збільшення рівня помилок. Це дозволяє

частково передбачати результат вимірювання. Отже, атака часових зсувів демонструє, що навіть незначні часові асиметрії у роботі обладнання можуть стати джерелом серйозних вразливостей квантового каналу.

Після аналізу атак, спрямованих переважно на детектори та процес вимірювання, логічно перейти до методів, у яких зловмисник намагається отримати інформацію безпосередньо з внутрішніх компонентів квантового обладнання. Саме такий підхід реалізується в атаці типу «троянський кінь» (Trojan-Horse Attack). Якщо атака часових зсувів використовує часові особливості роботи приймача, то атака типу «троянський кінь» ґрунтується на введенні додаткового світлового сигналу в систему з метою отримання інформації про внутрішній стан модуляторів, фазових елементів або налаштувань базисів. Таким чином, атака переходить від експлуатації часових характеристик до активного зондування апаратної структури квантового вузла. У цій атаці зловмисник надсилає у пристрій додаткові світлові імпульси. Частина випромінювання відбивається:

$$R = \frac{I_{\text{відб.}}}{I_0}, \tag{12.23}$$

де $I_{\text{відб.}}$ – інтенсивність відбитого сигналу; I_0 – початкова інтенсивність. Аналізуючи відбитий сигнал, можна отримати інформацію про налаштування фазових модуляторів, параметри поляризації, стан пристрою. Атака типу «троянський кінь» показує, що загрози для квантових мереж не обмежуються лише процесом передачі фотонів або роботою детекторів. Такий підхід демонструє, що навіть допоміжні елементи квантового обладнання можуть стати джерелом витоку інформації. Проте атака типу «троянський кінь» є лише окремим прикладом ширшого класу загроз, пов’язаних із неідеальністю реальних фізичних реалізацій.

Наступним класом атак є атаки через побічні канали (Side-channel attacks), які охоплюють усі можливі непрямі способи витоку інформації через часові, електромагнітні, теплові, акустичні та інші фізичні характеристики системи. Побічні канали виникають через електромагнітне випромінювання теплові

шуми, акустичні сигнали, часові залежності. Інформаційний витік можна описати як

$$I_{\text{витік}} = H(X) - H(X \mid Y), \qquad (12.24)$$

де $H(X)$ – ентропія джерела; $H(X \mid Y)$ – умовна ентропія після спостереження. Атаки через побічні канали (Side-Channel Attacks) узагальнюють ідею експлуатації неідеальностей квантового обладнання. Якщо Trojan-Horse Attack використовує оптичні відбиття для отримання інформації про внутрішній стан пристрою, то Side-Channel Attacks охоплюють значно ширший спектр фізичних витоків. Джерелом інформації можуть бути часові затримки, флуктуації енергоспоживання, електромагнітне випромінювання, температурні зміни або інші непрямі параметри роботи системи. Таким чином, аналіз Side-Channel Attacks демонструє, що практична безпека квантових мереж визначається не лише законами квантової механіки, а й рівнем досконалості реальної фізичної реалізації обладнання.

Аналіз різних типів атак показує, що вразливості квантових мереж пов’язані не лише з передачею квантових станів або недосконалістю окремих компонентів обладнання. Атаки на джерела фотонів, детектори та побічні канали демонструють, що безпека системи визначається всією фізичною інфраструктурою квантового зв’язку. Однак для стабільної роботи квантових мереж критично важливими є не тільки процеси генерації та вимірювання квантових станів, а й точна координація всіх вузлів у часі. У реальних системах передача, детектування, з’єднання заплутаності та робота повторювачів повинні бути жорстко синхронізовані. Саме тому окремий клас загроз пов’язаний із порушенням часової координації мережі. Це зумовлює необхідність розгляду вразливостей систем синхронізації, які можуть призводити до помилок детектування, втрати когерентності та порушення роботи квантових протоколів. Квантові мережі потребують точної часової синхронізації. Якщо $\Delta t > T_{\text{ког.}}$, де Δt – похибка синхронізації; $T_{\text{ког.}}$ – час когерентності, то виникає декогеренція. Зловмисник може навмисно створювати затримки, змінювати часові мітки, порушувати узгодження вузлів.

