ПРО РОЗВ'ЯЗКИ І СИМЕТРІЇ РІВНЯННЯ ДІРАКА ТА КОМПЛЕКСНОГО РІВНЯННЯ ДІРАКА – КЕЙЛЕРА У ПРЕДСТАВЛЕННІ ФОЛДІ – ВОТХОЙЗЕНА

В.М. Симулик, І.Ю. Кривський

Інститут електронної фізики НАН України, відділ теорії елементарних взаємодій
88000, Ужгород, вул. Університетська, 21
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

Знайдена канонічна форма комплексного рівняння Дірака – Кейлера у представленні Фолді – Вотхойзена. Одержано загальні розв'язки цього рівняння як у представленні Паулі – Дірака, так і у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена. Проаналізовано фізичний зміст різних розв'язків рівнянь Дірака та комплексного рівняння Дірака – Кейлера, пов'язаних з різними повними наборами спостережуваних величин. Знайдено нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою.

1. Вступ

Стаття є безпосереднім продовженням циклу наших робіт [1–3] присвячених побудові нових варіантів релятивістської квантової механіки та теорії спінорного поля у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена (скорочено ФВ). Крім того, дана робота є безпосереднім продовженням нашої статті [4], в якій було введено в розгляд нове релятивістське рівняння, а саме комплексне рівняння Дірака – Кейлера (скорочено КДК). Тут ми продовжуємо дослідження цього рівняння.

Використовуються позначення та домовленості [1–3]. З метою скорочення викладок на формули з [1–3] тут даються безпосередні посилання.

Рівняння КДК з [4] є комплексним варіантом звичайного рівняння Дірака – Кейлера. Для знайомства з останнім та відповідною літературою див., наприклад, огляд [5].

Нагадаємо (див. [2]), що рівняння та основні математичні твердження 4-компонентного формалізму релятивістської квантової механіки електрон-позитронного дублету будуються з рівняння та основних математичних тверджень 2-компонентної релятивістської квантової механіки електрона у представленні ФВ у вигляді прямої суми з операторів рівняння та формул останньої. Аналогічно формалізм 4-компонентного спінорного поля у представленні ФВ (яке було введено в розгляд у статті [6]) будується як специфічна пряма сума (див. [3]), що включає комплексне спряження, операторів рівняння та формул з 2-компонентної релятивістської квантової механіки електрона. Наступним узагальненням у рядку наведених вище узагальнень є 8-компонентне комплексне рівняння Дірака – Кейлера (скорочено КДК) у представленні ФВ [6], яке будується з 4-компонентного рівняння ФВ (або з 2-компонентного рівняння Шредінгера – Фолді релятивістської квантової механіки електрона) у вигляді специфічної прямої суми з 2-компонентних операторів. Таким чином, введення в розгляд та дослідження рівняння КДК і пов'язаного з ним формалізму у представленні ФВ є безпосереднім і логічним продовженням наших досліджень релятивістських рівнянь у представленні ФВ, які виконані у роботах [1–3].

В даній роботі знайдено нові симетрії спіну 1 та 3/2 рівняння Дірака з ненульовою масою. Наявність у рівняння Дірака Бозе симетрій спіну 1 наочно демонструє, що це рівняння може описувати і бозони, а не лише ферміони.

2. Комплексне рівняння Дірака – Кейлера у представленні Фолді – Вотхойзена та його розв'язок

В нашій роботі [4] було показано, що 16-компонентний польовий обєкт з дійсними компонентами, який називається рівнянням Дірака – Кейлера [5] і бозонна форма якого записується у вигляді диференціальної форми, у ферміонній 8-компонентній формі з комплексними компонентами має вигляд

$$\left(i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}-\Gamma m\right)\Psi=0$$
$$\leftrightarrow\left(i\partial_{0}-H_{8}\right)\Psi=0,\quad \Psi=\begin{vmatrix}\psi_{+}\\ \psi_{-}\end{vmatrix}, \qquad (1)$$

$$\Gamma^{\mu}=\begin{vmatrix}\gamma^{\mu} & 0\\ 0 & \gamma^{\mu}\end{vmatrix},\quad \Gamma=\begin{vmatrix}I_{4} & 0\\ 0 & -I_{4}\end{vmatrix},$$
$$H_{8}=\Gamma^{0}\left(\Gamma^{j}p^{j}+m\right), \qquad (2)$$

і названий у [4] рівнянням КДК. Тут I_4 – одинична 4-вимірна матриця, γ^{μ} – матриці Дірака у представленні Паулі – Дірака (скорочено ПД), H_8 – гамільтоніан для рівняння КДК (1), а $\psi_{\pm}$ задовольняють рівнянням

$$D_{\pm}\psi_{\pm}\equiv\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\mp m\right)\psi_{\pm}=0. \qquad (3\pm)$$

Перш ніж наводити розв'язки рівняння КДК (1), обговоримо у деталях перетворення рівнянь (3±) за допомогою різних операторів типу ФВ, проаналізуємо всі можливі фундаментальні розв'язки рівнянь типу ФВ, які одержуються з рівнянь (3±).

2.1. ***Про фундаментальні розв'язки рівняння Дірака.*** Оскільки рівняння (1) є прямою сумою рівнянь (3±), спочатку наведемо важливі і деталізовані твердження про кожне з рівнянь (3±) окремо. Аналіз рівняння (1) та його ФВ-представлення буде подальшим кроком.

Легко переконатись, що обидва рівняння (3±) еквівалентні між собою як у ПД, так і у ФВ-представленні.

