

# ОДНА ПРОСТА МОДЕЛЬ НАДКРИТИЧНОГО АТОМА У МОДИФІКОВАНІЙ КВАНТОВІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

**В.Ю. Лазур, О.К. Рейтій, В.В. Бондарчук, В.К. Рейтій**

Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина, 54

e-mail: [lazur@univ.uzhgorod.ua](mailto:lazur@univ.uzhgorod.ua),

[reiti@univ.uzhgorod.ua](mailto:reiti@univ.uzhgorod.ua)

Для однієї простої моделі протяжного джерела (ядра) отримано точні нормовані розв'язки рівняння Дірака з скалярно-векторним потенціалом кулонівського типу, а також трансцендентне рівняння, що визначає рівні основного та збуджених електронних станів в докритичній області  $Z < Z_{cr}$ . Знайдено рівняння для величини критичного заряду ядра, при якому рівень опускається в нижній енергетичний континуум. В рамках логарифмічного наближення одержано явні аналітичні вирази для енергії дискретних рівнів та критичного заряду. Виявлено сильний вплив лоренцової структури потенціалів взаємодії на критичний заряд та дискретний спектр ферміона в скалярному та векторному кулоноподібних полях.

В останні роки виник значний інтерес до вивчення поведінки квантових систем ферміонів при наявності разом взятих електромагнітного (векторного) та скалярного зовнішніх полів. Такі системи володіють низкою неординарних рис, суттєво відмінних від тих, котрі властиві ферміонам в присутності одного лише електромагнітного поля. Так, наприклад, на відміну від електромагнітного, скалярне поле діє однаково як на частинки, так і на античастинки. Тому картина рівнів енергії ферміонів, що взаємодіють зі скалярним та векторним (наприклад, кулонівським) полями одночасно, може істотно відрізнятися від звичної нам картини спектра релятивістської кулонівської задачі. Це, зокрема, проявляється в тому, що у випадку взаємодії масивних ферміонів з чисто скалярним зовнішнім полем дискретні спектри частинок і античастинок симетричні відносно нульового рівня ( $E = 0$ ).

Зазначимо також, що спін-орбітальні взаємодії у скалярному та векторному полях мають протилежні знаки. У векторному полі спіни орієнтуються у напрямку  $[\vec{F}, \vec{p}]$ , де  $\vec{F}$  – сила, що діє на частинку,  $\vec{p}$  – її імпульс, а в скалярному полі – в напрямку  $-\vec{F}$ . Ці міркування дають

наочне пояснення того факту, що в скалярному полі рівень  $j = 3/2$ ,  $l = 1$  лежить нижче рівня  $j = 1/2$ ,  $l = 1$ , а у векторному полі навпаки.

Математичні дослідження явищ, що відбуваються у сильних векторних (наприклад електричних) та скалярних полях, адекватні фізичній ситуації, доцільно проводити на основі точних розв'язків релятивістських хвильових рівнянь у зовнішньому полі. При цьому на відміну від взаємодії з електричним полем, яка вводиться у вільне рівняння Дірака мінімальним чином, як часова компонента 4-потенціалу  $A_\mu$  (векторний зв'язок), урахування взаємодії масивного ферміона зі скалярним зовнішнім полем  $S$  здійснюється за допомогою заміни  $m_0 c^2 \rightarrow m_0 c^2 + S$  (скалярний зв'язок). Тоді при наявності статичного скалярного  $S(\vec{r})$  і електростатичного  $V(\vec{r})$  зовнішніх полів рівняння Дірака набуває вигляду

$$\left[ c \vec{\alpha} \hat{p} + \beta (m_0 c^2 + S(\vec{r})) - (E - V(\vec{r})) \right] \Psi(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  і  $\beta$  – стандартні матриці Дірака,  $\hat{p}$  – оператор імпульсу,  $E$  і  $m_0$

– повна енергія і маса спокою частинки. Підкреслимо, що  $S(\vec{r})$  є лоренц-скаляр, а  $V(\vec{r})$  – нульова компонента лоренц-вектора.

Для простої моделі взаємодії ферміона з скалярним та векторним зовнішніми полями кулонівського типу:

$$V(r) = -\hbar c \frac{\alpha_v}{r}, \quad S(r) = -\hbar c \frac{\alpha_s}{r} \quad (2)$$

розв'язки і спектр рівняння Дірака були знайдені в працях [1,2]; в рівностях (2) через  $\alpha_s$  та  $\alpha_v$  позначено скалярну і електростатичну константи зв'язку. Дана модель часто використовується в якості вихідного наближення при релятивістському описанні спектрів "екзотичних" воднево-подібних (ВП) систем, наприклад [3,4], лептоатомів, взаємодія між складовими частинами котрих здійснюється через обмін квантами двох різних типів полів. А саме, якщо кулонівська взаємодія зумовлена обміном віртуальним фотоном (квантом електромагнітного поля), то відповідальна за скалярний зв'язок взаємодія лепто атома з ядром може бути викликана обміном віртуальною нейтральною частинкою зі спіном 0. Головним кандидатом на цю роль є скалярний  $\sigma$ -мезон, на користь існування котрого в теорії є серйозні аргументи (див., наприклад, [5] і наявні там посилання). До того ж порівняно недавно з'явилися повідомлення [6,7] двох експериментальних груп про спостереження аномально широкого скалярного резонансу в каскадах нелептонних розпадів важких ( $D$ ,  $B$  та  $J/\Psi$ ) мезонів. Звернемо ще увагу на те, що виявлений у згаданих експериментах скалярний мезон має досить велику масу ( $M_\sigma = 390 \text{ MeV}$  [6-8]) і, тому, скалярний потенціал  $S(r)$ , що відповідає обміну такою частинкою (в подальшому потенціал одномезонного обміну) насправді є короткодійним (юкавського типу). Тим не менш, як було відмічено в працях [1-4], уже в рамках такої порівняно простої моделі зі скалярно-векторним варіантом взаємодії, як розглядувана модель (2), можна виявити багато цікавих особливостей енергетичного спектра лептоатомів, котрі зберігаються і при

більш реалістичному розгляді. Одна з важливих переваг даної моделі полягає в тому, що вона допускає точне розв'язання рівняння Дірака (1) у термінах відомих спеціальних функцій (вироджених гіпергеометричних функцій) [2-4]. Ці розв'язки можуть бути використані в якості базису для побудови різного роду уточнень, котрі враховують як "реалістичну" (юкавську) форму потенціалу одномезонного обміну  $S(r)$ , так і ефекти руху та структури ядра, а також радіаційні поправки. Цим, мабуть, пояснюється значна увага (див., наприклад, [9,10]), яку привертає до себе останнім часом релятивістська задача про рух ферміона у зовнішніх скалярному та електричному полях кулонівського типу (2).

Додаткові стимули до вивчення подібних задач з'явилися недавно у теорії сильних взаємодій – квантовій хромодинаміці (КХД) і квантовій електродинаміці (КЕД) надсильних кулонівських полів. У першому випадку мова йде про моделі будови змішаних мезонів (КХД-аналогів ВП-атомів), що складаються, наприклад, з одного легкого антикварка  $\bar{q}$  і одного важкого кварка  $Q$  ( $Q\bar{q}$ -мезони (див., наприклад, [11-13])). Розглядаючи в наближенні нескінченно важкого кварка  $Q$  рівняння Дірака як рівняння руху для одного легкого антикварка  $\bar{q}$ , можна вивчити (подібно картині ВП-атомів) ряд важливих аспектів теорії важко-легких кварк-антикваркових систем таких, як релятивістську динаміку легкого антикварка  $\bar{q}$  у зовнішньому полі важкого кварка  $Q$ , лоренц-структуру далекодіючої (утримуючої) частини  $Q\bar{q}$ -взаємодії, тонку структуру спектра змішаних мезонів, вплив на спектр спонтанного порушення кіральної симетрії, тощо. Як відомо з КХД [11-13], на малих відстанях внаслідок явища асимптотичної свободи основний внесок в  $Q\bar{q}$ -взаємодію дає звичайний кулонівський потенціал одноглюонного обміну  $V(r) = -4\alpha_s \hbar c / (3r)$ , де  $\alpha_s$  – константа сильної взаємодії. Зі зростанням відстані основною стає скалярна утримуюча взаємодія (конфайнмент), "точний" вигляд кот-

рої поки не встановлений. Базовані на перших принципах КХД – розрахунки на решітках [13] виділяють на великих відстанях лінійний (скалярний) конфайнмент  $S(r) = \hbar c \sigma r$ , де  $\sigma$  – натяг струни. Всі інші взаємодії, зрозуміло, важливі при більш ретельному описі властивостей мезонів, проте вони є малими взаємодіями у порівнянні з скалярним потенціалом, котрий зв'язує кварки в мезони. Ми не будемо зупинятися на цих питаннях більш детально, так як вони з достатньою повнотою висвітлені в огляді [14].