Системи синхронізації відіграють ключову роль у роботі квантових мереж, оскільки забезпечують узгодженість передачі фотонів, часових вікон детектування та процесів обробки інформації. Порушення синхронізації може призвести до зростання рівня помилок, втрати заплутаності та зниження ефективності передачі ключів. Проте часові атаки є лише частиною ширшої проблеми забезпечення стабільності квантових ресурсів у мережі. У глобальних квантових системах важливу роль відіграє не лише точність синхронізації, а й здатність тривалий час зберігати квантові стани без втрати когерентності. Саме цю функцію виконують системи квантової пам'яті, які є центральним елементом квантових повторювачів і масштабованих квантових мереж. Оскільки квантова пам'ять безпосередньо впливає на збереження заплутаності та синхронізацію процесів у мережі, вона також стає потенційною ціллю для атак. Квантова пам'ять має обмежений час когерентності. Якщо зловмисник викликає додаткові шуми, якість збереження різко погіршується.

Атаки на квантову пам'ять демонструють, що порушення когерентності або внесення додаткового шуму може призвести до деградації заплутаності та втрати інформації ще до завершення передачі. Проте у реальних глобальних квантових мережах квантова пам'ять зазвичай функціонує не ізольовано, а як складова квантових повторювачів. Саме повторювачі об'єднують процеси генерації, зберігання, очищення та з'єднання заплутаності. Тому компрометація окремих елементів повторювача може впливати вже не на локальний сегмент, а на функціонування всієї квантової мережі. Це зумовлює необхідність розгляду атак на квантові повторювачі, які є одними з найкритичніших вузлів глобального квантового інтернету. Квантові повторювачі виконують обмін заплутаністю, очищення заплутаності, синхронізацію. Помилки накопичуються: $F_n = F_0^n,$ де F_0 – точність одного сегмента; F_n – точність після n сегментів. Зловмисник може порушувати процедури очищення, вводити фальшиві результати вимірювань, впливати на квантову пам'ять.

Атаки на квантові повторювачі є особливо небезпечними, оскільки ці пристрої виконують центральну роль у передачі квантової інформації на великі

відстані. Повторювачі координують генерацію заплутаності, її очищення, з'єднання сегментів і роботу квантової пам'яті. Внаслідок цього будь-яка компрометація повторювача може призвести до накопичення помилок, деградації заплутаності або навіть прихованого перехоплення інформації. Аналіз таких атак показує важливу проблему практичної квантової криптографії: навіть якщо фундаментальні закони квантової механіки гарантують теоретичну безпеку протоколу, реальна фізична реалізація обладнання може містити вразливості. Саме тому сучасні дослідження спрямовані на створення підходів, у яких безпека не залежить від довіри до конкретних пристроїв. Такий підхід реалізується у концепції квантового розподілу ключів, незалежного від довіри до обладнання (Device-Independent QKD), де безпека визначається фундаментальними квантовими кореляціями, а не припущеннями про ідеальність апаратної реалізації. У цьому підході безпека базується на нерівностях Белла $S \leq 2$. Порушення нерівності Белла гарантує наявність квантових кореляцій навіть при недовірі до обладнання.