Дійсно, еквівалентність рівнянь (3±) у ПД-представленні випливає з того факту, що

$$i\gamma^{4}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)i\gamma^{4}$$
$$=-\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\Rightarrow\psi_{\mp}=i\gamma^{4}\psi_{\pm}, \qquad (4)$$

де, в наших позначеннях, унітарний матричний оператор

$$i\gamma^{4}\equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}. \qquad (5)$$

Далі, при перетвореннях

$$\psi_{+}\to\phi\equiv V_{+}\psi_{+} \qquad (6)$$

та

$$\psi_{-}\to\phi\equiv V_{-}\psi_{-} \qquad (7)$$

(явний вигляд $\phi(x)$ наведено у формулі (8) статті [3]) діракіан $D_{\pm}$ із (3±) перетворюється як

$$D_{+}\equiv\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\to D_{+}^{\mathrm{F}}\equiv V_{+}D_{+}V_{+}^{-1}$$
$$=\frac{m+\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{\omega}\left(i\gamma^{0}\partial_{0}-\omega\right), \qquad (8)$$

$$D_{-}\equiv\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\to D_{-}^{\mathrm{F}}\equiv V_{-}D_{-}V_{-}^{-1}$$
$$=\frac{-m+\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{\omega}\left(i\gamma^{0}\partial_{0}-\omega\right), \qquad (9)$$

Тут оператори $V_{\pm}$ та $V_{\pm}^{-1}$ мають вигляд:

$$V_{\pm}=\frac{\vec{\gamma}\vec{p}+\omega\pm m}{\sqrt{2\omega(\omega\pm m)}},\quad V_{\pm}^{-1}=\frac{-\vec{\gamma}\vec{p}+\omega\pm m}{\sqrt{2\omega(\omega\pm m)}} \qquad (10)$$

Оскільки $\left(\frac{-m+\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{\omega}\right)\left(\frac{m+\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{\omega}\right)=1$, то два рівняння (8), (9) у представленні ФВ, які одержуються з двох рівнянь (3±) за допомогою двох різних операторів $V_{\pm}$ (що відрізняються знаком при масі m), еквівалентні одному і тому ж рівнянню ФВ, а саме, рівнянню

$$\left(i\gamma^0\partial_0-\omega\right)\phi=0\,. \qquad (11)$$

Якщо прийняти до уваги, що класичне спінорне поле $\psi(x)$ (байдуже, ψ_+ чи ψ_-) є поле дублету частинок спіну $s=1/2$, у якому частинка й античастинка фігурують симетрично, то твердження роботи [7] про те, що ψ_+ є полем частинки, а ψ_- є полем античастинки, невірне, а використання цього твердження у принципово цікавих роботах В.П. Незнамова по побудові квантової електродинаміки у представленні ФВ, див. [8] і посилання там, нічим не виправдано. Саме це твердження із роботи [7] приводить автора [8] до залучення 8-компонентного рівняння Дірака. Зауважимо, що використання для задач [8] 8-компонентного формалізму (по суті рівняння КДК (1)) є можливим, але не є необхідним, оскільки стандартне 4-компонентне спінорне поле, як ми демонструємо нижче, є об'єктом, цілком придатним для задач [8]. Тут ми наводимо з цього приводу детальний аналіз з явним виписуванням відповідних формул.

У цьому зв'язку нагадаємо, що, як показано у [2, 3], розв'язки рівняння Дірака лише у канонічному представленні (тобто у представленні ФВ) безпосередньо зв'язані з квантовомеханічними хвильовими функціями дублету частинка-античастинка. Тому детальний фізичний зміст еквівалентності рівнянь (3±) слід аналізувати спочатку саме у ФВ-представленні. З цією метою спочатку наведемо явний вигляд двох *стаціонарних* повних наборів дублету частинка-античастинка, які у ФВ-представленні мають чіткий однозначний фізичний зміст. (Нагадаємо, що повним стаціонарним набором спостережуваних для поля ϕ називається набір максимального числа взаємно комутуючих функціонально незалежних ермітових операторів, кожний з яких комутує також з оператором рівняння для ϕ). Для ілюстрації наведемо два фізично важливих приклади стаціонарних повних наборів дублету частинка-античастинка у ФВ-представленні.

Перший – це імпульсно-спіновий набір для дублету частинка-античастинка, доповнений оператором τ^3 знаку заряду

$$(\vec{p},\ s_z=\Sigma^3/2,\ \tau^3),$$
$$\vec{\Sigma}\equiv(\Sigma^1,\ \Sigma^2,\ \Sigma^3)=\begin{vmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{vmatrix}, \qquad (12)$$

де $\vec{\sigma}=(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ – матриці Паулі, див. (14) із [1], а τ^3 є третя компонента з набору

$$\tau^1=i\gamma^4\widehat{C},\quad \tau^2=-\gamma^0\gamma^4\widehat{C},\quad \tau^3=\gamma^0, \qquad (13)$$

де $\vec{s}^{\,\mathrm{I}}=\vec{\tau}/2$ є ермітові генератори 4-вимірного унітарного зображення ізоспінової групи $\mathrm{SU}_2^{\mathrm{I}}$ (зарядової групи інваріантності рівняння (11)), $\widehat{C}$ – оператор комплексного спряження.

Другий – це імпульсно-спіральний набір для цього дублету

$$(\vec{p},\ \ \widehat{h}_\lambda\overset{\mathrm{df}}{=}\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}/2\left|\vec{p}\right|,\ \ \tau^3), \qquad (14)$$

де $\widehat{h}_\lambda$ - оператор спіральності ферміонного дублету.

Підкреслимо, що набори (12), (14) мають чіткий однозначний фізичний зміст у ФВ-представленні і встановлений у ФВ-представленні зміст не міняється при переході, що здійснюється унітарним перетворенням ФВ, до ПД-представлення.