Особливий інтерес до розглядуваного кола задач виник недавно у КЕД. Як добре відомо (див. [3,15]), в електродинаміці надсильних кулонівських полів суттєвими параметрами теорії є критичний заряд ядра  $Z_{cr}$  і критична відстань  $R_{cr}$  в системі двох важких ядер, що зіштовхуються, при досягненні котрих основний рівень електронного спектра опускається до межі нижнього континууму, після чого (тобто при  $Z = Z_1 + Z_2 > Z_{cr}$  або  $R < R_{cr}$ ) стає можливим спонтанне народження позитронів з вакууму. Експериментальне спостереження цього ефекту означало б перевірку статусу КЕД і рівняння Дірака не в традиційному напрямку надвисоких енергій та малих відстаней, а у новій області надсильних полів. Проте розпочаті майже чверть століття тому в GSI (Дармштадт, Німеччина) на прискорювачі важких іонів UNILAS експерименти з пошуку названого фундаментального процесу не дали позитивного результату. У зв'язку з такою ситуацією рядом авторів (наприклад [2,16]) було розглянуто різні модифікації КЕД та їх вплив на ефект спонтанного народження позитронів. Зокрема, якщо дотримуватися погляду авторів відомої монографії [3] (див. також [2]), що в умовах експериментів GSI (тобто в надсильних кулонівських полях) у взаємодії електрона з ядром (поряд з кулонівським) з'являється додатковий юкавський скалярний потенціал  $S(r)$  одномезонного обміну, то першочергового значення набуває питання про його вплив на критичний заряд  $Z_{cr}$  і критичну відстань  $R_{cr}$ . При

цьому якісна сторона питання може бути з'ясована в моделі з кулоноподібною скалярною взаємодією (2).

Відмітимо, на кінець, що спінорне рівняння (1) зі змішаним скалярно-векторним зв'язком цікаве також з погляду його можливих застосувань в теорії гадронних атомів [17]. В принципі, не виключено, що це ж рівняння може виявитись корисним і для опису деяких ефектів у фізиці твердого тіла (наприклад, у двозонних напівпровідниках [18]). Враховуючи, що у майбутньому інтерес до перерахованих вище фізичних застосувань моделі (2) без сумніву буде зростати, видається доцільною постановка релятивістської кулонівської задачі для рівняння Дірака зі скалярним та векторним потенціалами кулонівського типу.

Структура роботи наступна. Перший розділ має допоміжний характер: він містить постановку задачі та короткий аналіз особливостей руху релятивістського електрона в зовнішньому скалярно-векторному полі (2) точкового джерела (ядра). В другому розділі розглянуто розв'язок і спектр рівняння Дірака зі змішаною лоренц-структурою потенціалу взаємодії для електрона в полі ядра з зарядом  $Z > 137$ , коли в наближенні точкового заряду відбувається "падіння на центр". Урахування скінчених розмірів ядра, яке приводить до регуляризації скалярного та векторного кулоноподібних потенціалів (2) при  $r \rightarrow 0$ , дозволяє пройти точку  $Z = 137$  аж до "критичного" значення  $Z_{cr}$ , при якому енергія стану досягає межі нижнього континууму  $E = -m_0 c^2$ . Зокрема, для однієї простої моделі протяжного джерела отримано трансцендентне рівняння, що неявно визначає рівні енергії основного та збудженого електронних станів в області  $Z < Z_{cr}$ . Детально розглянуто випадок гранично малого радіуса обрізування кулоноподібних векторного та скалярного полів, коли параметр  $\Lambda = \ln(\lambda_c/r_N) \gg 1$ ; тут  $\lambda_c = \hbar/m_0 c$  – комптонівська довжина хвилі. При цьому в задачі з'являється малий параметр  $\Lambda^{-1}$ , що дозволяє знайти асимптотичні

формули для критичного заряду ядра та енергії основного рівня в області  $r_N \ll \lambda_c$ . В третьому розділі отримано рівняння для визначення величини критичного заряду  $Z_{cr}$ , при якому основний рівень електронного спектра опускається до межі нижнього континууму і стає можливим спонтанне народження позитронів із вакууму. Досліджено залежність  $Z_{cr}$  від величини константи скалярного зв'язку  $\alpha_s$  і виявлено сильний вплив лоренцової структури потенціалів взаємодії на критичний заряд ядра та енергетичний спектр спірної частинки в зовнішньому скалярно-векторному полі.

### 1. Точний розв'язок рівняння Дірака зі скалярним та векторним потенціалами кулонівського типу

В цьому розділі ми розглянемо дану задачу в тому наближенні, в якому можна нехтувати розмірами та структурою ядра, і вважатимемо, що скалярно-векторний потенціал взаємодії визначається формулами (2) при всіх значеннях  $0 \leq r < \infty$ . Враховуючи центральну симетрію потенціальної енергії ферміона в такому полі, зручно перейти в сферичну систему координат з центром на ядрі. Відповідно цьому будемо шукати хвильову функцію  $\Psi(\vec{r})$  стаціонарного стану (в стандартному зображенні) у вигляді

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{jlm}(\vec{n}) \\ (-1)^{l-l'+1} G(r)\Omega_{jl'm}(\vec{n}) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $\vec{n} = \vec{r}/r$ ,  $\Omega_{jlm}(\vec{n})$  – кульовий спірор [19],  $j = 1/2, 3/2, \dots$  – повний кутовий момент,  $l = j \pm 1/2$  – орбітальний кутовий момент,  $l' = 2j - l$ ,  $m = -j, -j+1, \dots, j$  – проекція повного кутового моменту на вісь квантування.

Підставляючи вираз (3) в рівняння (1), отримаємо наступну систему рівнянь для радіальних функцій:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} + \frac{k}{r} F - \frac{1}{\hbar c} [E - V(r) + m_0 c^2 + S(r)] G &= 0, \\ \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r} G + \frac{1}{\hbar c} [E - V(r) - m_0 c^2 - S(r)] F &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $k = \pm(j + 1/2)$ .

У відповідності з характером поведінки радіальних функцій  $F(r)$  та  $G(r)$  в асимптотичних областях великих і малих  $r$  розв'язки системи рівнянь (4) зі скалярно-векторним варіантом взаємодії (2) будемо шукати у вигляді [3,4]:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{m_0 c^2 + E} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 + Q_2), \\ G &= -\sqrt{m_0 c^2 - E} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (5)$$

де уведено позначення

$$\begin{aligned} \rho &= 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m_0^2 c^4 - E^2} / (\hbar c), \\ \gamma &= \sqrt{k^2 - \alpha_v^2 + \alpha_s^2}. \end{aligned}$$

Скінчений при  $\rho \rightarrow 0$  розв'язок системи рівнянь (4) можна подати в термінах виродженої гіпергеометричної функції  $F(a, b; z)$  за допомогою зображень (5) та наступних рівностей

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - \chi, 2\gamma + 1; \rho), \\ Q_2 &= -BF(\gamma + 1 - \chi, 2\gamma + 1; \rho), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\chi = (\alpha_v E + \alpha_s m_0 c^2) / (\hbar c \lambda)$ . Поклавши в одному з рівнянь для функцій  $Q_1$  і  $Q_2$   $\rho = 0$ , знайдемо зв'язок між сталими  $A$  і  $B$ :

$$B = \frac{\hbar c \gamma \lambda - \alpha_v E - \alpha_s m_0 c^2}{\hbar c k \lambda - \alpha_v m_0 c^2 - \alpha_s E} A. \quad (7)$$