Хоча концепція Device-Independent QKD є одним із найперспективніших напрямів підвищення безпеки квантових мереж, її практична реалізація пов'язана зі значними технічними труднощами. Повністю незалежний від довіри до обладнання протокол потребує високоякісних заплутаних станів, надзвичайно ефективних детекторів і виконання строгих умов порушення нерівностей Белла. У реальних системах досягнення таких вимог є складним, особливо для мереж великої протяжності. Тому виникла потреба у проміжному підході, який би зберігав високий рівень захисту від атак на обладнання, але був більш придатним для практичного використання. Саме таким компромісом стала концепція квантового розподілу ключів, незалежного від довіри до вимірювальних пристроїв (Measurement-Device-Independent, MDI-QKD). На відміну від Device-Independent QKD, тут не потрібно повністю довіряти всій апаратурі, а основна увага зосереджується на усуненні найбільш уразливого елемента реальних QKD-систем – детекторів, які є ціллю багатьох практичних атак, зокрема Detector Blinding Attack та Time-Shift Attack. MDI-QKD усуває вразливості детекторів. У

цій схемі обидві сторони надсилають фотони третій стороні, центральний вузол виконує вимірювання у базисі Белла, а довіра до детекторів може бути неповною. Це дозволяє усунути засліплення детекторів і атаки часових зсувів.

Розглянемо приклади практичних атак

1. PNS-атака. Нехай середнє число фотонів у великій кількості імпульсів $\mu = 0.2$. Це означає, що більшість імпульсів взагалі не містять фотонів, частина містить один фотон, а дуже мала частина – два або більше фотонів. Для $\mu = 0.2$ імовірність появи багатофотонного імпульсу $P(n \geq 2) \approx 0.018$. Це означає, що приблизно 1.8% усіх імпульсів містять два або більше фотонів. Саме ці імпульси можуть бути використані для PNS-атаки. Зловмисник перехоплює один фотон із багатофотонного імпульсу, а інший пропускає до легального користувача. У результаті приймач не помічає втрати, зловмисник зберігає копію інформації, помилки в каналі можуть майже не зростати. Фізично це означає, що навіть невелика частка багатофотонних імпульсів створює потенційну вразливість системи.

2. Засліплення детектора. Якщо: $P_{\text{лазер}} > P_{\text{крит.}}$, де $P_{\text{лазер}}$ – потужність лазерного випромінювання зловмисника; $P_{\text{крит.}}$ – критична потужність, після якої квантовий детектор перестає працювати у квантовому режимі. У нормальному режимі детектор реєструє окремі фотони. Проте якщо на нього подати достатньо потужне випромінювання, він переходить у класичний режим роботи. У такому стані детектор перестає реагувати на одиночні фотони, його поведінка починає залежати від зовнішніх сильних сигналів і зловмисник може керувати моментами спрацювання. Фактично детектор «засліплюється» і перестає виконувати свою квантову функцію. Тоді атакуючий надсилає спеціально сформовані імпульси та нав’язує потрібні результати вимірювань. Це дозволяє перехоплювати ключ без суттєвого збільшення рівня помилок.

3. Часова атака. Нехай ефективності двох детекторів залежать від часу: $\eta_0(t) \neq \eta_1 1(t)$, де $\eta_0(t)$, $\eta_1 1(t)$ – часові залежності ефективності двох детекторів; t – момент прибуття фотона. У реальних системах детектори не є абсолютно

однаковими. Наприклад, один детектор може краще працювати на початку часовго вікна, інший – наприкінці. Якщо зловмисник зміщує час приходу фотона $t \to t + \delta t$, де δt – невелике часове зміщення, то ймовірності спрацювання детекторів змінюються. У результаті один детектор починає спрацьовувати частіше, статистика вимірювань стає зміщеною, зловмисник отримує часткову інформацію про біт ключа. Особливість цієї атаки полягає в тому, що вона не обов'язково викликає значне збільшення помилок, тому її важко виявити стандартними методами контролю QKD-системи.

Для захисту використовують: методи станів-приманок, MDI-QKD, квантовий розподіл ключів, незалежний від пристроїв, екранування обладнання, випадкову синхронізацію, контроль потужності сигналів, моніторинг параметрів детекторів.