Нагадаємо, що оператор спіну $\vec{s}=\vec{\Sigma}/2$ у ПД-представленні має вигляд (16) із роботи [3], тоді як оператор τ^3 із (13) у ПД-представленні має вигляд

$${}^{\mathrm{PD}}\tau^3={}^{\mathrm{D}}\gamma^0\equiv -H_{\mathrm{D}}/\omega,\ H_{\mathrm{D}}\equiv\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m, \qquad (15)$$

а явний вигляд τ^1 і τ^2 змінюється і стає суттєво нелокальним. Цікаво відмітити, що на відміну від операторів спіну $\vec{s} = \vec{\Sigma}/2$ та τ^n із (13), вигляд операторів імпульсу і спіральності одинаковий у ПД- та ФВ-представленнях. В цьому можна вбачати певну перевагу імпульсно-спірального повного набору над імпульсно-спіновим.

Розглянемо набір 8 найпростіших розв'язків рівняння ФВ (11) при $m \neq 0$

$$e^{-ikx}\left\{\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-}, \mathrm{G}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{-}\right\}, \quad e^{+ikx}\left\{\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+}, \mathrm{G}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{+}\right\},$$
$$\mathrm{r}=1,2, \;\; kx \equiv \tilde{\omega}t - \vec{k}\vec{x}, \;\; \tilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \qquad (16)$$

де

$$\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}_{\mathrm{r}} \\ 0 \end{vmatrix}, \; \mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{d}_{\mathrm{r}} \end{vmatrix},$$
$$\mathrm{G}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{-} = \frac{1}{|\vec{k}|}\begin{vmatrix} (\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\mathrm{d}_{\mathrm{r}} \\ 0 \end{vmatrix}, \; \mathrm{G}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{+} = \frac{1}{|\vec{k}|}\begin{vmatrix} 0 \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\mathrm{d}_{\mathrm{r}} \end{vmatrix}, \qquad (17)$$

а 2-компонентні вектори d_{r}, $(\mathrm{r} = 1,2)$ задані в (16) із [1] – це квантовомеханічні спінові стани, частинки (античастинки), тобто власні вектори оператора $s_z = \sigma^3/2$, тут $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ – ті ж, що і у (12). Набір чотирьох векторів з (16)

$$\{e^{i\varepsilon kx}\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{\varepsilon} \equiv \mathbb{D}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{\varepsilon}(x)\}; \;\; \mathrm{r} = 1,2, \;\; \varepsilon = \mp, \qquad (18)$$

є набором фундаментальних розв'язків рівняння (11), власних для імпульсно-спінового набору (12) з власними значеннями $\vec{k} \in \mathrm{R}_{\vec{k}}^3$ імпульсу $\vec{p}$, $\pm 1/2$ проекції спіну s_z (при $\mathrm{r} = 1,2$, відповідно) та власними значеннями ± 1 (при $\varepsilon = \mp$, відповідно) оператора знаку заряду τ^3.

Інший набір чотирьох величин

$$\{e^{i\varepsilon kx}\mathrm{Z}_{\vec{k}\lambda}^{\varepsilon} \equiv \mathbb{Z}_{\vec{k}\lambda}^{\varepsilon}(x)\}; \;\; \lambda = 1,2, \;\; \varepsilon = \mp, \qquad (19)$$

побудований з величин (16) у вигляді їх наступної лінійної комбінації

$$\mathrm{Z}_{\vec{k}1}^{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{D}_1^{\varepsilon} + \mathrm{G}_{\vec{k}1}^{\varepsilon}\right),$$
$$\mathrm{Z}_{\vec{k}2}^{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{D}_2^{\varepsilon} - \mathrm{G}_{\vec{k}2}^{\varepsilon}\right), \qquad (20)$$

є також набором фундаментальних розв'язків рівняння (11), власних для імпульсно-спірального набору (14) з власними значеннями $\vec{k} \in \mathrm{R}_{\vec{k}}^3$ імпульсу $\vec{p}$, $\pm 1/2$ спіральності $\widehat{h}_\lambda$ (при $\lambda = 1,2$, відповідно) та власними значеннями ± 1 (при $\varepsilon = \mp$, відповідно) оператора τ^3.

Умови ортонормованості та повноти векторів (18) мають вигляд

$$\int d^3x \mathbb{D}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{\varepsilon\dagger}(t,\vec{x})\mathbb{D}_{\vec{k}'\mathrm{r}'}^{\varepsilon'}(t,\vec{x}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{\mathrm{rr}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'},$$
$$\mathrm{r},\mathrm{r}'=1,2, \;\; \varepsilon,\varepsilon' = \mp, \qquad (21)$$
$$\sum_{\mathrm{r},\varepsilon}\int d^3k \mathbb{D}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{\varepsilon}(t,\vec{x})\mathbb{D}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{\varepsilon\dagger}(t,\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \qquad (22)$$

Умови ортонормованості та повноти набору (19) записуються аналогічно до (21), (22) (заміною в останніх базисних векторів $\mathbb{D}_{\vec{k}\mathrm{r}}^{\varepsilon}(x)$ на вектори $\mathbb{Z}_{\vec{k}\lambda}^{\varepsilon}(x)$).

Справедливість наведених формулами (16) – (22) тверджень доводиться їх безпосередньою перевіркою.