Із умови скінченності радіальних хвильових функцій  $F(r)$  і  $G(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  отримуємо рівняння для можливих значень енергії:

$$\frac{\alpha_v E + \alpha_s m_0 c^2}{\hbar c \lambda} = n_r + \gamma, \quad (8)$$

де  $n_r$  – ціле невід’ємне число, причому

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & k < 0; \\ 1, 2, 3, \dots, & k > 0. \end{cases}$$

Для зв’язаних станів ( $E < m_0 c^2$ ) хвильова функція (3) повинна бути нормована умовою  $\int |\Psi|^2 d\vec{r} = 1$ ; звідси випливає умова проміжного нормування для радіальних функцій:

$$\int_0^\infty (F^2 + G^2) dr = 1. \quad (9)$$

Виконавши інтегрування, отримаємо наступну формулу для спільної нормувальної сталої:

$$A = \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma(2\gamma+n_r+1)(N-k)}{2m_0 c^2 N n_r!}}, \quad (10)$$

де  $N = (\alpha_v m_0 c^2 + \alpha_s E) / (\hbar c \lambda)$ .

Зібравши разом отримані формули, випишемо кінцеві вирази для нормованих радіальних хвильових функцій:

$$\left. \begin{matrix} F \\ G \end{matrix} \right\} = \pm A \sqrt{m_0 c^2 \pm E} \rho^\gamma e^{-\rho/2} [F(-n_r, 2\gamma+1; \rho) \mp \mp n_r (N-k)^{-1} F(-n_r+1, 2\gamma+1; \rho)] \quad (11)$$

(верхні знаки відносяться до  $F$ , нижні – до  $G$ ).

Розв’язуючи рівняння (8) відносно  $E$ , знаходимо наступний вираз для дискретних рівнів енергії [3,4]:

$$E = m_0 c^2 \frac{\pm(n_r + \gamma) \sqrt{n_r(n_r + 2\gamma) + k^2} - \alpha_v \alpha_s}{\alpha_v^2 + (n_r + \gamma)^2}. \quad (12)$$

Формула (12) визначає так звану тонку структуру рівнів енергії релятивістського водневоподібного атома і є узагаль-

ненням відомої формули Дірака-Зоммерфельда [19] на випадок скалярно-векторної взаємодії кулонівського типу. Надалі ми будемо брати додатний знак перед коренем в (12) і розглядати тільки електронні рівні; друга вітка спектру енергій приводить при  $\alpha_s = 0$  до побічного розв’язку рівняння (8).

Поклавши в (12)  $n_r = 0$ ,  $k = -1$ , знайдемо енергію електрона на найнижчому рівні:

$$E_0 = m_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha_v^2 + \alpha_s^2} - \alpha_v \alpha_s}{1 + \alpha_s^2}. \quad (13)$$

Обговоримо зміст формули (13). Як видно, із зростанням константи векторного зв’язку  $\alpha_v = Z\alpha$  (де  $Z$  – заряд ядра атома,  $\alpha \approx 1/137$  – стала тонкої структури релятивістського ВП-атома) енергія основного стану  $E_0$  зменшується, перетинає нуль при  $\alpha_v = 1$  і обривається при значенні  $\alpha_v = \sqrt{1 + \alpha_s^2}$  (для збуджених станів це відбувається при  $\alpha_v = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ ). Продовження формули (13) на область  $\alpha_v > \sqrt{1 + \alpha_s^2}$  приводить до комплексних значень енергії та осциляції хвильових функцій при  $r \rightarrow 0$ , що відповідає не допустимій в релятивістській теорії ситуації "падіння на центр". Поява цієї труднощі пов’язана з ідеалізацією задачі, а саме з нехтуванням скінченими розмірами ядра. При малих значеннях заряду  $Z$  ядро можна вважати точковим, тобто врахування його радіуса  $r_N$  дає дуже малі поправки до енергії рівнів. Однак, коли  $\alpha_v$  наближається до  $\sqrt{1 + \alpha_s^2}$ , ситуація кардинально змінюється.

Врахування скінчених розмірів ядра знімає відмічену аномалію в поведінці рівнів. Першими це помітили Померанчук і Смородінський [20] в 1945 р. Ввівши в розгляд скінчений радіус ядра  $r_N$ , ці автори показали, що розв’язок звичайного рівняння Дірака (з векторним типом взаємо-

дії) для обрізаного на малих відстанях кулонівського потенціалу існує у всій області від  $Z=0$ ,  $E=m_0c^2$  до  $Z=Z_{cr}(r_N)$ ,  $E=-m_0c^2$ , і оцінили величину критичного заряду  $Z_{cr}(r_N)$ , при якому енергія рівня  $1s_{1/2}$  досягає величини  $E=-m_0c^2$ . Причому виявилось, що із зростанням  $Z$  в області  $Z>137$  рівні енергії стають від'ємними і продовжують опускатися аж до межі нижнього континуума  $E=-m_0c^2$ . Аналогічна поведінка рівнів енергії електрона спостерігається і в розглядуваному нами випадку скалярно-векторної взаємодії при  $\alpha_V > \sqrt{1+\alpha_S^2}$ , однак перетин межі нижнього континуума  $E=-m_0c^2$  відбувається при значно більших значеннях критичного заряду  $Z_{cr}$ , ніж у чисто векторному випадку. Подальше обговорення питань, пов'язаних з рухом рівнів поблизу  $E=-m_0c^2$ , і розгляд методів визначення величини критичного заряду ми відкладемо до наступних розділів.

## 2. Дискретний спектр при $\alpha_V > \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$

Для знаходження енергетичного спектра електрона в кулонівському полі ядра з  $\alpha_V > \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$  необхідно поставити деяку граничну умову в нулі (що еквівалентно визначенню самоспряженого розширення оператора енергії [21]); лише після цього задача стає математично коректною [22,23]. Фізично постановка граничної умови в нулі означає обрізання потенціалів (2) на малих відстанях, тобто урахування скінчених розмірів ядра.

Припустимо, що  $V(r)$  і  $S(r)$  є кулоноподібними аж до поверхні ядра, а всередині ядра мають більш складний вигляд:

$$V(r) = \begin{cases} -\hbar c \frac{\alpha_V}{r}, & r > r_N, \\ -\hbar c \frac{\alpha_V}{r_N} f\left(\frac{r}{r_N}\right), & 0 \leq r \leq r_N, \end{cases} \quad (14)$$

$$S(r) = \begin{cases} -\hbar c \frac{\alpha_S}{r}, & r > r_N, \\ -\hbar c \frac{\alpha_S}{r_N} f\left(\frac{r}{r_N}\right), & 0 \leq r \leq r_N. \end{cases} \quad (15)$$

Тут  $f(x)$  – функція обрізування, яка враховує скінчені розміри ядра,  $0 \leq x = r/r_N \leq 1$ . Найчастіше використовуються дві найпростіші моделі обрізування [20,24,25]:

Модель I.  $f(x)=1$ , тобто прямокутне обрізування. Для векторного потенціалу це відповідає концентрації всього електричного заряду на поверхні ядра.

Модель II.  $f(x)=(3-x^2)/2$ , що відповідає у чисто векторному випадку рівномірному розподілу заряду по об'єму ядра.

Щоб знайти спектр рівняння Дірака з потенціалами (14), (15) і визначити величину критичного заряду  $Z_{cr}$ , необхідно розв'язати це рівняння всередині ( $0 \leq r \leq r_N$ ) і ззовні ( $r > r_N$ ) ядра, що у випадку моделі II вимагає при  $0 \leq r \leq r_N$  числових розрахунків. Ми обмежимося моделлю прямокутного обрізування обох потенціалів, для якої рівняння Дірака розв'язується в аналітичному вигляді. Більш реалістичний вибір форми потенціалу всередині ядра зводиться в основному до збільшення в 1,5 рази максимальних значень  $V(0)$  та  $S(0)$ , що мало відображається на кінцевих результатах (див., наприклад, чисто векторний випадок [20]). Перейдемо до описання процедури розв'язування системи рівнянь Дірака (4) при  $0 \leq r \leq r_N$ .

