

БАГАТОЧАСТИНКОВІ ДИНАМІЧНІ КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ЕЛЕКТРОН-ПЛАЗМОННОЇ МОДЕЛІ У ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОННОЇ РІДИНИ

М. В. Ваврух, С. Б. Слободян

Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005
e-mail: slobodyan@physics.wups.lviv.ua

Запропоновано новий варіант електрон-плазмонної моделі в теорії електронної рідини. Теорія збурень за електрон-плазмонною взаємодією не має розбіжностей, через що відпадає потреба у підсумовуванні рядів діаграм, що виражаються у термінах багаточастикових динамічних кореляційних функцій. Розрахунок цих функцій, побудованих на операторах густини енергії, є одним із центральних моментів запропонованого підходу. У даній роботі розраховано в аналітичній формі n -частинкові кореляційні функції при $n = 2, 3, 4$.

Вступ

Сучасна мікроскопічна теорія вироджених електронних систем, започаткована роботами [1, 2], ґрунтується на підсумовуванні безмежних рядів розбіжних діаграм теорії збурень. Доповнений концепцією локального поля, цей підхід став загальноприйнятим при розрахунках характеристик металів, надпровідників, напівпровідників. У зв'язку з відсутністю строгої мікроскопічної теорії поправки на локальне поле розробка альтернативних методів опису сильно неідеальних електронних систем залишається одним з актуальних завдань. Співіснування колективних та індивідуальних рухів у системах з колективізованими електронами є підставою для формування концепції колективного опису міжелектронних взаємодій. Один із варіантів такого підходу розроблявся в роботах Бома і Пайнса [3–9]. Однак використання серії канонічних перетворень з метою переходу до розширеного простору змінних електронів і плазмонів привело до того, що цей підхід набув наближеного характеру і був витіснений з ужитку. В той же час очевидно, що колективний опис має глибоку фізичну основу і переваги, особливо в області сильної неідеальності. Причина в тому,

що при колективному описі в ролі нульового наближення виступає система вільних електронів і невзаємодіючих плазмонів, а слабка взаємодія між цими підсистемами не приводить до появи розбіжних діаграм теорії збурень. У зв'язку з цим концепція колективного опису має перспективу дальшого розвитку, а варіант, що розроблявся в роботах [3–9], є лише одним з можливих. Інший варіант колективного опису розвивався в роботах [10–13], де паралельно з введенням розширеного простору індивідуальних і колективних координат використовується своєрідне перетворення статистичного оператора (“перетворення зміщень”), що веде до необхідності розв'язання безмежного ланцюжка нелінійних інтегральних рівнянь. На відміну від підходу Бома і Пайнса, у методі зміщень і колективних змінних перехід до розширеного простору виконується строго, за допомогою функції переходу. В обох підходах є багато спільного, а характерною рисою їх є відсутність розбіжних діаграм, на відміну від стандартних методів теорії збурень.

У роботі авторів [14] запропоновано новий варіант колективного опису взаємодій у моделі електронної рідини, відмінний як від варіанту Бома-Пайнса, так і від зміщень і колективних змінних. Ми

стартуємо з гамільтоніана моделі у зображенні вторинного квантування

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},s} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},s}^+ a_{\mathbf{k},s}, \quad (1)$$

$$\hat{V} = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{s_1, s_2} a_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s_1}^+ a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, s_2}^+ a_{\mathbf{k}_2, s_2} a_{\mathbf{k}_1, s_1},$$

де $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$, $V_{\mathbf{q}} = 4\pi e^2 \mathbf{q}^{-2}$, V – об'єм системи, $a_{\mathbf{k},s}^+$, $a_{\mathbf{k},s}$ – оператори породження і знищення електронів на базисі плоских хвиль. Далі проводиться строгий перехід до розширеного простору індивідуальних і колективних $\rho_{\mathbf{q}}$ змінних за допомогою оператора переходу [15], що є квантовим аналогом функції переходу класичної статистики [16, 17],

$$\hat{J}(\rho, \hat{\rho}) = \prod_{C_{\mathbf{q}}} \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \hat{\rho}_{\mathbf{q}}) = \int (d\omega) \left\{ 2\pi i \sum_{\mathbf{q} \in C_{\mathbf{q}}} \omega_{\mathbf{q}} (\rho_{\mathbf{q}} - \hat{\rho}_{\mathbf{q}}) \right\}, \quad (2)$$

де $\omega_{\mathbf{q}}$ – змінна, спряжена до $\rho_{\mathbf{q}}$, $\hat{\rho}_{\mathbf{q}} \equiv \sum_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}^+ a_{\mathbf{k},s}$, $(d\omega) = \prod_{C_{\mathbf{q}}} (d\omega_{\mathbf{q}})$, а

область хвильових векторів $C_{\mathbf{q}}$ включає половину всіх векторів зі сфери радіуса q_0 , наприклад, $0 < |\mathbf{q}| \leq q_0, q_z > 0$. Наявність взаємодії між електронами веде до того, що антисиметрична хвильова функція системи залежить не тільки від операторів $a_{\mathbf{k},s}$, а й від операторів $\hat{\rho}_{\mathbf{q}}$ і має таке зображення у розширеному просторі

$$\Psi(a_{\mathbf{k}} | \hat{\rho}_{\mathbf{q}}) = \int d\rho \hat{J}(\rho, \hat{\rho}) \Psi(a_{\mathbf{k}} | \rho). \quad (3)$$