Таким чином, практична безпека квантових каналів визначається не лише фундаментальними законами квантової механіки, а й фізичними характеристиками реального обладнання. Хоча квантовий розподіл ключів теоретично забезпечує можливість безумовно безпечної передачі інформації, реальні системи містять численні технічні вразливості, які можуть бути використані для фізичних атак. Основними джерелами загроз є недосконаліть фотонних джерел, шум і нестабільність детекторів, втрати у каналах передачі, помилки синхронізації та обмеження квантової пам'яті. Фізичні атаки, зокрема атака перехоплення-вимірювання, PNS-атака, засліплення детекторів, часові атаки та атаки через побічні канали, демонструють, що практична реалізація квантових мереж потребує значно складнішого підходу до забезпечення безпеки, ніж це передбачають ідеалізовані моделі. У відповідь на ці загрози розробляються нові архітектури захищених систем, такі як MDI-QKD та device-independent QKD, які мінімізують залежність безпеки від довіри до обладнання. Подальший розвиток квантових мереж безпосередньо залежить від здатності поєднати фундаментальні принципи квантової механіки з високою надійністю фізичної реалізації. Саме тому аналіз вразливостей та фізичних атак є одним із

ключових напрямів сучасних досліджень у сфері квантових комунікацій та майбутнього глобального квантового інтернету.

ЛІТЕРАТУРА

1. Arute F., Arya K., Babbush R. et al. Quantum Supremacy Using a Programmable Superconducting Processor // Nature. – 2019. – Vol. 574. – P. 505–510.

2. Gyongyosi L., Imre S. A Survey on Quantum Computing Technology // Computer Science Review. – 2019. – Vol. 31. – P. 51–71.

3. Pirandola S. End-to-End Capacities of a Quantum Communication Network // Communications Physics. – 2019. – Vol. 2. – Article 51.

4. Pant M., Krovi H., Towsley D., Tassiulas L., Englund D., Guha S. Routing Entanglement in the Quantum Internet // npj Quantum Information. – 2019. – Vol. 5. – Article 25.

5. Wilde M. M. Quantum Information Theory. — Cambridge : Cambridge University Press, 2017. — 980 p.

6. Cacciapuoti A. S., Caleffi M., Van Meter R., Hanzo L. When Entanglement Meets Classical Communications: Quantum Teleportation for the Quantum Internet // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2020. – Vol. 22, No. 3. – P. 1887–1938.

7. Khatri S., Wilde M. M. Principles of Quantum Communication Theory: A Modern Approach. – 2020. – 390 p.

8. Pirandola S., Andersen U. L., Banchi L. et al. Advances in Quantum Cryptography // Advances in Optics and Photonics. – 2020. – Vol. 12, No. 4. – P. 1012–1236.

9. Pirandola S. et al. Advances in quantum cryptography // *Advances in Optics and Photonics*. — 2020. — Vol. 12. — P. 1012–1236.

10. Bhaskar M. K., Riedinger R., Machielse B. et al. Experimental Demonstration of Memory-Enhanced Quantum Communication // Nature. – 2020. – Vol. 580. – P. 60–64.

11. Zhong H.-S., Wang H., Deng Y.-H. et al. Quantum Computational Advantage Using Photons // Science. – 2020. – Vol. 370. – P. 1460–1463.

12. Pompili M., Hermans S. L. N., Baier S. et al. Realization of a Multinode Quantum Network of Remote Solid-State Qubits // Science. – 2021. – Vol. 372, No. 6539. – P. 259–264.

13. Awschalom D. D., Hanson R., Wrachtrup J., Zhou B. B. Quantum Technologies with Optically Interfaced Solid-State Spins // Nature Photonics. – 2021. – Vol. 15. – P. 516–524.

14. Chen Y.-A., Zhang Q., Chen T.-Y. et al. An Integrated Space-to-Ground Quantum Communication Network over 4600 Kilometres // Nature. – 2021. – Vol. 589. – P. 214–219.