Виключаючи із системи (4) функцію  $G(r)$ , отримуємо рівняння для визначення  $F(r)$ :

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left[ K^2 - \frac{k(k+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (16)$$

Тут враховано, що  $V, S = const$  у всій внутрішній області  $0 \leq r \leq r_N$ , а стала

$$K = \sqrt{(E-V)^2 - (m_0c^2 + S)^2} / (\hbar c).$$

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$F(r) = \sqrt{r} \left[ \tilde{A} J_{|k+1/2|}(Kr) + \tilde{B} N_{|k+1/2|}(Kr) \right], \quad (17)$$

де  $J_n(x)$  і  $N_n(x)$  – відповідно функції Бесселя і Неймана цілочислового порядку  $n$  [26]. Виразивши  $G(r)$  через  $F(r)$  за допомогою (4) та використавши рекурентні співвідношення для функцій  $J_n(x)$  і  $N_n(x)$ , отримаємо відповідний вираз для нижньої компоненти:

$$G(r) = \text{sgn } k \frac{\hbar c K \sqrt{r}}{E - V + m_0c^2 + S} \left[ \tilde{A} J_{|k-1/2|}(Kr) + \tilde{B} N_{|k-1/2|}(Kr) \right]. \quad (18)$$

З умови скінченності  $F(r)$  при  $r = 0$  випливає, що  $\tilde{B} = 0$ . Тоді кінцеві формули для радіальних функцій у внутрішній області  $0 \leq r \leq r_N$  набувають більш простого вигляду:

$$F(r) = \tilde{A} \sqrt{r} J_{|k+1/2|}(Kr), \quad (19)$$

$$G(r) = \tilde{A} \text{sgn } k \frac{\hbar c K \sqrt{r}}{E - V + m_0c^2 + S} J_{|k-1/2|}(Kr). \quad (20)$$

У зовнішній області  $r > r_N$  потенціали  $V(r)$  і  $S(r)$  є кулоноподібними, і розв'язок системи Дірака (4), експоненційно згасаючий на нескінченності, визначається виразами типу (5), а функції  $Q_1$  та  $Q_2$  виражаються через вироджені гіпергеометричні функції аналогічно (6). Однак тепер необхідно враховувати обидва знаки величини  $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha_v^2 + \alpha_s^2}$ . Тому замість (6) маємо зображення

$$Q_j = C_j \Psi(\chi_j, 2\gamma + 1; \rho), \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

де  $\chi_1 = \gamma - \chi$ ,  $\chi_2 = \chi + 1$ ,  $C_1$  і  $C_2$  – деякі сталі, а  $\Psi(a, b; z)$  – іррегулярний розв'язок виродженого гіпергеометричного рівняння; регулярний розв'язок  $F(a, b; z)$  цього рівняння тут неприйнятний внаслідок його зростання на нескінченності. Підставляючи (5) і (21) в (4) та використовуючи рекурентні співвідношення між виродженими гіпергеометричними функціями [26], знаходимо зв'язок між сталими  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\frac{C_2}{C_1} = k + \frac{\alpha_v m_0 c^2 + \alpha_s E}{\hbar c \lambda} = k + N. \quad (22)$$

Співвідношення між сталими  $\tilde{A}$  і  $C_1$  встановлюємо шляхом зшивання виразів для  $F(r)$ , знайдених у внутрішній (див. (19)) і зовнішній (формули (5), (21)) областях, в точці  $r = r_N$ :

$$\frac{\tilde{A}}{C_1} = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + E}{r_N}} \frac{\rho_N^\gamma e^{-\rho_N/2}}{J_{|k+1/2|}(Kr_N)} \left[ \Psi(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N) + (k + N) \Psi(\chi_2, 2\gamma + 1; \rho_N) \right], \quad (23)$$

де  $\rho_N = 2\lambda r_N$ . Сталу  $C_1$  знайдемо (з точністю до фазового множника) з умови проміжного нормування (9):

$$|C_1|^2 = \left[ \frac{2m_0 c^2 v \Gamma(2\gamma + 1) \Gamma(-2\gamma)}{\lambda \Gamma(\chi_2) \Gamma(\chi_2 - 2\gamma)} \right]^{-1/2}, \quad (24)$$

де  $\varepsilon = E/m_0 c^2$ ,  $v = \xi C(C - k) - \gamma(2\varepsilon C + 1)$ ,  $\xi = \psi(\chi_2 - 2\gamma) - \psi(\chi_2)$ ,  $C = k + N$  (математичні деталі обчислення даного інтегралу наведено в Додатку).

Зшивання відношення  $G/F$  для внутрішнього та зовнішнього розв'язків на краю ядра (при  $r = r_N$ ) дає рівняння

$$-\frac{\sqrt{m_0 c^2 - E}}{\sqrt{m_0 c^2 + E}} \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \Big|_{r=r_N} = A_k, \quad (25)$$

яке визначає спектр рівняння Дірака в області  $-m_0c^2 \leq E \leq m_0c^2$ . Тут  $A_k$  – відношення функцій (19), (20) при  $r = r_N$ :

$$A_k = \operatorname{sgn} k \frac{\hbar c K}{E - V + m_0c^2 + S} \frac{J_{|k-1/2|}(Kr_N)}{J_{|k+1/2|}(Kr_N)}. \quad (26)$$

За допомогою рекурентного співвідношення [26]

$$\frac{d\Psi(a, b; z)}{dz} = \frac{a}{z} [(a - b + 1)\Psi(a + 1, b; z) - \Psi(a, b; z)]$$

перетворимо рівняння (25) до більш компактного вигляду:

$$\rho_N \frac{\Psi'(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N)}{\Psi(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N)} = \frac{A_k(k + t\alpha_-) - kt - \alpha_+}{A_k + t} - \gamma, \quad (27)$$

де  $t = -\sqrt{(m_0c^2 - E)/(m_0c^2 + E)}$ ,

$\alpha_{\pm} = \alpha_v \pm \alpha_s$ , штрих означає похідну по  $\rho_N$ , а параметри  $\lambda$  і  $\chi_1$  ті ж, що і в (21).

Отримане точне рівняння (27) для енергії рівнів має вельми нетривіальну аналітичну структуру і для прямих розрахунків навряд чи придатне. Тому доцільно спробувати по можливості спростити вираз (27), принаймні в деяких граничних випадках. Як впливає з розгляду значно більш повно вивченої релятивістської кулонівської задачі у чисто векторному випадку [20], спрощення можливі при використанні наближення гранично малого радіуса обрізування кулонівського поля. Подивимось, як працює це наближення у випадку рівняння (27).

Якщо екстраполювати на область  $Z > 137$  залежність  $r_N = R_0 A^{1/3}$ , вважаючи (як і для важких ядер)  $A = 2,5Z$ ,  $R_0 = 1,1\phi$ , то радіус ядра  $r_N$  виявляється малим у порівнянні з комптонівською довжиною хвилі електрона (наприклад, при  $Z = 170$  маємо  $r_N \approx 0,02$  в одиницях  $\hbar/m_0c$ ), і можна використати наближення  $K \approx \sqrt{\alpha_+ \alpha_-}/r_N$ . При цьому у виразі (26)

зникає залежність від енергії  $E$ , і він набуває більш простої форми

$$A_k = \operatorname{sgn} k \sqrt{\frac{\alpha_+}{\alpha_-}} \frac{J_{|k-1/2|}(\sqrt{\alpha_+ \alpha_-})}{J_{|k+1/2|}(\sqrt{\alpha_+ \alpha_-})}. \quad (28)$$

Подальші спрощення рівняння (27) виникають при використанні розкладу функції  $\Psi(a, b; z)$  поблизу нуля:

$$\Psi(a, b; z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + \dots \quad (29)$$

Обчисливши логарифмічну похідну функції (29), використавши властивості  $\Gamma$ -функцій і підставивши одержаний результат в (27), отримаємо рівняння

$$(2\lambda r_N)^{2\gamma} = \frac{2\gamma \sin(2\pi\gamma) \Gamma^2(2\gamma) \Gamma(1 + \chi - \gamma)}{\pi \Gamma(1 + \chi + \gamma)} \times \frac{\sin[\pi(\chi - \gamma)] (A_k \alpha_- - k + \gamma)(t\alpha_- + k + \gamma)}{\sin[\pi(\chi + \gamma)] (A_k \alpha_- - k - \gamma)(t\alpha_- + k - \gamma)}, \quad (30)$$

зручне для аналізу станів дискретного спектра при  $\alpha_v < \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ , коли величина  $\gamma$  – дійсна. Легко помітити, що при  $r_N \rightarrow 0$ ,  $\gamma \neq 0$  формула (30) переходить в (8), і спектр енергій описується рівністю (12).