Будь-який оператор $\hat{f}(\hat{\rho})$ має зображення у колективних змінних

$$\hat{f}(\hat{\rho}) = \int (d\rho) \hat{J}(\rho, \hat{\rho}) \hat{F}(\rho), \quad (4)$$

$$(d\rho) \equiv \prod_{C_{\mathbf{q}}} d\rho_{\mathbf{q}}.$$

Рівності (3), (4) дозволяють одержати зображення статистичної суми у розширеному просторі змінних $a_{\mathbf{k},s}$ і $\rho_{\mathbf{q}}$. Далі вводяться Бозе-оператори породження і знищення плазмонів за правилом

$$b_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha_{\mathbf{q}} \tilde{\rho}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\alpha_{\mathbf{q}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}_{-\mathbf{q}}} \right\},$$

$$b_{-\mathbf{q}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha_{\mathbf{q}} \tilde{\rho}_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\alpha_{\mathbf{q}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}_{-\mathbf{q}}} \right\}, \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}_{\mathbf{q}} \equiv N^{-\frac{1}{2}} \rho_{\mathbf{q}}; \quad \alpha_{\mathbf{q}} = \left\{ \frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{2\varepsilon_{\mathbf{q}}} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\hbar \omega_{\mathbf{q}} = \left\{ 2 \frac{V_{\mathbf{q}}}{V} N \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Перехід від змінних $\rho_{\mathbf{q}}$ до $b_{\mathbf{q}}^+, b_{\mathbf{q}}$ також здійснюється за допомогою оператора переходу

$$\hat{J}(\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(b)}, \rho_{\mathbf{q}}) = \prod_{C_{\mathbf{q}}} \delta(\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(b)} - \rho_{\mathbf{q}}), \quad (6)$$

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(b)} = (2N)^{-\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{q}}^{-1} \{ b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^+ \}.$$

Виконуючи інтегрування за змінними $\rho_{\mathbf{q}}$, одержуємо зображення статистичної суми у термінах електронних операторів $a_{\mathbf{k},s}$ і операторів плазмонів:

$$Z = \text{Sp} \left\{ \hat{J}(b, a) \exp \left\{ -\beta \left[\hat{H}(a) + \hat{H}_p + \hat{H}_{ep} \right] \right\} \right\},$$

$$\hat{J}(b, a) = \int (d\rho) \hat{J}(\hat{\rho}, a) \hat{J}(b, \hat{\rho}) = \prod_{C_{\mathbf{q}}} \delta(\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(b)} - \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(a)}), \quad (7)$$

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(a)} \equiv \hat{\rho}_{\mathbf{q}}; \quad \beta \equiv (k_B T)^{-1}.$$

Формально гамільтоніан $\hat{H}(a) + \hat{H}_p + \hat{H}_{ep}$ описує дві різні підсистеми об'єктів – електронів і плазмонів, а $\hat{J}(b, a)$ відображає додаткові умови або в'язі. При цьому $\hat{H}(a)$ є гамільтоніаном підсистеми електронів із

слабкою короткосяжною взаємодією, \hat{H}_p – гамільтоніан підсистеми плазмонів із врахуванням ангармонізму, а оператор

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ep} &= (2N)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{q} \in C_q} \alpha_{\mathbf{q}}^{-1} \hat{B}_{\mathbf{q}} \hat{f}_{\mathbf{q}} \quad \hat{f}_{\mathbf{q}} = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s}, \\ \hat{B}_{\mathbf{q}} &\equiv \left[\frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} + 1 \right] b_{\mathbf{q}} - \left[\frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} - 1 \right] b_{-\mathbf{q}}^+ \end{aligned} \quad (8)$$

описує слабку нелокальну взаємодію електронів з плазмонами.

Для розрахунку статистичної суми використаємо теорію збурень, вибираючи за гамільтоніан незбуреної задачі суму гамільтоніана моделі вільних електронів із перенормованою одночастинковою енергією $\hat{H}_0' = \sum_{\mathbf{k}, s} (\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \mu) a_{\mathbf{k}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s}$, $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - (2V) \left[\sum_{\mathbf{q} \in C_q} V_{\mathbf{q}} + V N^{-1} \varepsilon_{\mathbf{q}} \right]$ і вільних плазмонів \hat{H}_p , застосовуючи зображення взаємодії у статистичному операторі і переходячи до частотного зображення операторів електронів і плазмонів (див. [16, 17]), одержуємо

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 \langle T \left\{ \int (d\varphi) \exp \left[i\pi \sum_{\nu} \sum_{\mathbf{q} \in C_q} \varphi_{\mathbf{q}} \left(N^{\frac{1}{2}} (2\beta)^{-\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{q}}^{-1} (b_x + b_{-x}^+) - \frac{1}{\beta} \hat{\rho}_x \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[-\hat{V}_s(\nu) - \hat{H}_{pp}(\nu) - \hat{H}_{ep}(\nu) \right] \right\} \rangle_0, \end{aligned} \quad (9)$$

де $(d\varphi) \equiv \prod_{C_q} d\varphi_{\mathbf{q}}$, Z_0 – статистична су-

ма вільних електронів і плазмонів, $\hat{V}_s(\nu)$ – оператор слабкої короткосяжної двочастинкової взаємодії між електронами у частотному зображенні, $\hat{H}_{pp}(\nu)$ описує ангармонізм плазмонів, а

$$\hat{H}_{ep}(\nu) = (2N)\beta^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{q} \in C_q} \sum_{\nu} \alpha_{\mathbf{q}}^{-1} \hat{f}_x \hat{B}_x \quad (10)$$

є частотним зображенням оператора електрон-плазмонної взаємодії

$$\begin{aligned} \hat{f}_x &\equiv \hat{f}_{\mathbf{q}, \nu} = \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}^+(v^* + \nu) a_{\mathbf{k}, s}(v^*), \\ \hat{B}_x &= \hat{B}_{\mathbf{q}, \nu} = \left[\frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} + 1 \right] b_{\mathbf{q}, \nu} - \left[\frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} - 1 \right] b_{-\mathbf{q}, -\nu}^+ \end{aligned} \quad (11)$$

При цьому

$$a_{\mathbf{k}, s}(v^*) = \beta^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\beta} d\beta' a_{\mathbf{k}, s}(\beta') \exp(iv^* \beta'), \quad (12)$$

$$b_{\mathbf{q}, \nu} = \beta^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\beta} d\beta' b_{\mathbf{q}}(\beta') \exp(iv\beta')$$

є спектральними зображеннями операторів електронів і плазмонів у представленні взаємодії [18, 19]. $\nu = 2\pi n\beta^{-1}$, $\nu^* = (2n + 1)\pi\beta^{-1}$ – частоти Мацубари.