Аналогічно формулюються і доводяться відповідні твердження у ПД-представленні, тобто для рівняння Дірака (3+). У цьому представленні набору (16) відповідає набір 8 розв'язків

$$e^{-ikx}\left\{v_{\mathrm{r}}^{-}, \underline{v}_{\mathrm{r}}^{+}\right\}, \quad e^{+ikx}\left\{v_{\mathrm{r}}^{+}, \underline{v}_{\mathrm{r}}^{-}\right\}, \qquad (23)$$

де базисні вектори $v_{\mathrm{r}}^{-}(\vec{k}), v_{\mathrm{r}}^{+}(\vec{k})$ задані у виразах (15) із [1], а базисні вектори $\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k})$ зв'язані з ними наступним чином

$$\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k}) = v_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k})\Big|_{m\to -m}. \qquad (24)$$

Набору базисних векторів (18) відповідає набір чотирьох розв'язків

$$\{e^{i\varepsilon kx}v_{\mathrm{r}}^{\varepsilon} \equiv \mathbb{V}_{\mathrm{r}}^{\varepsilon}(x)\}; \quad \mathrm{r}=1,2, \quad \varepsilon=\mp, \qquad (25)$$

а набору базисних векторів (19) відповідає набір чотирьох розв'язків

$$\{e^{i\varepsilon kx}\overset{\mathrm{PD}}{Z}{}_{\vec{k}\lambda}^{\varepsilon} \equiv \overset{\mathrm{PD}}{\mathbb{Z}}{}_{\vec{k}\lambda}^{\varepsilon}(x)\}; \quad \lambda=1,2, \quad \varepsilon=\mp, \qquad (26)$$

побудований з величин $v_{\mathrm{r}}^{-}(\vec{k})$, $v_{\mathrm{r}}^{+}(\vec{k})$ (задані у виразах (15) із [1]) та величин $\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k})$ (24) у вигляді їх наступної лінійної комбінації

$$\begin{aligned} &\overset{\mathrm{PD}}{Z}{}_1^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1^{-}+\underline{v}_1^{+}), \quad \overset{\mathrm{PD}}{Z}{}_1^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1^{+}+\underline{v}_1^{-}), \\ &\overset{\mathrm{PD}}{Z}{}_2^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_2^{-}-\underline{v}_2^{+}), \quad \overset{\mathrm{PD}}{Z}{}_2^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_2^{+}-\underline{v}_2^{-}). \end{aligned} \qquad (27)$$

Ортонормовані вектори (25) є власними для імпульсно-спінового повного набору

$$(\vec{p}, \ \overset{\mathrm{PD}}{s}_z, \ \overset{\mathrm{PD}}{\tau}{}^3), \qquad (28)$$

а ортонормовані вектори (26) є власними для імпульсно-спірального повного набору

$$(\vec{p}, \ \widehat{h}_\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}/2|\vec{p}|, \ \ \overset{\mathrm{PD}}{\tau}{}^3) \qquad (29)$$

(оператор спіну $\vec{s}=\vec{\Sigma}/2$ у ПД-представленні має вигляд (16) із роботи [3], оператор $\overset{\mathrm{PD}}{\tau}{}^3$ наведений тут у формулі (15), а оператор спіральності у ПД- та ФВ-представленнях є однаковим).

Зауважимо, що окремо взяті розв'язки (24) не мають безпосереднього фізичного змісту, оскільки як верхні, так і нижні компоненти векторів $\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k})$ є малими у нерелятивістському наближенні.

Фізична інтерпретація розглянутих тут розвязків однозначно дається, стартуючи з представлення ФВ, на основі апелювання до повного набору операторів спостережуваних величин, як це зроблено у [2].

Наведені твердження уможливлюють розклад довільного розв'язку $\phi(x)$ рівняння (11) або через елементи набору (18), або через елементи набору (19). Далі, за допомогою операторного перетворення V_{+} як явні вигляди операторів повних наборів, так і розкладені за власними векторами відповідних повних наборів загальні розв'язки $\phi(x)$ рівняння (11) можна перевести у ПД-представлення. Причому, незалежно від складності їх явного вигляду у ПД-представленні, за компонентами повних наборів зберігається (встановлений у ФВ-представленні) зміст як "істинних" фізичних величин. Тобто при ФВ-перетворенні із ФВ-представлення у ПД-представлення компоненти повного набору зберігають свій квантовомеханічний фізичний зміст та комутаційні спів-відношення, які вони мали у ФВ-представленні, хоча можуть набувати суттєво нелокального явного вигляду.

Для повноти розгляду відмітимо, що можливі інші комбінації із елементів базисних розв'язків рівняння ФВ (11), які виявляються пов'язаними із повними наборами бозонних квантовомеханічних фізичних величин. Про можливу наявність бозонних аспектів у рівнянні ФВ (11) згадується ще у роботі Л. Фолді [9], а безпосередня бозонна реалізація та відповідна бозонна інтерпретація рівняння Дірака здійснена у наших роботах [10–12], правда, лише для випадку $m=0$.

2.2. ***Про розв'язки комплексного рівняння Дірака – Кейлера.*** Тут, як і вище, при розгляді рівняння Дірака, ми обмежуємось лише ферміонним аспектом рівняння КДК (1). Бозонна форма рівняння КДК у бозонному представленні матриць γ^μ алгебри Кліффорда – Дірака наведена у нашій роботі [4]. Оскільки торкаємось лише ферміонних аспектів рівняння КДК, то залучаємо лише чотири (саме ферміонні) фундаментальні базисні розв'язки. Унітарне перетворення типу ФВ для рівняння КДК

(1), яке діагоналізує гамільтоніан H_8 цього рівняння, має вигляд

$$\widehat{V} = \begin{vmatrix} V_+ & 0 \\ 0 & \tilde{V}_- \end{vmatrix}: \ \Psi \to \Phi = \widehat{V}\Psi, \qquad (30)$$

де $\tilde{V}_- = \gamma^0 \dfrac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} V_-$, а оператори $V_\pm$ задано у (10). Це перетворення переводить рівняння КДК (1) у 8-компонентне рівняння КДК у ФВ-представленні, а саме

$$\begin{aligned} &\left(i\partial_0 - \Gamma^0\omega\right)\Phi = 0, \\ &\Phi = \mathrm{column}(\xi^-, \xi^+, \eta^-, \eta^+), \end{aligned} \qquad (31)$$

де 2-компонентні вектори ξ^-, η^- – це квантовомеханічні хвильові функції двох частинок маси m та спіна $s = 1/2$, а 2-компонентні вектори ξ^+, η^+ – це комплексно спряжені до квантово-механічних хвильових функцій відповідних двох античастинок хвильві функції тих самих маси та спіна.

