Uzhhorod University Scientific Herald. Series Physics. Issue 21. – 2007

ТЕРМОДИНАМІЧНІ ФУНКЦІЇ СИСТЕМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

Л. Ф. Блажиєвський, М. В. Шльонзак

Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, 79005, Львів
e-mail: marjana@ktf.franko.lviv.ua

Розглянуто рівноважну статистичну систему N релятивістських безспінових частинок з масою m та зарядом e й електромагнітного поля, породженого зарядами. Розраховано статистичну суму однієї частинки при врахуванні її власного поля. Проаналізовано отримані результати та проведено їх порівняння з виразами квантової електродинаміки.

Вступ

У працях [1, 2] було розвинуто функціональне формулювання статистичної механіки, у якому всі співвідношення теорії виражаються лише через лаґранжеві змінні. В основі методу — певна модифікація фейнманівського інтегрування за траєкторіями конфігураційного простору. Метод континуального інтегрування є альтернативою до звичайного операторного підходу і в багатьох випадках дозволяє значною мірою спростити обчислення, використати більш наочні зображення при розгляді модельних прикладів та розробці можливих варіантів виходу за рамки звичайної теорії збурень. Застосування методу континуального інтегрування до широкого кола проблем квантової механіки, теорії поля та статистичної фізики викладено в монографії [3].

Варто відзначити, що ефективність континульного підходу особливо зростає в тих випадках, коли застосування операторного підходу є складним. Зокрема це стосується релятивістських систем. Як відомо, лаґранжіани таких систем мають неквадратичний характер залежності від швидкостей частинок та містять доданки, залежні від добутку координат і швидкостей. Остання особливість обумовлена врахуванням ефектів запізнення взаємодії. Оскільки для переходу до канонічних змінних потрібно розв’язати систему рівнянь $\mathbf{p}_i = \partial L / \partial \mathbf{v}_i$, то зазвичай для цього використовують теорію збурень по c^{-2}. Проте обмежитися головними за c^{-2} членами можна лише у випадку невеликої кількості частинок N [4]. У статистичній теорії ряд теорії збурень обривати не можна, тому використання канонічного формалізму є доволі складним.

Ми розглядаємо систему N релятивістських безспінових частинок з масою m та зарядом e, які взаємодіють між собою через електромагнітне поле. З використанням континуального підходу в [5] було отримано інтеграл дії евклідової теорії для системи заряджених частинок. Відзначимо, що результат узгоджується з електродинамікою Уіллера–Фейнмана, у якій взаємодія між частинками описується півсумою запізнюючих і випереджуючих потенціалів. Також було запропоновано спосіб часткового перенормування маси частинок, який пов’язаний з урахуванням у теорії власного поля зарядів.

Отримані результати

Враховуючи власне поле зарядженої частинки, як було показано в [5], в евклідовій теорії інтеграл дії для однієї частинки буде мати вигляд:

$$S = S_0 + S_1, \tag{1}$$

де

$$S_0 = -\int_0^\beta d\tau mc^2\left(1+\frac{u^2(\tau)}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2 e^{i\hbar\int_\tau^{\tau'} d\tau''\mathbf{u}(\tau'')\mathbf{k}}\frac{1}{c^2}l_{\mu\nu}^{\perp}u_\mu(\tau)u_\nu(\tau')\left[D_k(\tau-\tau')-\delta(\tau-\tau')\right] \tag{3}$$

$$D_k(\tau-\tau') = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n(\tau-\tau')}\left[1+\left(\frac{\omega_n}{\hbar ck}\right)^2\right]^{-1} \tag{4}$$

— температурна функція Ґріна фотонів,

$$\nu_k^2 = \frac{4\pi e^2}{Vk^2}; \quad l_{\mu\nu}^{\perp} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta},$$

$\delta(\ldots)$ — дельта-функція Дірака, β — обернена температура, $\hbar$ — стала Планка.