***n*-частинкові кореляційні функції**

У роботі [14] показано, що теорія збурень за степенями оператора $\hat{H}_{ep}(\nu)$ для випадку систем з проміжною чи сильною неідеальністю є швидкозбіжною, а розбіжні діаграми взагалі відсутні. Фактичний розрахунок статистичної суми зводиться до обчислення діаграм декількох порядків теорії збурень, у яких фігурують

електронні кореляційні функції – зв’язні (кумулянтні) середні від добутоків операторів \hat{f}_x ,

$$\eta_n(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_F^{-n} \beta^{-1} \left\langle T \left\{ \hat{f}_{x_1} \hat{f}_{x_2} \dots \hat{f}_{x_n} \right\} \right\rangle_0^c, \quad (13)$$

де $\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ – енергія Фермі. Зауважимо, що функції такого типу виникають також в інших підходах, особливо у випадках із перенормуванням взаємодій (див. [20]). В літературі невідомі розрахунки функцій такого типу. Ми покажемо, що $\eta_n(x_1, \dots, x_n)$ у кінцевому рахунку можна звести до кореляційних функцій, побудованих на операторах густини частинок $\hat{\rho}_x \equiv \sum_{\nu^*} \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}^+ (\nu^* + \nu) a_{\mathbf{k}, s} (\nu^*)$, а саме

$$\begin{aligned} \eta_2(x_1, x_2) &= \beta^{-1} \delta_{x_1+x_2, 0} \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1, s}(\nu^* + \nu_1) \times \\ &\quad \times (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1); \\ \eta_3(x_1, x_2, x_3) &= -2\beta^{-1} \delta_{x_1+x_2+x_3, 0} \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^3 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1, s}(\nu^* + \nu_1) \times \\ &\quad \times G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2, s}(\nu^* - \nu_2) (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) \end{aligned} \quad (16)$$

і т. д., де символ Re відноситься до частот Бозе-Мацубари $\nu_1; \nu_1, \nu_2$; і т. д. З формул (16) видно, що $\eta_n(x_1, \dots, x_n)$ є дійсними функціями своїх аргументів $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n; \nu_1, \dots, \nu_n)$. Виконуючи підсумовування за частотою ν^* за правилом [19]

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) &= n_{\mathbf{k}, s} = \\ &= \{1 + \exp[\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)]\}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

представимо $\eta_n(x_1, \dots, x_n)$ у вигляді суми за хвильовим вектором,

$$\mu_n^0(x_1, \dots, x_n) \beta^{-1} \left\langle T \left\{ \hat{\rho}_{x_1} \hat{\rho}_{x_2} \dots \hat{\rho}_{x_n} \right\} \right\rangle_0^c, \quad (14)$$

які при $n \geq 3$ вперше розраховано у роботах [18, 21].

Як показано в роботах [18, 19],

$$\begin{aligned} - \left\langle T \left\{ a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1^*), a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\nu_2^*) \right\} \right\rangle_0 &= \\ = G_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1^*) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{s_1, s_2} \delta_{\nu_1^*, \nu_2^*}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) = \{i\nu^* - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu\}^{-1}$ – спектральне зображення одночастинкової функції Гріна базисної системи. Співвідношення (15) дозволяє представити функції $\eta_n(x_1, \dots, x_n)$ у вигляді згортки функцій Гріна:

$$\begin{aligned} \eta_2(x, -x) &= 2 \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} y(x)(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{q}); \\ \eta_3(x_1, x_2, x_3) &= -2 \delta_{x_1+x_2+x_3, 0} \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^3 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \\ &\quad \times \{ y(x_1)y(-x_2)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + \\ &\quad + y(x_2)y(-x_3)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_3)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) + \\ &\quad + y(x_3)y(-x_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \}; \end{aligned} \quad (18)$$

і т. д., де

$$y(x) \equiv \{i\nu + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\}^{-1} \quad x \equiv (\mathbf{q}, \nu).$$

Розрахунок функції $\eta_2(x, -x)$ труднощів не становить. Переходячи від суми за вектором \mathbf{k} до інтегралу і використовуючи

сферичну систему координат, при абсо-

лютному нулі температури одержуємо:

$$\eta_2(x, -x) = -\frac{N}{2\varepsilon_F} q^2 + (u^2 + \frac{1}{4}q^2) \mu_2^0(x, -x) = -\frac{Nq^2}{2\varepsilon_F} \left\{ 1 - 3[u^2] + \frac{1}{4}q^2 I_{2,0}(q, u) \right\}, \quad (19)$$

де $q \equiv |\mathbf{q}| k_F^{-1}$, $u = v(2\varepsilon_F q)^{-1}$, а $I_{2,0}(q, u)$ – безрозмірна функція цих змінних:

$$I_{2,0}(q, u) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2q} (1+u)^2 - \frac{q^2}{4} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \ln[(1 + \sigma \frac{q}{2})^2 + u^2] - u \sum_{\sigma=\pm 1} \arctg[\frac{1}{u}(1 + \sigma \frac{q}{2})] \right\}. \quad (20)$$

Розрахунок інтегралів за вектором \mathbf{k} при заданій конфігурації векторів $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ у випадку $n \geq 3$ є досить складним завданням. Наявність скалярних добутків не дозволяє безпосередньо скористатися тотожністю Фейнмана, як це було зроблено при розрахунках $\mu_n^0(x_1, \dots, x_n)$ у роботах [18, 21].