У випадку  $\alpha_v > \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ , коли  $\gamma = i\theta$  стає чисто уявною величиною, приходимо до трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}\{\theta \ln(2\lambda r_N) - \arg[\Gamma(1 + 2i\theta)/\Gamma(-\chi + i\theta)]\} = \frac{(A_k \alpha_- - k)(t\alpha_- + k) - \theta^2}{\theta \alpha_- (A_k + t)}, \quad (31)$$

яке разом з (30) неявно визначає рівні енергії електрона як для основного, так і для збуджених станів з урахуванням скінченності розмірів ядра згідно моделі I.

Рівняння (30), (31) значно простіші за точне рівняння (26), однак їх розв'язання все ж вимагає числових розрахунків. На рис. 1 подано числові



розв'язки рівнянь (30) і (31) для основного

для спостереження спонтанного народження позитронів потрібно зближувати

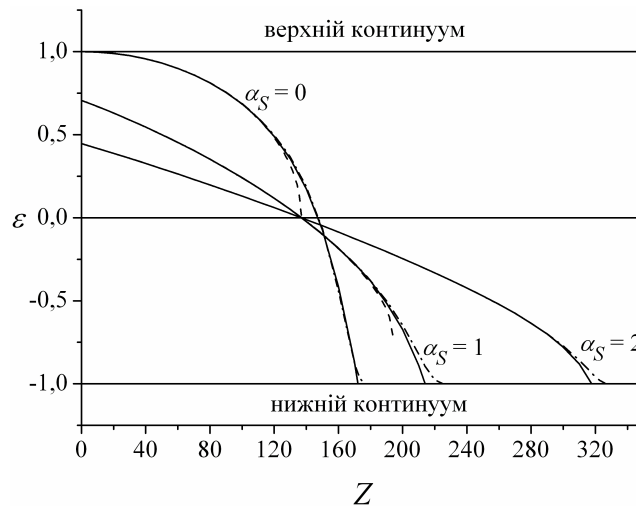


Рис. 1. Залежність енергії ( $\varepsilon = E/mc^2$ ) основного стану від заряду  $Z$  ядра атома для значень константи скалярного зв'язку  $\alpha_s = 0, 1, 2$ : суцільні лінії – числові розв'язки рівнянь (30), (31); пунктирні і штрих-пунктирні лінії – результати розрахунків за формулами (13) і (40), відповідно

$1s_{1/2}$  стану при різних значеннях сталої скалярного зв'язку  $\alpha_s$ . Проаналізуємо рух енергетичних рівнів в залежності від заряду  $Z = 137\alpha_v$  спочатку для чисто векторного випадку ( $\alpha_s = 0$ ). Починаючи з  $Z = 0$ , рівень енергії опускається до осі  $Z$ , яку перетинає при  $Z = 137$ , а далі розв'язки рівняння Дірака для точкового ядра втрачають зміст (пунктирна лінія). Енергетичний рівень електрона у водневоподібному атомі із скінченими розмірами ядра перетинає поріг  $E = 0$  при  $Z \approx 147$  (суцільна лінія) і при  $Z_{cr} \approx 172$  опускається в нижній континуум, де стає квазістаціонарним. У випадку  $\alpha_s = 1$  та  $\alpha_s = 2$  рівень досягає нуля при  $Z \approx 137$ , а опускається до межі нижнього континуума при значеннях заряду  $Z_{cr} \approx 214$  та  $Z_{cr} \approx 318$ , відповідно.

Таким чином, діраківський вакуум в присутності сильних векторного та скалярного кулоноподібних полів є нестабільним по відношенню до народження електрон-позитронних пар при значно більшому критичному заряді, ніж у чисто векторному випадку. Це означає, що якщо скалярна взаємодія в "надкритичному" атомі виявиться досить суттєвою ( $\alpha_s \geq 1.1$ ), то

ядра з сумарним зарядом  $Z_1 + Z_2 > Z_{cr} \geq 222$ . Отримання стабільних ядер з такими зарядами на даний час, на жаль, неможливе.

### 3. Логарифмічне наближення

Хоча при одержанні рівнянь (30) і (31) вже використовувалось наближення  $r_N \ll \lambda_c$  ( $\lambda_c = \hbar/m_0c = 3,86 \cdot 10^{-11}$  см – комптонівська довжина хвилі), деякі аналітичні оцінки для рівнів енергії і величини критичного заряду  $Z_{cr}$  можна отримати, якщо, слідуючи роботам [25], накласти додаткову умову  $|\ln(r_N / \lambda_c)| \gg 1$ , що приводить до появи великого параметра  $\Lambda = -\ln(r_N / \lambda_c) \gg 1$ . Хоча для реальних розмірів ядра  $r_N \sim 10^{-12}$  см значення цього параметра не дуже велике ( $\Lambda \approx 3,5$ ), таке наближення, як ми побачимо нижче, дає правильну загальну картину руху рівнів зі зміною  $Z$ .

Отже, перейдемо до технічного оформлення використовуваного тут наближення ( $\Lambda \gg 1$ ). При  $r_N \rightarrow 0$  значення  $\alpha_v$  близьке до  $\sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$  і  $\theta \rightarrow 0$ . Тому в правій частині рівняння (31) можна покласти  $\alpha_v = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ , причому згідно (28)

$$A_k = \frac{k J_{|k-1/2|}(|k|)}{\tilde{\alpha} J_{|k+1/2|}(|k|)}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2} - \alpha_s. \quad (32)$$

Оскільки при  $\theta \rightarrow 0$

$$\varphi = 2\theta\psi(1) - \arg \Gamma(-\chi + i\theta) + O(\theta^2),$$

де  $\psi(z)$  – логарифмічна похідна  $\Gamma$ -функції, то рівняння (31) зводиться до кінцевого вигляду:

$$\frac{\pi n'}{\theta} = \frac{1}{A_k \tilde{\alpha} - k} + \frac{1}{i\tilde{\alpha} + k} - \frac{1}{\theta} \arg \Gamma(-\chi + i\theta) + 2\psi(1) - \ln(2\lambda r_N), \quad (33)$$

де  $n' = n_r + (1 - \text{sgn } k)/2$  – ціле число, яке нумерує рівні енергії. При  $\theta \rightarrow +0$  функція  $\omega(x, \theta) = \arg \Gamma(x + i\theta)$  має розриви поблизу точок  $x = -n$ , в яких розташовано полюси  $\Gamma$ -функції. А саме, якщо  $|x + n| \gg \theta$ , то з точністю до членів порядку  $\theta^2$

$$\omega(x, \theta) = \begin{cases} \theta\psi(x), & x > 0, \\ -(n+1)\pi + \theta\psi(x), & -(n+1) < x < -n, \end{cases} \quad (34)$$

де  $\psi(x)$  – логарифмічна похідна  $\Gamma$ -функції. В безпосередньому околі полюса  $x = -n$

$$\omega(x, \theta) = -\left( n\pi + \text{arctg} \frac{x+n}{\theta} \right). \quad (35)$$

В області  $\theta \ll |x+n| \ll 1$  формули (34) і (35) зшиваються між собою і обидві дають

$$\omega(x, \theta) = -[(n+\nu)\pi + \theta'(x+n) + \dots], \quad (36)$$

де  $\nu = 0$  для  $x > -n$  і  $\nu = 1$  для  $x < -n$ .