Виходячи з того, що 8-компонентне ферміонне поле у рівнянні КДК (1) є прямою сумою відповідних 4-компонентних діраківських полів пар частинка-античастинка, повний набір спостережуваних для поля $\Phi(x)$ можна вибрати у вигляді

$$\left(\vec{p},\ \vec{s}_8,\ \tau_8^3\right), \qquad \vec{s}_8 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vec{\Sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\Sigma} \end{bmatrix}, \qquad (32)$$

а для випадку заряджених пар частинка-античастинка оператори зарядової групи інваріантності рівняння КДК (31) (генератори 8-мірного зображення групи $\mathrm{SU}_2^{\mathrm{I}}$) мають вигляд

$$\tau_8^l = \begin{vmatrix} \tau_4^l & 0 \\ 0 & \tau_4'^l \end{vmatrix}, \quad l = 1,2,3, \qquad (33)$$

де матриці $\vec{\Sigma}$ задані в (12), а τ_4^l – в (13).

Повний набір фундаментальних ферміонних розв'язків для рівняння (31), який є власним для операторів повного набору (32), має вигляд

$$\left\{ e^{-ikx}\begin{vmatrix} \mathrm{D}_\mathrm{r}^- \\ 0 \end{vmatrix},\ e^{-ikx}\begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{D}_\mathrm{r}^- \end{vmatrix},\ e^{+ikx}\begin{vmatrix} \mathrm{D}_\mathrm{r}^+ \\ 0 \end{vmatrix},\ e^{+ikx}\begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{D}_\mathrm{r}^+ \end{vmatrix} \right\}, \qquad (34)$$

а загальний розв'язок рівняння (31) має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(x) = &\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x \ (e^{-ikx}\begin{vmatrix} \xi^{\mathrm{r}-}(\vec{k})\mathrm{D}_\mathrm{r}^- \\ \eta^{\mathrm{r}-}(\vec{k})\mathrm{D}_\mathrm{r}^- \end{vmatrix} \\ &+ e^{ikx}\begin{vmatrix} \xi^{\mathrm{r}+}(\vec{k})\mathrm{D}_\mathrm{r}^+ \\ \eta^{\mathrm{r}+}(\vec{k})\mathrm{D}_\mathrm{r}^+ \end{vmatrix}), \end{aligned} \qquad (35)$$

У формулі (35) $kx \equiv \tilde{\omega}t - \vec{k}\vec{x}$, $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, 4-компонентні вектори D_r^-, $(\mathrm{r} = 1,2)$ задані в (17), $\xi^{\mathrm{r}-}(\vec{k})$, $\eta^{\mathrm{r}-}(\vec{k})$, $\xi^{\mathrm{r}+}(\vec{k})$, $\eta^{\mathrm{r}+}(\vec{k})$ – відповідні незалежні квантовомеханічні імпульсно-спінові амплітуди частинок та античастинок (квартету з даними значеннями імпульсу $\vec{k}$, спіну $\vec{s}_z = \mp 1/2,\ (\mathrm{r} = 1,2)$) та знаку заряду $\varepsilon = \pm$.

За допомогою оберненого до (30) перетворення $\widehat{V}^{-1}$ із виразу (35) знаходимо загальний розв'язок рівняння КДК (1) у ПД-представленні

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \widehat{V}^{-1}\Phi(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \ (e^{-ikx}\begin{vmatrix} \xi^{\mathrm{r}-}(\vec{k})v_\mathrm{r}^-(\vec{k}) \\ \eta^{\mathrm{r}-}(\vec{k})v_\mathrm{r}^+(\vec{k}) \end{vmatrix} \\ &+ e^{ikx}\begin{vmatrix} \xi^{\mathrm{r}+}(\vec{k})v_\mathrm{r}^+(\vec{k}) \\ \eta^{\mathrm{r}+}(\vec{k})v_\mathrm{r}^-(\vec{k}) \end{vmatrix}), \end{aligned} \qquad (36)$$

де базисні вектори $v_\mathrm{r}^-(\vec{k})$, $v_\mathrm{r}^+(\vec{k})$ задані у виразах (15) із [1].

Аналогічно записуються ферміонні розв'язки рівняння КДК, пов'язані з іншими ферміонними повними наборами (наприклад, імпульсно-спіральним).

Для $(p\overline{p}n\overline{n})$-мультиплету ($p,n$ – протон, нейтрон, $\overline{p},\overline{n}$ – їх античастинки) оператор знаку заряду має вигляд

$$\tau_8^l = \begin{vmatrix} \tau_4^l & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad l = 1,2,3, \tag{37}$$

Як бачимо рівняння КДК (1), (31) можуть бути застосовані до опису релятивістських квартетів елементарних частинок, зокрема релятивістського дублету протон-нейтрон.

В певній аналогії з тим, як рівняння Дірака описує релятивістський атом водню, рівняння КДК (1), (31) у наведеному тут ферміонному варіанті їх інтерпретації можуть бути залучені до релятивістського опису такого ядра, як дейтрон.

3. Про нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою та комплексного рівняння Дірака – Кейлера

Наведемо тут коротко результати наших досліджень про побудову максимальної матричної алгебри інваріантності 4-компонентного рівняння Дірака у ФВ-представленні (11) та про нові фізично важливі симетрії стандартного рівняння Дірака (3+).