Розрахунок тричастинкової функції

Спосіб розрахунку кореляційних функцій при $n \geq 3$ детально проілюструємо на прикладі тричастинкової функції. Насамперед у кожному з трьох доданків формули (18) виконаємо перетворення з метою зменшити число скалярних добутків, використовуючи тотожності типу

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) = -\frac{1}{2} \{ \varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1} \}, \quad (21)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) = -\frac{1}{2} \{ \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}_2} \},$$

і т. д. В результаті таких перетворень із кожного з доданків (18) виникають складові без енергетичних знаменників, складові з одним енергетичним знаменником типу

$$\mu_2(x) = -2 \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} [i\nu + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}]^{-1}, \quad (22)$$

$$\zeta_2(x_1 | \mathbf{q}_2) = -4 \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2) [i\nu_1 + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}]^{-1},$$

а також складові з двома енергетичними знаменниками, але без скалярних добутків у чисельнику дробу типу

$$\Gamma_3(x_1, -x_2) = \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} [i\nu_1 + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}]^{-1} [-i\nu_2 + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2}]^{-1}. \quad (23)$$

Розрахунок складових типу (22) легко виконується за допомогою інтегрування за вектором \mathbf{k} у сферичній системі координат. У безрозмірних змінних

$$\mu_2(x) = \frac{3N}{2\varepsilon_F} R_{2,0}(q, u) \quad R_{2,0}(q, u) = I_{2,0}(q, u) + iJ_{2,0}(q, u),$$

$$J_{2,0}(q, u) = \frac{1}{2q} \left\{ \begin{array}{l} -u + \frac{1}{2}(u^2 + 1 - \frac{q^2}{4}) \times \\ \times [\arctg \frac{1+\frac{q}{2}}{u} + \arctg \frac{1-\frac{q}{2}}{u}] \end{array} \right\};$$

$$\zeta_2(x | \mathbf{q}_1) = \frac{3N}{q^2}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1) C(q, u) \quad (24)$$

$$C(q, u) = A(q, u) + iB(q, u);$$

$$A(q, u) = \frac{2}{3} + (u^2 - \frac{q^2}{4}) + \frac{q}{8} [\frac{q^2}{4} - 1 - 3u^2] \ln \frac{u^2 + (1 + \frac{q}{2})^2}{u^2 + (1 - \frac{q}{2})^2} + \frac{u}{2} [\frac{3}{4}q^2 - 1 - u^2] [\arctg \frac{1+\frac{q}{2}}{u} + \arctg \frac{1-\frac{q}{2}}{u}];$$

$$B(q, u) = qu + \frac{u}{4}(u^2 + 1 - \frac{3}{4}q^2) \times \\ \times \ln \frac{u^2 + (1 + \frac{q}{2})^2}{u^2 + (1 - \frac{q}{2})^2} + \frac{1}{4}q(\frac{q^2}{4} - 1 - 3u^2) \times \\ \times [\operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{q}{2}}{u} + \operatorname{arctg} \frac{1 - \frac{q}{2}}{u}].$$

Вводячи для компактності запису позначення $\varepsilon(q, u) = q^2 + 2iuq$, представимо $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$ у безрозмірних змінних у такому вигляді:

$$\eta_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{3N}{(2\varepsilon_F)^2} \delta_{x_1+x_2+x_3,0} \left\{ -\frac{1}{3}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \right. \\ + \frac{1}{2}I_{2,0}(q_1, u_1) \operatorname{Re}[\varepsilon^*(q_1, u_1)(\varepsilon^*(q_2, u_2) - \varepsilon^*(q_3, u_3))] + \\ + \frac{1}{2}I_{2,0}(q_2, u_2) \operatorname{Re}[\varepsilon^*(q_2, u_2)(\varepsilon^*(q_3, u_3) - \varepsilon^*(q_1, u_1))] + \\ + \frac{1}{2}I_{2,0}(q_3, u_3) \operatorname{Re}[\varepsilon^*(q_3, u_3)(\varepsilon^*(q_1, u_1) - \varepsilon^*(q_2, u_2))] + \\ + \frac{\operatorname{Re}}{4}[R_{2,0}(q_1, u_1)(\varepsilon(q_1, u_1)\varepsilon(q_3, u_3) + \varepsilon^*(q_1, u_1)\varepsilon(q_2, u_2))] + \\ + \frac{\operatorname{Re}}{4}[R_{2,0}(q_2, u_2)(\varepsilon(q_2, u_2)\varepsilon(q_1, u_1) + \varepsilon^*(q_2, u_2)\varepsilon(q_3, u_3))] + \\ + \frac{\operatorname{Re}}{4}[R_{2,0}(q_3, u_3)(\varepsilon(q_3, u_3)\varepsilon(q_2, u_2) + \varepsilon^*(q_3, u_3)\varepsilon(q_1, u_1))] - \\ - \frac{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{2} \operatorname{Re}[\varepsilon^*(q_1, u_1)C(q_1, u_1)q_1^{-2} + \varepsilon^*(q_2, u_2)C^*(q_2, u_2)q_2^{-2}] - \\ - \frac{(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{2} \operatorname{Re}[\varepsilon^*(q_2, u_2)C(q_2, u_2)q_2^{-2} + \varepsilon^*(q_3, u_3)C^*(q_3, u_3)q_3^{-2}] \quad (25)$$

Зазначимо, що останній доданок у формулі (25) пов'язаний з функцією $\mu_3^0(x_1, x_2, x_3)$, оскільки

$$\mu_3^0(x_1, x_2, x_3) = -2\delta_{x_1+x_2+x_3,0} \operatorname{Re}\{\Gamma_3(x_1, -x_2) + \\ + \Gamma_3(x_2, -x_3) + \Gamma_3(x_3, -x_1)\}, \quad (26)$$

однак він вимагає розрахунку не тільки дійсних, але й уявних складових функцій $\Gamma_3(x_i, -x_j)$.