Покладемо спочатку  $E = -m_0 c^2$ . Тоді  $\chi \rightarrow -\infty$  і з (33), (34), використовуючи асимптотику дігамма-функції  $\psi(z)$  [26]

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + \dots \quad (z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi), \quad (37)$$

отримаємо для визначення  $\theta_{cr} = \sqrt{\alpha_{ver}^2 - \alpha_s^2 - k^2}$  ( $\alpha_{ver} = Z_{cr} \alpha$ ) співвідношення

$$\frac{\pi n'}{\theta_{cr}} = \Lambda + \frac{1}{A_k \tilde{\alpha} - k} + 2\psi(1) - \ln(2\tilde{\alpha}), \quad (38)$$

звідки випливає

$$\alpha_{ver} = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2} + \frac{\pi^2 n'^2}{2\sqrt{k^2 + \alpha_s^2} \Lambda^2} + O(\Lambda^{-3}). \quad (39)$$

З формули (39) видно, що при  $\Lambda \gg 1$  головний член асимптотики залежить тільки від радіуса обрізування  $r_N$ , а залежність від конкретного вигляду функції обрізування  $f(x)$  з'являється тільки в наступних за порядком членах розкладу (39).

З формул (33), (35) можна знайти енергію  $E$  в явному вигляді:

$$E = m_0 c^2 \frac{(n_r + g) \sqrt{\alpha_v^2 - \alpha_s^2 + (n_r + g)^2} - \alpha_v \alpha_s}{\alpha_v^2 + (n_r + g)^2}, \quad (40)$$

де  $g = \theta \text{ctg}(\theta\Lambda)$ .

Маючи перед собою аналітичний вираз для енергії рівня (40), цікаво прослідкувати, яким чином врахування скінчених розмірів ядра знімає особливість формули (13) при  $\alpha_v = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ . Після заміни  $\theta \rightarrow -i\gamma$ ,  $g \rightarrow \gamma \text{cth}(\gamma\Lambda)$  формула (40) залишається справедливою і для  $\alpha_v < \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ . В області  $\alpha_v < \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$  (при умові  $\Lambda\gamma \gg 1$ )  $\text{ct h}(\gamma\Lambda)$  швидко прямує до одиниці і формула (40) переходить в (13). З іншого боку, точка  $\alpha_v = \sqrt{k^2 + \alpha_s^2}$ ,  $\gamma = 0$  вже не є особливою для функції  $E(Z)$ . Чим меншим є радіус ядра, тим крутіше крива рівня входить в нижній континуум.

На рисунку 1 штрих-пунктирною лінією показано енергію рівня, розраховану за формулою (40). Як видно з рисунка, наближена аналітична формула (40) відтворює числові розрахунки (суцільна лінія) для енергії  $E$  майже у всьому діапазоні зарядів  $Z$ , за винятком невеликої області поблизу межі нижнього континууму  $E = -m_0c^2$ , де розбіжність між результатами сягає до 5%.

#### 4. Критичний заряд ядра. Ефективний розмір системи при $Z > 137$

Розглянемо розв'язки системи рівнянь Дірака (4) при  $E = -m_0c^2$  і визначимо відповідні критичні значення заряду  $Z_{cr}$ . Виключаючи з системи (4) функцію  $G(r)$ , отримуємо рівняння

$$F'' - \frac{V' - S'}{V - S} F' - \left[ \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{V' - S'}{V - S} - \frac{V - S}{\hbar^2 c^2} (2m_0c^2 + V + S) \right] F = 0. \quad (41)$$

В області  $r > r_N$  розв'язок збіжний на нескінченності виражається (з точністю до константи) через функцію Макдональда уявного індексу [26]:

$$F(r) = K_{2i\theta} \left( \sqrt{\frac{8\alpha_- r}{\lambda_c}} \right), \quad G(r) = \frac{rF' + kF}{\alpha_-}. \quad (42)$$

У внутрішній області  $0 \leq r \leq r_N$  (для моделі I функції обрізування векторного та скалярного потенціалів (14), (15)) розв'язок системи (4) задається формулами (19), (20), в яких слід зробити заміну  $E \rightarrow -m_0c^2$ .

Зшиваючи знайдені тут розв'язки в точці  $r = r_N$ :

$$\left( \frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=r_N-0} = \left( \frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=r_N+0}, \quad (43)$$

отримуємо трансцендентне рівняння, яке визначає (при фіксованому  $r_N$ ) критичний заряд:

$$\operatorname{sgn} k K_{r_N} \frac{J_{|k-1/2|}(Kr_N)}{J_{|k+1/2|}(Kr_N)} = \frac{x}{2} \frac{K'_{2i\theta}(x)}{K_{2i\theta}(x)} + k, \quad (44)$$

де  $x = \sqrt{8\alpha_- r_N / \lambda_c}$ . Вважаючи, що параметр  $r_N$  малий порівняно з комптонівською довжиною хвилі електрона  $\lambda_c$ , використаємо асимптотичне зображення для функції Макдональда при малих значеннях аргументу:

$$K_{2i\theta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\theta(2\pi\theta)}} \sin P + \dots, \quad (45)$$

$$P = \arg \Gamma(1 + 2i\theta) - \theta \ln(2\alpha_- r_N / \lambda_c). \quad (46)$$

З врахуванням тільки головних членів в розкладі функції Макдональда та її похідної і в наближенні  $K \approx \sqrt{\alpha_+ \alpha_-} / r_N$  рівняння (44) набуває вигляду:

$$\theta \operatorname{ctg} P = k - \operatorname{sgn} k \sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2} \frac{J_{|k-1/2|}(\sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2})}{J_{|k+1/2|}(\sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2})}. \quad (47)$$

Рівняння (47) є трансцендентним відносно критичного значення константи векторного зв'язку  $\alpha_V = \alpha_{Vcr} = Z_{cr} \alpha$ , де  $Z_{cr}$  – критичний заряд ядра атома. Числові розв'язки рівняння (47) для кількох нижніх станів показано на рис. 2 у вигляді залежності від константи скалярного зв'язку  $\alpha_S$ . З рисунка видно, що для кожного з рівнів функція  $Z_{cr}(\alpha_S)$  має мінімум при  $\alpha_S \sim 0,1-0,2$ , а далі різко зростає із збільшенням  $\alpha_S$ . Це означає, що вакуум квантової електродинаміки в сильному скалярно-векторному полі кулонівського типу повинен проявляти нестійкість по відношенню до утворення електрон-позитронних пар при суттєво більших значеннях критичного заряду, ніж в чисто векторному випадку. Пунктирною лінією

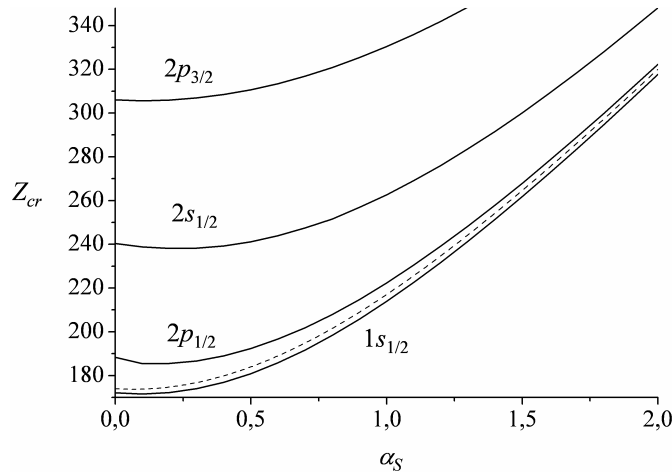


Рис. 2. Залежність критичного заряду  $Z_{cr}$  від константи скалярного зв'язку  $\alpha_s$  для кількох нижніх рівнів

показано значення критичного заряду для основного стану, обчисленого за допомогою формули (38) (радіус ядра  $r_N$  вважався рівним  $0,02 \hbar/m_0 c$ ). Як видно, для найнижчого рівня енергії логарифмічне наближення досить добре відтворює числові розрахунки; різниця між результатами не перевищує 1-2 заряди.