Зазначимо, що S_1 описує вплив на частинку її власного поля, причому його неадитивний характер відображає запізнення взаємодії частинки з полем. Далі рахуємо статистичну суму для однієї частинки з інтегралом дії (1):

$$Z = \frac{1}{V}\int d^3rC^3\int D^3u(\tau)e^{S_0+S_1}\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right), \tag{5}$$

Вводимо позначення:

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r} - \hbar\int_\tau^\beta d\tau''\mathbf{u}(\tau''); \quad \mathbf{F_k}(\tau) = \left[\frac{\mathbf{k}}{k}\mathbf{u}(\tau)\right]; \quad e^{i\mathbf{kr}(\tau)}\mathbf{F_k}(\tau) = \mathbf{X_k}(\tau) \tag{6}$$

Тоді S_1 набуде вигляду:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2\frac{1}{c^2}\mathbf{X_k}(\tau)\mathbf{X_{-k}}(\tau')\left[D_k(\tau-\tau')-\delta(\tau-\tau')\right] \tag{7}$$

Надалі для обчислень статистичної суми Z обмежимося класичним наближенням. При $\hbar = 0$ з (4) і (6) будемо мати:

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}; \quad \mathbf{X_k}(\tau) = e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{F_k}(\tau); \quad D_k(\tau-\tau') = \frac{1}{\beta}.$$

Тоді

$$S_1 = \frac{1}{2\beta}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\nu_k^2}{c^2}\int_0^\beta d\tau\mathbf{F_k}(\tau)\int_0^\beta d\tau'\mathbf{F_{-k}}(\tau') - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\nu_k^2}{c^2}\int_0^\beta d\tau\mathbf{X_k}(\tau)\mathbf{X_{-k}}(\tau) \tag{8}$$

Якщо підставити (8) у (5), то видно, що $\int_0^\beta d\tau\mathbf{F_k}(\tau) = 0$. Таким чином, формула (5) набуде вигляду:

$$Z = \frac{1}{V}\int d^3rC^3\int D^3u(\tau)\exp\left\{S_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\nu_k^2}{c^2}\int_0^\beta d\tau\mathbf{X_k}(\tau)\mathbf{X_{-k}}(\tau)\right\}\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right) \tag{9}$$

Використовуючи ґауссівське функціональне представлення, знайдемо, що

$$Z = B\int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\beta d\tau \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}(\tau)\right\}Z(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)), \tag{10}$$

де

$$Z(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)) = \int \frac{d^3 r}{V} C^3 \int D^3 u(\tau) e^{S_0} \exp\left\{\sum_{\mathbf{k}} \frac{\nu_k}{c}\int_0^\beta d\tau (\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau)\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau))\right\} \tag{11}$$

Далі $Z(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau))$ зображаємо у вигляді кумулянтного розвинення за степенями $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$. Враховуючи лише перші два кумулянти, матимемо:

$$Z(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)) = Z_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\nu_k^2}{c^2}\int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\mu}(\tau)\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\nu}(\tau')\Pi_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau-\tau')\right\}. \tag{12}$$

Тут ми ввели позначення:

$$\Pi_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau-\tau') = \frac{1}{Z_0}\int d\mathbf{r} C^3 \int D\mathbf{u}(\tau) e^{S_0} F_{\mathbf{k}}^{\mu}(\tau) F_{\mathbf{k}}^{\nu}(\tau')\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right) \tag{13}$$

Інтеграли (5) і (13) не є континуальними інтегралами за вінерівською мірою (функціонал $S_0[u]$ неквадратичний за змінною інтегрування $u(\tau)$). Можливий спосіб розрахунку таких континуальних інтегралів розвинено у працях [1, 2]. Показано, що результат інтегрування потрібно регуляризувати. Ця розмірна регуляризація передбачає віднімання доданків, пропорційних до $[\delta(0)]^n$ ($n = 1, 2, \ldots; \delta(0)$ — дельта-функція Дірака). Зокрема можна показати, що виконуються рівності:

$$C\int D^3 u(\tau) e^{S[u]}\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta H(p)},$$

$$C\int D^3 u(\tau)(\ldots, \mathbf{u}(\tau_1), \ldots) e^{S[u] - i\hbar\int_0^\beta d\tau \mathbf{p}\mathbf{u}(\tau)} = \left(\ldots, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(\tau)}, \ldots\right)\exp\left(-\int_0^\beta d\tau H(\mathbf{p}-\varphi(\tau))\right)\Bigg|_{\varphi=0}.$$