Труднощі розрахунку $\Gamma_3(x_i, -x_j)$ та аналогічних функцій вищого порядку (з більшим числом енергетичних знаменників) зумовлені необхідністю інте-

грування за вектором \mathbf{k} при заданій конфігурації векторів $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$. Проте інтегрування за кутовими змінними вектора \mathbf{k} стає елементарним, якщо використати тотожність Фейнмана [22]

$$\prod_{j=1}^n A_j^{-1} = (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \times \\ \times \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j \right\}^{-n} \delta\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j - 1\right). \quad (27)$$

Виходячи з означення (23), перейдемо до безрозмірних змінних $q_i = |\mathbf{q}_i| k_F^{-1}$, $u_i = v_i (2\varepsilon_F q_i)^{-1}$ і використаємо тотожність (27) при $n=2$. В результаті цих перетворень одержуємо таке зображення для $\Gamma_3(x_1, -x_2)$:

$$\Gamma_3(x_1, -x_2) = \frac{3N}{4\pi q_1 q_2 (2\varepsilon_F)^2} \times \\ \times \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k},s} \int_0^1 d\alpha F^{-2}(\alpha); \quad (28) \\ F(\alpha) = \alpha[iu_1 - \frac{q_1}{2} - (\mathbf{k}, \mathbf{e}_1)] + \\ + (1-\alpha)[-iu_2 - \frac{q_2}{2} + (\mathbf{k}, \mathbf{e}_2)],$$

де $\mathbf{e}_i = \mathbf{q}_i / |\mathbf{q}_i|$, а вектор \mathbf{k} вимірюється в одиницях k_F . Введемо вектор

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \alpha \mathbf{e}_1 - (1-\alpha) \mathbf{e}_2, \quad (29)$$

а також позначення

$$\Omega_\alpha = \alpha(\xi_2 - \xi_1^*) - \xi_2 = \Omega_\alpha^c + i\Omega_\alpha^s, \\ \xi_j \equiv \frac{1}{2}q_j + iu_j, \quad j=1,2. \quad (30)$$

Тоді

$$F(\alpha) = \Omega_\alpha - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\rho}_\alpha), \quad (31)$$

а тому інтегрування за кутовими змінними вектора \mathbf{k} виконаємо у сферичній

системі координат, вісь z якої паралельна вектору \mathbf{p}_α . Після наступного інтегрування за модулем вектора \mathbf{k} одержуємо $\Gamma_3(x_1, -x_2)$ у вигляді однократного інтеграла за параметром α :

$$\Gamma_3(x_1, -x_2) = -\frac{3N}{q_1 q_2 (2\varepsilon_F)^2} \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\rho_\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{\Omega_\alpha}{2\rho_\alpha} \ln \left| \frac{\rho_\alpha + \Omega_\alpha}{\rho_\alpha - \Omega_\alpha} \right| \right\}, \quad (32)$$

де

$$\rho_\alpha \equiv |\mathbf{p}_\alpha| = \left\{ 1 - 2\alpha(1+t) + 2\alpha^2(1+t) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (33)$$

а $t \equiv t_{12} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ є косинусом кута між векторами \mathbf{q}_1 і \mathbf{q}_2 .

Інтеграл за змінною α розіб'ємо на два. Той із них, у підінтегральній функції якого фігурує логарифм, інтегруємо частинами, після чого об'єднуємо його з тим інтегралом, підінтегральна функція якого дорівнює ρ_α^{-2} . В результаті цих перетворень інтеграл за змінною α суттєво спрощується, так що

$$\Gamma_3(x_1, -x_2) = \frac{3N}{(2\varepsilon_F)^2} [2q_1 q_2 (1-t^2)]^{-1} \times \left\{ [\xi_2 + t\xi_1^*] \ln \left[\frac{1-\xi_1^*}{1+\xi_1^*} \right] + [\xi_1^* + t\xi_2] \ln \left[\frac{1-\xi_2}{1+\xi_2} \right] \right\} - \frac{3N}{(2\varepsilon_F)^2} [2q_1 q_2 (1-t^2)]^{-1} \delta(\xi, t) \int_0^1 \frac{d\alpha}{\rho_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2}, \quad (34)$$

де

$$\delta(\xi, t) = 1 - t^2 - \xi_1^{*2} - \xi_2^2 - 2t\xi_1^* \xi_2, \quad \rho_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2 = \alpha^2 \left\{ 2(1+t) - \xi_1^{*2} - \xi_2^2 + 2\xi_2 \xi_1^* \right\} + 2\alpha \left\{ \xi_2 (\xi_2 - \xi_1^*) - (1+t) \right\} + (1 - \xi_2^2). \quad (35)$$