В якості 16 незалежних (ind) елементів стандартної алгебри Кліффорда – Дірака (CD) виберемо матриці

$$\{\text{ind CD}\} \equiv \left\{\mathrm{I},\ \underset{\frown}{s}_{\hat{\mu}\hat{\nu}},\ \hat{\mu}\hat{\nu} = \overline{0,5}\right\}$$
$$= \left\{ \begin{matrix} \underset{\frown}{s}_{\breve{\mu}\breve{\nu}} \equiv \dfrac{1}{4}\left[\gamma_{\breve{\mu}}, \gamma_{\breve{\nu}}\right],\ \breve{\mu}\breve{\nu} = \overline{0,4}, \\ \underset{\frown}{s}_{\breve{\mu}5} = \dfrac{1}{2}\gamma_{\breve{\mu}} = -\underset{\frown}{s}_{5\breve{\mu}},\quad \mathrm{I} \end{matrix} \right\}, \tag{38}$$

які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\left[\underset{\frown}{s}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \underset{\frown}{s}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}\right] = -g_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\underset{\frown}{s}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - g_{\hat{\rho}\hat{\nu}}\underset{\frown}{s}_{\hat{\sigma}\hat{\mu}} - g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\underset{\frown}{s}_{\hat{\mu}\hat{\rho}} - g_{\hat{\sigma}\hat{\mu}}\underset{\frown}{s}_{\hat{\rho}\hat{\nu}} \tag{39}$$

і, отже, є первісними генераторами алгебри SO(1,5) поворотів у просторі Мінковського M(1,5), асоційованими з дійсними параметрами $\omega^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\omega^{\hat{\nu}\hat{\mu}}$.

Стартуючи з алгебри CD, породжуваної генераторами (38), введемо в розгляд розширену дійсну алгебру Кліффорда – Дірака (ERCD – extended real Clifford – Dirac), 64 незалежні елементи якої мають вигляд

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ind CD},\ i\cdot\text{ind CD},\ \widehat{C}\cdot\text{ind CD}, \\ i\widehat{C}\cdot\text{ind CD} \end{matrix} \right\}, \tag{40}$$

де $\widehat{C}$ – оператор комплексного спряження у множині $\{\phi\}$ розв'язків рівняння ФВ (11). Таким чином, алгебра ERCD включає лінійні суперпозиції всіх можливих композицій γ-матриць, оператора $\widehat{C}$ комплексного спряження та уявної одиниці i, тобто є повним набором елементів, частина яких використовувалась у алгебрі Паулі – Гюрші – Ібрагімова (про 8-вимірну, коли m=0, та 4-вимірну, коли маса ненульова, алгебру Паулі – Гюрші – Ібрагімова інваріантності рівняння Дірака див., наприклад, у [10] та в оригінальних роботах вказаних авторів). Характерною особливістю алгебри ERCD є те, що її елементи (як і елементи стандартної CD-алгебри) комутують або антикомутують між собою. Серед незалежних елементів алгебри ERCD є 36 ермітових і 28 антиермітових елементів, останні утворюють алгебру SO(8) (підалгебру ERCD-алгебри).

На основі 64 елементів матричної алгебри ERCD (40) легко встановити широкі та фізично важливі симетрії спочатку рівняння ФВ (11), а потім (здійснивши відповідний перехід за допомогою оператора ФВ V_+ (10)) – і стандартного рівняння Дірака (3+). Такі алгебри симетрії будуть підалгебрами ERCD-алгебри (40).

Максимальною чисто матричною алгеброю інваріантності рівняння Дірака у представленні ФВ (11) є 32-вимірна алгебра $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \widehat{\varepsilon}\cdot\mathrm{SO}(6) \oplus \widehat{\varepsilon}$, для якої 16 антиермітових елементів $\underset{\frown}{s}_{\mathrm{AB}}, \widehat{\varepsilon}$ мають вигляд

$$\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{A}}\gamma^{\mathrm{B}} = -\underset{\smile}{s}_{\mathrm{BA}}, \quad \mathrm{A, B} = \overline{1,6},$$
$$\widehat{\varepsilon} = \frac{i}{2}\gamma^{0}, \quad \gamma^{5} \equiv \gamma^{1}\gamma^{3}\widehat{C}, \quad \gamma^{6} \equiv i\gamma^{1}\gamma^{3}\widehat{C} \tag{41}$$

і задовольняють стандартним комутаційним співвідношенням алгебри SO(6) для антиермітових генераторів

$$[\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AB}}, \underset{\smile}{s}_{\mathrm{CD}}] = \delta_{\mathrm{AC}}\underset{\smile}{s}_{\mathrm{BD}} + \delta_{\mathrm{CB}}\underset{\smile}{s}_{\mathrm{DA}} + \delta_{\mathrm{BD}}\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AC}}$$
$$+\delta_{\mathrm{DA}}\underset{\smile}{s}_{\mathrm{CB}}, \quad [\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AB}}, \widehat{\varepsilon}] = 0, \ \mathrm{A, B, C, D} = \overline{1,6}, \tag{42}$$

а 16 ермітових генераторів $\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{AB}}$ мають вигляд

$$\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{AB}} = i\gamma^{0}\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AB}} \tag{43}$$

і задовольняють наступним $\widehat{\varepsilon}\cdot\mathrm{SO(6)}$ комутаційним співвідношенням

$$[\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{AB}}, \tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{CD}}] = i\gamma^{0}(\delta_{\mathrm{AC}}\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{BD}} + \delta_{\mathrm{CB}}\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{DA}}$$
$$+\delta_{\mathrm{BD}}\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{AC}} + \delta_{\mathrm{DA}}\tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{CB}}). \tag{44}$$

Алгебра $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO(6)} \oplus \mathrm{SO(6)} \oplus \widehat{\varepsilon}$ є максимальною чисто матричною симетрією рівняння Дірака у представленні ФВ (11), частина генераторів якої має вигляд операторів Паулі – Гюрші – Ібрагімова. Образами елементів A_{32} у ПД-представленні, тобто симетріями стандартного рівняння Дірака (3+) з ненульовою масою, будуть оператори $V_{+}^{-1}(\underset{\smile}{s}_{\mathrm{AB}}, \widehat{\varepsilon}, \tilde{\underset{\smile}{s}}_{\mathrm{AB}})V_{+}$ (де V_{+}, V_{+}^{-1} задані у (10)). Певна частина елементів A_{32} у ПД-представленні вже не чисто матричні, а нелокальні (псевдодиференціальні) оператори.