Цікавим також є питання про локалізацію електрона, енергія якого лежить на межі смуги неперервного спектра  $E \rightarrow -m_0 c^2$ . В рамках стандартної чисто векторної моделі Герштейном і Зельдовичем [24] спочатку було висунуто припущення про те, що при  $Z \rightarrow Z_{cr}$  відбувається делокалізація поляризації вакууму, тобто поляризаційний заряд йде на як завгодно великі відстані від ядра. Основним аргументом при цьому було те, що при  $r \rightarrow \infty$  хвильова функція зв'язаного стану  $F(r) \sim e^{-\lambda r}$ , і тому при  $E \rightarrow -m_0 c^2$  електронна хмара, здавалося б, делокалізується. Однак, подальший аналіз показав, що це не так (див., наприклад, [25]). Аналогічна ситуація спостерігається і в нашому випадку; якщо в формулі (42) скористатися асимптотикою функції Макдональда при великих значеннях аргументу [26]:

$$K_{2i\theta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{4\theta^2 + 1/4}{2x} + \dots \right), \quad (48)$$

то видно, що  $F(r) \sim \exp(-\sqrt{8\alpha_s r/\lambda_c})$  при  $r \rightarrow \infty$  і  $E = -m_0 c^2$ . Причиною настільки різкої відмінності в поведінці хвильової функції електрона при  $E = \pm m_0 c^2$  є залежність ефективного потенціалу від знаку  $E$ . Ефективний потенціал задачі веде себе як  $-\hbar c(\alpha_v E/m_0 c^2 + \alpha_s)/r$  при  $r \rightarrow \infty$ , тобто при  $\alpha_s = 0$  є потенціалом притягання для  $E = m_0 c^2$  і відштовхування для  $E = -m_0 c^2$  (на достатньо великих відстанях від ядра). При  $\alpha_s \neq 0$  жоден з рівнів не досягає межі верхнього неперервного спектра, і тому порівнювати ці два граничні випадки ( $E = +m_0 c^2$  і  $E = -m_0 c^2$ ) немає змісту.

Таким чином, оскільки стан електрона при  $E \rightarrow -m_0 c^2$  залишається зв'язаним і не "розбухає", то відповідають і висунуті в [24] аргументи на користь делокалізації поляризації вакууму. З огляду на складність питання про розміри зв'язаного стану в скалярно-векторному випадку розглянемо його з кількісного боку. Для цього знайдемо середній радіус системи:

$$\bar{r} = \int_0^\infty (F^2 + G^2) r dr. \quad (49)$$

Інтеграл (49) обчислено в Додатку (див. формули (Д1), (Д2), (Д8), (Д9)), і він має вигляд (в одиницях  $\hbar/m_0 c$ ):

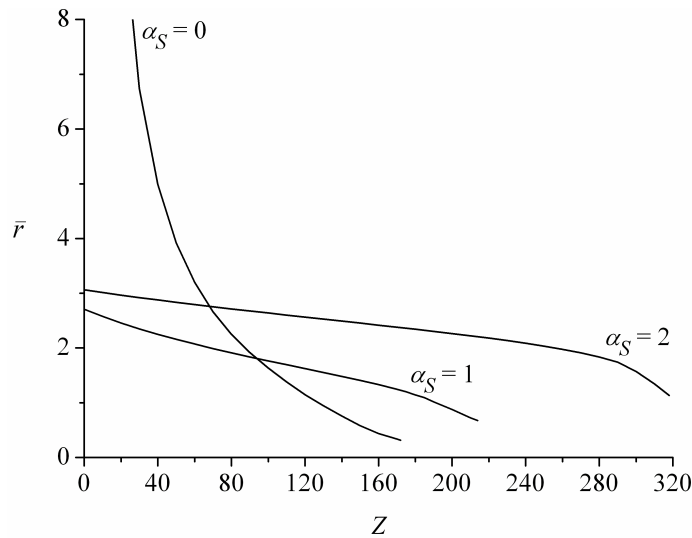


Рис. 3. Середній радіус (в одиницях  $\hbar/m_0c$ ) основного стану як функція заряду ядра  $Z$  при  $\alpha_s = 0, 1, 2$

$$\bar{r} = \{2C(C-k)(\chi\xi - 2\gamma) - \gamma(1 + \varepsilon C)(2\chi + 1) + \xi C[\varepsilon C(C - 2k) - k]\} / (2\lambda\nu). \quad (50)$$

Побудовану за формулою (50) залежність  $\bar{r}$  від заряду для основного стану при  $\alpha_s = 0, 1, 2$  зображено на рис. 3. З рисунка видно, що із збільшенням заряду ефективний розмір системи зменшується і на межі нижнього енергетичного континуума  $E = -m_0c^2$  залишається скінченим. Дійсно, при  $E \rightarrow -m_0c^2$  вираз (50) дає значення середнього радіуса на межі нижнього континууму:

$$\bar{r} = \frac{4\theta^2 + 1}{10(\alpha_v - \alpha_s)} \frac{3\alpha_v - 2\alpha_s + \tau(3 - 2k)}{2(2\alpha_v - \alpha_s) + \tau(1 - 2k)}, \quad (51)$$

де  $\tau = (1 - k) / (\alpha_v - \alpha_s)$ . Для основного стану при  $\alpha_s = 0, 1, 2$  відповідно маємо  $\bar{r} = 0, 32, 0, 67, 1, 12$ , тобто, як вже відмічалось вище, зв'язаний стан не делокалізується.

### Висновки

Дана стаття є першою спробою описати теорію надкритичних атомів в рамках нестандартної (модифікованої) квантової електродинаміки, яка, крім електростатичної (векторної) взаємодії, враховує

також і скалярний тип взаємодії. Зокрема, отримано наступні важливі результати:

1. Розв'язано питання про вплив скалярного зв'язку на величину критичного заряду ядра  $Z_{cr}$  та дискретний спектр рівняння Дірака при  $Z < Z_{cr}$ . З цією метою коротко проаналізовано особливості руху релятивістського ферміона в скалярно-векторному кулонівському полі точкового джерела. Такий аналіз показує, що формула тонкої структури справедлива до тих пір, поки  $\alpha_v^2 - \alpha_s^2 \leq k^2$ . Зокрема, для основного стану ( $k = -1$ ) і  $\alpha_s = 0$  це спостерігається, поки дискретний рівень не досягає нульового значення енергії при заряді  $Z_0 = 137$ . Продовження формули для енергії на область  $\alpha_v^2 - \alpha_s^2 > k^2$  приводить до комплексних значень енергії  $E$ , що відповідає недопустимому в релятивістській теорії "падінню на центр".

2. Проведено врахування скінчених розмірів ядра, яке призводить, як і в чисто векторному випадку, до регуляризації кулонівського потенціалу при  $r \rightarrow 0$  і дозволяє пройти точку  $\alpha_v^2 - \alpha_s^2 = k^2$  аж до "критичного" значення  $\alpha_{Vcr}$ , при якому енергія основного стану досягає межі нижнього континуума  $E = -m_0c^2$ .

3. Для однієї простої моделі протяжного джерела (ядра) отримано точні нормовані розв'язки рівняння Дірака з скалярно-

векторним потенціалом кулонівського типу, а також трансцендентне рівняння, яке визначає рівні основного та збуджених електронних станів в області  $Z < Z_{cr}$ .

4. Детально розглянуто випадок гранично малого радіуса обрізування кулоноподібних векторного та скалярного полів, коли параметр  $\Lambda = \ln(\lambda_c/r_N) \gg 1$ ; тут  $\lambda_c = \hbar/m_0c$  – комптонівська довжина хвилі. Це дозволило знайти асимптотичні вирази для критичного заряду ядра та енергії рівня в області  $r_N \ll \lambda_c$ . Як показує порівняння з числовими розв'язками відповідних трансцендентних рівнянь, дані наближені формули з досить хорошою точністю відтворюють точні результати для цих величин.