Нехай $\alpha_1 = \alpha_1^c + i\alpha_1^s$, $\alpha_2 = \alpha_2^c + i\alpha_2^s$ є коренями рівняння $\rho_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^c &= \{p_c^2 + p_s^2\}^{-1} \{p_c(b_c - \eta) + p_s(b_s + \zeta)\}; \\ \alpha_1^s &= \{p_c^2 + p_s^2\}^{-1} \{p_c(b_s + \zeta) - p_s(b_c - \eta)\}; \\ \alpha_2^c &= \{p_c^2 + p_s^2\}^{-1} \{p_c(b_c + \eta) + p_s(b_s - \zeta)\}; \\ \alpha_2^s &= \{p_c^2 + p_s^2\}^{-1} \{p_c(b_s - \zeta) - p_s(b_c + \eta)\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Тут використано такі позначення:

$$p_c = 2(1+t) - \frac{1}{4}(q_1 - q_2)^2 + (u_1 + u_2)^2;$$

$$p_s = (q_1 - q_2)(u_1 + u_2);$$

$$b_c = 1 + t + \frac{q_2}{4}(q_1 - q_2) + u_2(u_1 + u_2)$$

$$b_s = \frac{u_2}{2}(q_1 - q_2) - \frac{q_2}{2}(u_1 + u_2);$$

$$[\sigma(\zeta, t)]^2 = \zeta + i\eta;$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \delta_c + [\delta_c^2 + \delta_s^2]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\eta = \frac{\delta_s}{\sqrt{2}} \left\{ \delta_c + [\delta_c^2 + \delta_s^2]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\delta_c = 1 - t^2 - \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2 + 2tq_1 q_2) + (u_1^2 + u_2^2 - 2tu_1 u_2); \quad (37)$$

$$+ (u_1^2 + u_2^2 - 2tu_1 u_2);$$

$$\delta_s = u_1(q_1 + tq_2) - u_2(q_2 + tq_1).$$

Розділяючи підінтегральну функцію на прості множники, представимо інтеграл за змінною α у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta(\xi, t) \int_0^1 \frac{d\alpha}{\rho_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2} &= \gamma_3^c + i\gamma_3^s, \\ \gamma_3^c &= \frac{\zeta}{2}(A_1 - A_2) + \frac{\eta}{4}(L_1 - L_2) \\ \gamma_3^s &= \frac{\eta}{2}(A_1 - A_2) - \frac{\zeta}{4}(L_1 - L_2); \\ A_i &= \arctg \frac{1 - \alpha_i^c}{\alpha_i^s} + \arctg \frac{\alpha_i^c}{\alpha_i^s} \end{aligned} \quad (38)$$

$$L_i \equiv \ln; \frac{(1 - \alpha_i^c)^2 + (\alpha_i^s)^2}{(\alpha_i^c)^2 + (\alpha_i^s)^2} \quad (i=1,2).$$

Формули (24), (25), (34)–(38) в сукупності визначають тричастинкову динамічну кореляційну функцію $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$.

Чотиричастинкова кореляційна функція

Розглянемо ще найбільш важливу чотиричастинкову кореляційну функцію для виродженого випадку ($x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$), яка виникає у четвертому порядку теорії збурень,

$$\begin{aligned} \eta_4(x_1, -x_1, x_2, -x_2) &= \\ &= \beta^{-1} \varepsilon_F^{-4} \left\langle T \left\{ \hat{f}_{x_1} \hat{f}_{-x_1} \hat{f}_{x_2} \hat{f}_{-x_2} \right\} \right\rangle_0^c = \quad (39) \\ &= \eta_{4,1}(x_1, -x_1, x_2, -x_2) + \eta_{4,2}(x_1, -x_1, x_2, -x_2), \end{aligned}$$

де $\eta_{4,1}(x_1, -x_1, x_2, -x_2)$ є власноенергетичною складовою, а $\eta_{4,2}(x_1, -x_1, x_2, -x_2)$ – обмінною:

$$\begin{aligned} P_4(x_1, x_2) &= 2 \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^4 \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \left\{ \frac{\partial n_{\mathbf{k}, s}}{\partial \mu} (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) y(x_1) y(x_2) + \right. \\ &+ n_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) [y^2(x_1) y(x_2) + y^2(x_2) y(x_1)] - \\ &- n_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k} - \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) y^2(-x_1) y(x_2 - x_1) - \\ &\left. - n_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k} - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) y^2(-x_2) y(x_1 - x_2) \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

Перший доданок у фігурній дужці (41) дає так звану “аномальну” складову $\eta_4(x_1, -x_1, x_2, -x_2)$, за аналогією до “аномальних” складових функцій $\mu_n^0(x_1, \dots, x_n)$ [18]. При розрахунках фізичних характеристик моделі при $T=0$ К такі складові компенсуються зсувом хімічного потенціалу (за рахунок взаємодії) і в остаточних виразах не фігурують. Через те ми

$$\begin{aligned} \eta_{4,1}(x_1, -x_1, x_2, -x_2) &= P_4(x_1, x_2) + P_4(x_2, -x_1), \\ P_4(x_1, x_2) &= -2\beta^{-1} \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^4 \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}^2(\nu^*) G_{\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, s}(\nu^* + \nu_1) G_{\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, s}(\nu^* + \nu_2) \times \\ &\times (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2); \quad (40) \\ \eta_{4,2}(x_1, -x_1, x_2, -x_2) &= R_4(x_1, x_2) + R_4(x_2, -x_1), \\ R_4(x_1, x_2) &= -\beta^{-1} \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^4 \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, s}(\nu^* + \nu_1) G_{\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, s}(\nu^* + \nu_2) \times \\ &\times G_{\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, s}(\nu^* + \nu_1 + \nu_2) (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \times \\ &\times (\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1). \end{aligned}$$

Опишемо схему розрахунку власноенергетичної складової. Тотожність $G_{\mathbf{k}, s}^2(\nu^*) = \partial G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) / \partial \varepsilon_{\mathbf{k}}$ дозволяє виконати обчислення суми за частотою ν^* таким самим способом, як у випадку $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$. Наступне диференціювання за $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ та рівність $\partial n_{\mathbf{k}, s} / \partial \varepsilon_{\mathbf{k}} = -\partial n_{\mathbf{k}, s} / \partial \mu$ дають такий результат:

не будемо його розглядати. Проте зауважимо, що розрахунок його можна виконати за схемою розрахунку $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$.