Тут $H(\mathbf{p})$ — функція Гамільтона, яка зіставляється дії $S[u]$. Застосування цих співвідношень у нашому випадку приводить до результатів:

$$Z_0 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3 p e^{-\beta\varepsilon_p}, \tag{14}$$

$$\Pi_k^{\mu\nu}(\tau-\tau') = l_{\mu\nu}^{\perp}\left[U_k \delta(\tau-\tau') + \Pi_k^{\perp}\right], \tag{15}$$

$$U_k = \left\langle \frac{1}{\varepsilon_p}\left[1 - \frac{p^2 c^2}{3\varepsilon_p^2}\right]\right\rangle_0, \quad \Pi_k^{\perp} = \left\langle \frac{1}{3}\frac{p^2 c^2}{\varepsilon_p^2}\right\rangle_0 \tag{16}$$

Символ $\langle(\ldots)\rangle\big|_0$ означає усереднення $(\ldots)$ за релятивістським максвеллівським розподілом.

Використавши ці результати у формулах (10)–(12), отримаємо

$$Z = Z_0 B\int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\beta d\tau R_k^\mu(\tau)R_{-k}^\nu(\tau)(\delta_{\mu\nu} - l_{\mu\nu}^\perp U_k v_k^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} v_k^2 \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' R_k^\mu(\tau)R_{-k}^\nu(\tau') l_{\mu\nu}^\perp \Pi_k^\perp\right\} \tag{17}$$

Цей інтеграл ґауссівський. Прийнявши до уваги обумовлену раніше регуляризацію, знайдемо, що його можна представити у вигляді:

$$Z = Z_0 B\int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\beta d\tau \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}(\tau)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau' \mathbf{R}_k^\mu(\tau)\mathbf{R}_{-k}^\nu(\tau) l_{\mu\nu}^\perp \frac{\frac{\kappa^2}{k^2}\Pi_k^\perp}{1-\frac{\kappa^2 U_k}{k^2}}\right\} \tag{18}$$

Провівши розрахунки, отримаємо

$$Z = Z_0 \exp\left\{-\sum_{\mathbf{k}}\left[\frac{\kappa^2\Pi_k^\perp}{k^2} + \ln\left(1+\frac{\kappa^2\Pi_k^\perp}{k^2-\kappa^2 U_k}\right)\right]\right\} \tag{19}$$

Обчисливши суму за k, знайдемо

$$Z = Z_0 e^{-\frac{V\kappa_e^3}{6\pi}} = Z_0\exp\left(-\frac{2}{3}e^2\beta\sqrt{\kappa}\sqrt{\frac{4\pi e^2\beta}{V}}\right) \tag{20}$$

Оскільки $V\to\infty$, то бачимо, що $Z\to Z_0$. Тобто власне поле заряду не впливає на його термодинамічні характеристики.

Література

1. Л. Ф. Блажиевский, ДАН УССР. 5, 46 (1986).
2. Л. Ф. Блажиевский, ТМФ. 6, 409 (1986).
3. В. Н. Попов, Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. (Атомиздат, Москва, 1976).
4. Б. А. Трубников, В. В. Косачев, ЖЭТФ. 54, 939 (1968).
5. М. В. Шльонзак, Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика 17, 26 (2005).

THERMODYNAMIC FUNCTIONS OF THE RELATIVISTIC PLASMA

L. V. Blagyyevskyy, M. Shlonzak

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12 Drahomanov St., UA-79005, Lviv
e-mail: marjana@ktf.franko.lviv.ua

A system of *N* relativistic spinless particles with charge *e* and mass *m* in statistical equilibrium and electromagnetic field are considered. We obtained partition function for one particle with taking into account it own field. The results are analysed and comparied with the expressions of quantum electrodynamics.