5. Окремо виділено випадок  $E = -m_0c^2$  та одержано трансцендентне рівняння для визначення критичного заряду, з числових розв'язків якого видно, що в основному стані критичний заряд різко зростає із збільшенням константи скалярного зв'язку  $\alpha_s$ . Отже, діраківський вакуум в присутності сильних векторного та скалярного кулоноподібних полів є нестабільним по відношенню до народження електрон-позитронних пар при значно більшому критичному заряді, ніж у чисто векторному випадку. Таким чином, якщо скалярна взаємодія виявиться досить суттєвою, то це може практично унеможливити постановку експериментів із виявлення спонтанного процесу народження електрон-позитронних пар.

#### Додаток

Для того, щоб знайти сталу нормування  $C_1$  для радіальних хвильових функцій  $F$  та  $G$  (див. розділ 2), а також середній радіус системи  $\bar{r}$  (див. розділ 4), необхідно обчислити інтеграл:

$$I_\mu = \int_0^\infty (F^2 + G^2)r^\mu dr, \quad \mu = 0, 1. \quad (D1)$$

Оскільки радіус ядра  $r_N \ll \lambda_c$  і область  $0 \leq r \leq r_N$  дає малий вклад в інтеграл

(D1), то вважатимемо, що радіальні хвильові функції  $F$  і  $G$  мають вигляд (5), (21) у всій області інтегрування  $0 \leq r < \infty$ . Тоді рівність (D1) набуває вигляду:

$$I_\mu = \frac{2m_0c^2}{(2\lambda)^{\mu+1}} [X_\mu(\chi_1, \chi_1) + C^2 X_\mu(\chi_2, \chi_2) + 2\epsilon C X_\mu(\chi_1, \chi_2)], \quad (D2)$$

$$X_\mu(a, b) = \int_0^\infty \Psi(a, 2\gamma+1; \rho) \times \Psi(b, 2\gamma+1; \rho) \rho^{2\gamma+\mu} e^{-\rho} d\rho, \quad (D3)$$

де  $\epsilon = E/(m_0c^2)$ ,  $C = k + N$ . Для обчислення інтегралу (D3) замінимо кожен з гіпергеометричних функцій інтегральним представленням [26]:

$$\Psi(a, c; \rho) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\rho t} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt.$$

Тоді інтегрування по  $\rho$  зводиться до обчислення наступного інтегралу:

$$\int_0^\infty \rho^{2\gamma+\mu} e^{-\rho(t+t'+1)} d\rho = \frac{\Gamma(\zeta)}{(t+t'+1)^\zeta}, \quad (D4)$$

де  $t$  і  $t'$  – змінні інтегрування,  $\zeta = 2\gamma + \mu + 1$ . Враховуючи (D4), інтегрування по  $t$  дасть гіпергеометрію  ${}_2F_1(\zeta, a; a + \mu + 1; t'/(t'+1))$ . Розкладаючи її в ряд та інтегруючи почленно, отримуємо гіпергеометричну функцію вищого порядку  ${}_3F_2$ :

$$X_\mu(a, b) = \frac{(\mu!)^2 \Gamma(\zeta) {}_3F_2(a, b, \zeta; a + \mu + 1, b + \mu + 1; 1)}{\Gamma(a + \mu + 1) \Gamma(b + \mu + 1)}. \quad (D5)$$

Для частинних випадків  $\mu = 0, 1$  і  $a, b = \chi_{1,2}$  формула (D5) допускає деякі спрощення:

$$X_0(\chi_1, \chi_1) = \frac{\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_1)\Gamma(\chi_1-2\gamma)} [\psi(\chi_1-2\gamma) - \psi(\chi_1)], \quad (D6)$$

$$X_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(\chi_2)\Gamma(\chi_2-2\gamma)}, \quad (D7)$$

$$X_1(\chi_1, \chi_1) = \frac{\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_1)\Gamma(\chi_1-2\gamma)} \{ (2\gamma-2\chi_1+1) \times \\ \times [\psi(\chi_1-2\gamma) - \psi(\chi_1)] - 4\gamma \}, \quad (\text{Д8})$$

$$X_1(\chi_1, \chi_2) = \frac{\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_1)\Gamma(\chi_2-2\gamma)} \{ -\gamma(2\gamma-2\chi_1+1) + \\ + \chi_1(\chi_1-2\gamma)[\psi(\chi_2-2\gamma) - \psi(\chi_2)] \}, \quad (\text{Д9})$$

де  $\psi(x)$  – дигамма-функція.  $X_\mu(\chi_2, \chi_2)$  отримується з  $X_\mu(\chi_1, \chi_1)$  заміною  $\chi_1 \rightarrow \chi_2$ .

### Література

1. H.G. Dosch, J.H.D. Jensen, V.F. Müller, *Physical Norwegica*, **5**, 2 (1971).
2. G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, *Z. Naturforsch. Teil*, **28A**, 1389 (1978).
3. W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1985).
4. W. Greiner, *Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1990).
5. A. Faessler, Th. Gutsche, M.A. Ivanov, V.E. Lyubovitskij, P. Wang, *Phys. Rev. D*, **68**,1 (2003).
6. E791 Collaboration E.M. Aitala et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 770 (2001).
7. Ning Wu., hep-ex/0104050.
8. N.A. Tornqvist, hep-ph/0008135; F.E. Close, N.A. Tornqvist, *J. Phys. G*, **34**, 249 (2002).
9. A.N. Vaidya, L.E.S. Souza, hep-th/0203133.
10. A. Leviatan, nucl-th/0312018.
11. V.D. Mur, V.S. Попов, Yu.A. Simonov, V.P. Yurov, *ZhETF*, **105**, 3 (1994).
12. Ю.А. Симонов, *ЯФ*, **60**, 2252 (1997).
13. В.Ю. Лазур, А.К. Рейтий, В.В. Рубиш, *ТМФ*, **143**, 83 (2005).
14. Ю.А. Симонов, *УФН*, **166**, 338 (2002); S.W. Otto, J.D. Stack, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2328 (1984).
15. В.С. Попов, *ЯФ*, **64**, 421 (2001).
16. D.G. Caldi, A. Chodos, *Phys. Rev. D.*, **36**, 2876 (1987).
17. В.С. Попов, А.Е. Кудрявцев, В.И. Лисин, В.Д. Мур, *ЖЭТФ*, **80**, 1272 (1981).
18. Я.Б. Зельдович, *ФТТ*, **1**, 1637 (1959).
19. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).
20. А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов, *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971).
21. К.М. Case, *Phys. Rev.*, **80**, 797 (1950).
22. А.М. Переломов, В.С. Попов, *ТМФ*, **4**, 48 (1970).
23. В.С. Попов, *Пис. ЖЭТФ*, **11**, 254 (1970).
24. В.С. Попов, Д.Н. Воскресенский, В.Л. Елецкий, В.Д. Мур, *ЖЭТФ*, **76**, 431 (1979).
25. Я.Б. Зельдович, В.С. Попов, *УФН*, **105**, 403 (1971).
26. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, т. 1* (Наука, Москва, 1973); *т. 2* (Наука, Москва, 1974).

# ONE SIMPLE MODEL OF SUPERCRITICAL ATOM IN MODIFIED QUANTUM ELECTRODYNAMICS

**V.Yu. Lazur, O.K. Reity, V.V. Bondarchuk, V.K. Reity**

Uzhgorod National University, 88000 Uzhgorod, Voloshina St. 54

e-mail: [lazur@univ.uzhgorod.ua](mailto:lazur@univ.uzhgorod.ua),

[reity@univ.uzhgorod.ua](mailto:reity@univ.uzhgorod.ua)

For one simple model of a continuous source (nucleus) exact normalized solutions of the Dirac equation with scalar+vector potential of Coulomb type and the transcendental equation, which determines the levels of ground and excited states of electron in the subcritical region  $Z < Z_{cr}$ , are obtained. The equations for the value of the critical nuclear charge at which the level dips into the lower energy continuum are found. In the framework of the logarithmic approximation, the explicit analytical expressions for the energy of discrete levels and the critical charge are obtained. The strong influence of Lorenz structure of interaction potentials on the critical charge and on the discrete spectrum of fermion in scalar+vector Coulomb type fields is observed.