Для розрахунку інших доданків $P_4(x_1, -x_1, x_2, -x_2)$ (“нормальних” складових) скористаємось тотожними перетвореннями типу (21), щоб максимально можливо звільнитись від скалярних добутків. Це веде до появи функцій типу (22) і (23) та виразів типу

$$\begin{aligned}
 -2 \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} y^2(x) &= i \frac{\partial}{\partial V} \mu_2(x), \\
 -4 \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) y^2(x) &= i \frac{\partial}{\partial V} \zeta_2(x | \mathbf{q}_1), \\
 \tau_2(x | \mathbf{q}_1) &= -4 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)^2 y(x),
 \end{aligned} \tag{42}$$

а також функцій типу

$$\gamma_4(x_1, x_1, x_2) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} y^2(x_1) y(x_2), \tag{43}$$

розрахованих у роботах [18] для випадку $T = 0$ К. Для “нормальної” складової $P_4(x_1, x_2)$ одержуємо таке зображення:

$$\begin{aligned}
 P_4^n(x_1, x_2) &= \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_1), \\
 \varepsilon_F^4 \Phi(x_1, x_2) &= -\frac{N}{8} \frac{\hbar^2}{2m} \{q_1^2 + 2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\} - \\
 &- \frac{1}{4} v_1 (v_2^2 + \varepsilon_{q_2}^2) \Gamma_3^s(x_1, x_2) + \frac{1}{8} \tau_2(x_2 - x_1 | \mathbf{q}_1) - \\
 &- \frac{1}{4} \{v_1 (v_2^2 + \varepsilon_{q_2}^2) + v_2 (v_1^2 + \varepsilon_{q_1}^2)\} \Gamma_3^s(-x_1, x_2 - x_1) + \\
 &+ \frac{1}{16} (v_1^2 + \varepsilon_{q_1}^2) (v_2^2 + \varepsilon_{q_2}^2) \{ \gamma_4(-x_1, -x_1, x_2 - x_1) - \gamma_4(x_1, x_1, x_2) \} + \\
 &+ \frac{1}{8} \mu_2^c(x_1) \{ \varepsilon_{q_1}^2 + 2v_1^2 + 2v_1 v_2 \} + \frac{1}{8} (\varepsilon_{q_2} - \varepsilon_{q_2 - q_1}) \mu_2^s(x_1) + \\
 &+ \frac{1}{16} (v_2^2 + \varepsilon_{q_2}^2) \mu_2^c(x_2) - \frac{1}{16} (\varepsilon_{q_1}^2 + \varepsilon_{q_2}^2 + v_2^2 - v_1^2 + 2v_1 v_2) \mu_2^c(x_2 - x_1) + \\
 &+ \frac{1}{8} (v_1 + v_2) \varepsilon_{q_1} \mu_2^s(x_2 - x_1) + \frac{1}{16} (v_1^2 + \varepsilon_{q_1}^2) (v_1 + 2v_2) \frac{\partial}{\partial v_1} \mu_2^c(x_1) + \\
 &+ \frac{1}{16} (v_1^2 + \varepsilon_{q_1}^2) (\varepsilon_{q_2}^2 - \varepsilon_{q_2 - q_1}) \frac{\partial}{\partial v_1} \mu_2^s(x_1) - \frac{1}{8} (v_1 + v_2) \zeta_2^s(x_2 - x_1 | \mathbf{q}_1) - \\
 &- \frac{1}{8} v_1 \{ \zeta_2^s(x_1 | \mathbf{q}_2) - \zeta_2^s(x_1 | \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \} + \\
 &+ \frac{1}{16} (v_1^2 + \varepsilon_{q_1}^2) \frac{\partial}{\partial v_1} \{ \zeta_2^s(x_1 | \mathbf{q}_2) - \zeta_2^s(x_1 | \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Тут використано розмірні змінні \mathbf{q}_i, v_i , індекс “с” означає дійсну частину відповідної функції, а “s” – уявну. Функція $\tau_2(x | \mathbf{q}_1)$ легко розраховується інтегруванням у сферичній системі координат і в безрозмірних змінних q, u зображається виразом

$$\begin{aligned}
 \tau_2(x | \mathbf{q}_1) &= 3N\varepsilon_F q_1^2 \\
 &\times \left\{ (1-t^2) \left[\frac{1}{12} (1 + \frac{3}{4} q^2 - 9u^2) + \frac{u}{2} (u^2 - \frac{q^2}{4}) A(q, u) \right. \right. \\
 &+ \frac{1}{8q} (1 + \frac{3}{2} q^2 u^2 - u^4 - \frac{q^4}{16}) L(q, u) \left. \right] \\
 &+ (1-3t^2) \left[\frac{1}{3} (1 + \frac{q}{2} u^2 - \frac{3}{8} q^2) - \frac{u}{2} (1 - \frac{q^2}{2} + 2u^2) A(q, u) \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{8q} (\frac{q^2}{2} + 3u^2 q^2 - 2u^2 - 2u^4 - \frac{q^4}{8}) L(q, u) \right] \right\}; \\
 A(q, u) &= \operatorname{arctg}(\frac{1 + \frac{q}{2}}{u}) + \operatorname{arctg}(\frac{1 - \frac{q}{2}}{u}); \quad L(q, u) = \ln \left[\frac{u^2 + (1 + \frac{q}{2})^2}{u^2 + (1 - \frac{q}{2})^2} \right],
 \end{aligned} \tag{45}$$

де $t = \cos(\widehat{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2})$.