15. Simon C. Towards a Global Quantum Network // Nature Photonics. – 2021. – Vol. 15. – P. 81–82.

16. Cuomo D., Caleffi M., Cacciapuoti A. S. Towards a Distributed Quantum Computing Ecosystem // IET Quantum Communication. – 2020. – Vol. 1, No. 1. – P. 3–8.

17. Van Meter R. Quantum Networking. – 2nd ed. – Hoboken : Wiley-ISTE, 2022. – 432 p.

18. Wallnöfer J., Pirker A., Dür W. Multipartite Entanglement Distribution in Quantum Networks // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12. – Article 314.

19. Caleffi M., Cacciapuoti A. S., Bianchi G. Quantum Internet: Research Challenges in Distributed Quantum Computing // Computer Networks. – 2022. – Vol. 202. – Article 108523.

20. Azuma K., Economou S. E., Elkouss D. et al. Quantum Repeaters: From Quantum Networks to the Quantum Internet // Reviews of Modern Physics. – 2023. – Vol. 95. – Article 045006.

21. Loke S. W. From Distributed Quantum Computing to Quantum Internet Computing: An Introduction. – Hoboken : Wiley, 2023. – 352 p.

22. Muralidharan S., Li L., Kim J. et al. Optimal Architectures for Long-Distance Quantum Communication // PRX Quantum. – 2023. – Vol. 4. – Article 010101.

23. Luo M.-X. Quantum Networks: Introduction and Applications. – Singapore : Springer Nature, 2024. – 429 p.

24. Djordjevic I. B. Physical-Layer Security, Quantum Key Distribution, and Post-Quantum Cryptography. – Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2025. – 650 p.

25. Rohde P. P., Huang Z., Ouyang Y., Huang H.-L., Su Z.-E., Devitt S. et al. The Quantum Internet (Technical Version). – 2025. – 180 p.

26. Caleffi M., Cacciapuoti A. S. Quantum Internet Architecture: Unlocking Quantum-Native Routing via Quantum Addressing. – 2025. – 12 p.

27. Trinh P. V., Sugiura S. Quantum Internet in the Sky: Vision, Challenges, Solutions, and Future Directions. – 2025. – 31 p.

28. Kubala B., Sauer A., Tarantola A., Fabian D., Ginter A. et al. Advanced Quantum Communication and Quantum Networks: From Basic Research to Future Applications. – 2026. – 214 p.

29. Krawec W. O. Quantum Communication and Cryptography. – Amsterdam : Elsevier, 2026. – 420 p.

30. Pearsall T. Quantum Photonics: Quantum Non-Locality at Work. – Cham : Springer Nature, 2026. – 387 p.

31. Kumar A., Rathore P. S., Juárez-Ramírez R. (eds.). Deep Quantum Neural Networks: AI for 6G/7G Communication Systems. – Singapore : Springer Nature, 2026. – 350 p.

32. Kumar V., · Cicconetti C., · Conti M., · Passarella A. Quantum Internet: Technologies, Protocols, and Research Challenges // International Journal of Networked and Distributed Computing (2025). Режим доступу: https://doi.org/10.1007/s44227-025-00060-5.

Навчальне видання

**КОРЧЕНКО О.Г., СУСЛІКОВ Л.М.,
МАТВІЇВ Ю.Ю., РІЗАК В.М.**

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КВАНТОВОЇ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальний посібник

Гарнитура Times New Roman
Формат 60x84/16.
Ум.друк.арк. 7,2. Обл.вид.арк. .
Зам. № 46. Наклад 100 прим.

Оригінал-макет виготовлено
в редакційно-впдавничому відділі ДВНЗ «УжУ
88000, м. Ужгород, вул. Заньковецькоі, 89.
E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua

Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 7,2. Зам. № . Наклад 100 прим.
Видавництво УжУ «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18. E-mail: hoverla@i.ua

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року