Фізично важливими наслідками застосування ERCD-алгебри до аналізу симетрій рівнянь Дірака та ФВ є одержані нами зображення спіну 1 та 3/2 груп Лоренца та Пуанкаре (а також багато інших симетрій), відносно яких інваріантне рівняння Дірака (3+) з ненульовою масою.

В якості перших фізично важливих симетрій рівняння ФВ (11) вкажемо на дві різні реалізації зображення $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ алгебри SO(1,3) групи Лоренца, відносно яких інваріантне рівняння Дірака у представленні ФВ (11):

$$\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{I}} = \{\underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{I}} = \frac{i}{2}\gamma^{k}\gamma^{4}, \ \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\gamma^{m}\gamma^{n}\},$$
$$\gamma^{4} \equiv \gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}, \tag{45}$$

$$\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{II}} = \{\underset{\smile}{s}_{01}^{\mathrm{II}} = \frac{i}{2}\gamma^{2}\widehat{C}, \ \underset{\smile}{s}_{02}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\gamma^{2}\widehat{C}, \ \underset{\smile}{s}_{03}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\gamma^{0},$$
$$\underset{\smile}{s}_{12}^{\mathrm{II}} = \frac{i}{2}, \ \underset{\smile}{s}_{31}^{\mathrm{II}} = \frac{i}{2}\gamma^{0}\gamma^{2}\widehat{C}, \ \underset{\smile}{s}_{23}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\gamma^{0}\gamma^{2}\widehat{C}\}, \tag{46}$$

$i\gamma^{0}$ – спільний для цих генераторів оператор Казіміра. Легко встановити, що генератори кожного з наборів, як (45), так і (46), задовольняють комутаційним співвідношенням (39). Крім того, елементи з (45) комутують з усіма елементами (46), що дозволяє зробити наступне твердження. Рівняння ФВ (11) також є інваріантним відносно двох різних зображень тензорно-скалярного $(1,0)\otimes(0,0)$ та незвідного векторного (1/2,1/2) групи SO(1,3), побудованих з генераторів (45), (46) наступним чином

$$\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{TS}} = \{\underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{TS}} = \underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{I}} + \underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{II}}, \ \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{TS}} = \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{I}} + \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{II}}\},$$
$$\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{V}} = \{\underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{V}} = -\underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{I}} + \underset{\smile}{s}_{0k}^{\mathrm{II}}, \ \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{V}} = \underset{\smile}{s}_{mn}^{\mathrm{TS}}\}. \tag{47}$$

Для рівняння Дірака (3+) генераторами відповідних симетрій будуть образи $V_{+}^{-1}\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{TS}}V_{+}$, $V_{+}^{-1}\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{V}}V_{+}$ операторів (47).

На основі (47) знаходимо Пуанкаре-симетрії спіну 1 рівняння ФВ (11), див., наприклад, [13].

Легко переконатись, що генератори

$$\begin{cases} \widehat{p}_{0} = -i\gamma^{0}(\vec{\gamma}\vec{p} + m) = -iH_{D}, \ \ p_{n} = \partial_{n}, \\ j_{ln} = x_{l}\partial_{n} - x_{n}\partial_{l} + \underset{\smile}{s}_{ln} + \widehat{\underset{\smile}{s}}_{ln}, \\ j_{0k} = x_{0}\partial_{k} - x_{k}\widehat{p}_{0} + \underset{\smile}{s}_{0k} + \dfrac{\widehat{\underset{\smile}{s}}_{0l}\partial_{n}\varepsilon_{kln}}{\omega + m}, \end{cases} \tag{48}$$

де оператори $\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}$ та $\widehat{\underset{\smile}{s}}_{\mu\nu} = V_{+}^{-1}\underset{\smile}{s}_{\mu\nu}^{\mathrm{II}}V_{+}$ – образи генераторів $\underset{\sim}{s}^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}$ (46) у ПД-представленні – мають вигляд

$$\underset{\sim}{s}_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right],\ \widehat{\underset{\sim}{s}}_{\mu\nu}=\{\widehat{\underset{\sim}{s}}_{01}=\frac{1}{2}i\gamma^2\widehat{C},$$
$$\widehat{\underset{\sim}{s}}_{02}=-\frac{1}{2}\gamma^2\widehat{C},\ \widehat{\underset{\sim}{s}}_{03}=-\gamma^0\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+m}{2\omega}=-\frac{H_{\mathrm{D}}}{2\omega}, \quad (49)$$
$$\widehat{\underset{\sim}{s}}_{12}=\frac{i}{2},\ \widehat{\underset{\sim}{s}}_{31}=\frac{iH_{\mathrm{D}}}{2\omega}\gamma^2\widehat{C},\ \widehat{\underset{\sim}{s}}_{23}=\frac{H_{\mathrm{D}}}{2\omega}\gamma^2\widehat{C}\}.$$

Вони комутують з оператором рівняння (3+), задовольняють таблиці комутаційних співвідношень генераторів групи Пуанкаре і реалізують Бозе-зображення спіну 1 цієї групи, тобто задають Пуанкаре-симетрію спіну 1 рівняння Дірака (3+).

Інші реалізації Бозе-зображення спіну 1 групи Пуанкаре, відносно яких інваріантне рівняння (3+) слід шукати у вигляді

$$p_\mu=\partial_\mu,\quad j_{\mu\nu}=x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu+\left\{\begin{matrix}\underset{\sim}{s}_{0k}\pm\widehat{\underset{\sim}{s}}_{0k}\\ \underset{\sim}{s}_{mn}+\widehat{\underset{\sim}{s}}_{mn}\end{matrix}\right\}, \quad (50)$$

або

$$p_\mu=\partial_\mu,\quad j_{\mu\nu}=x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu+\underset{\sim}{s}_{\mu\nu}+V_+^{-1}\underset{\sim}{s}^{\mathrm{I}}_{\mu\nu}V_+. \quad (51)$$

З використанням обох спінових доданків (і (50), і (51)) для рівняння Дірака можливо також довести Пуанкаре-симетрії спіну 3/2.

4. Висновки

Рівняння КДК (8-компонентне), яке було введено в розгляд у нашій роботі [4], записано у представленні ФВ. Знайдено явний вигляд унітарного оператора, який переводить рівняння КДК (1) із ПД-представлення у канонічне ФВ-представлення. Одержано загальні розв'язки рівняння КДК у обох цих представленнях, які описують октети ферміонів з ненульовою масою.

Одержано Пуанкаре-симетрії спіну 1 стандартного, 4-компонентного рівняння Дірака з ненульовою масою (і відповідні симетрії рівняння ФВ). Симетрії, вперше одержані нами в [10–12] для випадку, коли маса $m=0$, тепер доведено для випадку довільної маси. За рахунок більшого числа компонент симетрії рівняння КДК значно багатші за симетрії рівнянь Дірака та ФВ, як це продемонстровано на розглянутих у роботі [4] прикладах. Додаткові симетрії рівняння КДК отримуються не лише з симетрій рівняння Дірака, див., наприклад, процедуру в [4].

Наведений вище розгляд наочно демонструє, що рівняння КДК (після введення в нього відповідних взаємодій) має цікаву перспективу широкого використання у якості релятивістського рівняння для опису ферміонних та бозонних мультиплетів елементарних частинок і суперсиметричних мультиплетів.

Концепція ERCD-алгебри має самостійне значення.

Література

1. Кривський І.Ю., Симулик В.М. Про необхідність канонічного представлення Фолді – Вотхойзена для спінорного поля // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 16–22.
2. Кривський І.Ю., Симулик В.М. Про релятивістську квантову механіку частинки довільних маси і спіну у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 36–44.
3. Кривський І.Ю., Симулик В.М., Тимчик Р.В. Про лагранжевий підхід та динамічні змінні для спінорного поля у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2009. – Вип. 25. – С. 175–186.
4. Кривский И.Ю., Ломпей Р.Р., Симулик В.М. О симметриях комплексного уравнения Дирака – Кэлле-

ра // ТМФ. − 2005. – Т. 143, №1. – С. 64–82.
5. Kruglov S.I. Dirac – Kahler Equation // Int. J. Theor. Phys. – 2002. – V. 41, N4. – P. 653-687.
6. Foldy L., Wouthuysen S. On the Dirac Theory of Spin ½ Particles and its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. – 1950. – V.78, №1. – P. 29–36.
7. Recami E., Ziino G. About New Space-Time Symmetries in Relativity and Quantum Mechanics // Nuov. Cim. A. – 1976. – V.33, №2. – P. 205–215.
8. Незнамов В.П. К теории взаимодействующих полей в представлении Фолди – Вотхойзена // Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2006. Т. 37, Выпуск 1. – С. 153–182.
9. Foldy L. Synthesis of Covariant Particle Equations // Phys. Rev. – 1956. – V.102, №2. – P. 568–581.
10. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Bosonic symmetries of the massless Dirac equation // Adv. Appl. Cliff. Algebras. – 1998. – Vol. 8, № 1. – P. 69–82.
11. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Relationship Between the Maxwell and Dirac Equations: Symmetries, Quantization, Models of Atom // Rep. Math. Phys. – 2002. – Vol. 50, №3. – P. 315–328.
12. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Classical Electrodynamical Aspect of the Dirac Equation // Electromagnetic Phenomena. – 2003. – Vol. 9, №1. – P. 103–114.
13. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Extended real Clifford – Dirac algebra and bosonic symmetries of the Dirac equation with nonzero mass // arXiv: 0908.3106. math-ph. 21 Aug. 2009. – 5 p.

ON THE SOLUTIONS AND SYMMETRIES OF THE DIRAC AND THE COMPLEX DIRAC – KAHLER EQUATIONS IN THE FOLDY – WOUTHUYSEN REPRESENTATION

V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky

Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Department of the Theory of Elementary Interactions
88000, Uzhhorod, 21 Universitetska Str.
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

The canonical form of the complex Dirac – Kahler equation in the Foldy – Wouthuysen representation is found. The general solutions of this equation are obtained both in the Pauli – Dirac and Foldy – Wouthuysen representations. The physical meaning of the different solutions, related to the different complete sets of observables, for the Dirac and complex Dirac – Kahler equations is analyzed. Having the important physical meaning new symmetries of the Dirac equation with nonzero mass are found.

О РЕШЕНИЯХ И СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА – КЕЙЛЕРА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ – ВОТХОЙЗЕНА

В.М. Симулик, И.Ю. Кривский

Институт электронной физики НАН Украины, отдел теории элементарных взаимодействий
88000, Ужгород, ул. Университетская, 21
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

Найдена каноническая форма комплексного уравнения Дирака – Кейлера в представлении Фолди – Вотхойзена. Получены общие решения этого уравнения как в представлении Паули – Дирака, так и в каноническом представлении Фолди – Вотхойзена. Проанализирован физический смысл различных решений уравнений Дирака и комплексного уравнения Дирака – Кейлера, связанных с различными полными наборами наблюдаемых величин. Найдены новые физически важные симметрии уравнения Дирака с ненулевой массой.