Тільки на перший погляд здається, що розрахунок обмінної складової громіздкіший, ніж власноенергетичної, оскільки після обчислення суми за частотою ν^* функція $R_4(x_1, x_2)$ має три різних енергетичних знаменники:

$$\begin{aligned}
 R_4(x_1, x_2) &= \Psi_4(x_1, x_2) + \Psi_4(x_2, -x_1), \\
 \Psi_4(x_1, x_2) &= -2 \left(\frac{\hbar^2}{2m\varepsilon_F} \right)^4 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} y(x_1) y(x_2) y(x_1 + x_2) \times \\
 &\times (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Скориставшись тотожністю

$$\begin{aligned}
 y(x_1) y(x_2) y(x_1 + x_2) &= \left\{ 2 \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \right\}^{-1} \times \\
 &\times \{ y(x_1) y(x_1 + x_2) + y(x_2) y(x_1 + x_2) - y(x_1) y(x_2) \},
 \end{aligned} \tag{47}$$

зведемо розрахунок $\Psi_4(x_1, x_2)$ до такої форми, у якій фігурують лише два енергетичні знаменники:

$$\begin{aligned}
 \Psi_4(x_1, x_2) &= \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^3 \varepsilon_F^{-3} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)^{-1} \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \times \\
 &\times (\mathbf{k} + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2)(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \times \\
 &\times \{ y(x_1) y(x_2) - y(x_1) y(x_1 + x_2) - y(x_2) y(x_1 + x_2) \}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Наступний розрахунок виконується за схемою розрахунку $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$. Таким чином, функція $\Psi_4(x_1, x_2)$ зображається у вигляді суми трьох доданків. Для ілюстрації наведемо тут перший з них, $\Psi_4^{(1)}(x_1, x_2)$, який відповідає доданку $y(x_1)y(x_2)$ у фігурній дужці (48):

$$\begin{aligned}
 \Psi_4^{(1)}(x_1, x_2)\varepsilon_F^4 = & \frac{N}{8} \left\{ \varepsilon_{q_2} + \varepsilon_{q_1} - \frac{1}{2} [\varepsilon_{q_1} \varepsilon_{q_2} + v_1 v_2] \varepsilon_{q_1, q_2}^{-1} + 2 [\varepsilon_{q_1, q_2} + \frac{1}{5} \varepsilon_F] \right\} - \\
 & - [8(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)]^{-1} \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon_{q_1} - i v_1) [\varepsilon_{q_1, q_2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{q_1} + \frac{i v_1}{2}] \times \right. \\
 & \times [(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \mu_2(x_1) + \frac{1}{2} (\frac{\hbar^2}{2m})^{-1} \zeta_2(x_1 | \mathbf{q}_2)] \left. \right\} + \\
 & + [8(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)]^{-1} \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon_{q_2} + i v_2) [\varepsilon_{q_1, q_2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{q_2} + \frac{i v_2}{2}] \times \right. \\
 & \times [(q_1^2 + (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) \mu_2(x_2) + \frac{1}{2} (\frac{\hbar^2}{2m})^{-1} \zeta_2(x_2 | \mathbf{q}_1)] \left. \right\} - \\
 & - [16 \varepsilon_{q_1, q_2}]^{-1} \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon_{q_2} + i v_2) (\varepsilon_{q_1} - i v_1) [\varepsilon_{q_1, q_2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{q_1} + \frac{i v_1}{2}] \mu_2(x_1) \right\} - \\
 & - [16 \varepsilon_{q_1, q_2}]^{-1} \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon_{q_2} + i v_2) (\varepsilon_{q_1} - i v_1) [\varepsilon_{q_1, q_2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{q_2} + \frac{i v_2}{2}] \mu_2(x_2) \right\} - \\
 & - [4 \varepsilon_{q_1, q_2}]^{-1} \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon_{q_2} + i v_2) (\varepsilon_{q_1} - i v_1) \times \right. \\
 & \times [\varepsilon_{q_1, q_2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{q_1} + \frac{i v_1}{2}] [\varepsilon_{q_1, q_2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{q_2} + \frac{i v_2}{2}] \Gamma_3(x_1, x_2) \left. \right\}. \tag{49}
 \end{aligned}$$

Для компактності запису тут використано позначення $\varepsilon_{q_1, q_2} \equiv \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. Складові $\Psi_4(x_1, x_2)$, які відповідають іншим доданкам у фігурній дужці (48), обчислюються аналогічним способом.

Висновки

Структура діаграм теорії збурень за оператором електрон-плазмонної взаємодії цілком подібна до структури діаграм звичайної теорії збурень за кулонівською взаємодією. Однак тепер роль зображення Фур'є слабкого потенціалу відіграє плазмонний корелятор

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_F^2 N^{-1} \alpha_q^{-2} \left\langle T \left\{ \hat{B}_x \hat{B}_{-x} \right\} \right\rangle_0 & \approx V_q \varepsilon_F^2 \left\{ v^2 + (\hbar \omega_q)^2 \right\}^{-1} \\
 & \approx V_q \left\{ \left(\frac{v}{\varepsilon_F} \right)^2 + \frac{16}{3\pi\eta} r_s + \left(\frac{q}{k_F} \right)^4 \right\}^{-1}, \tag{50}
 \end{aligned}$$

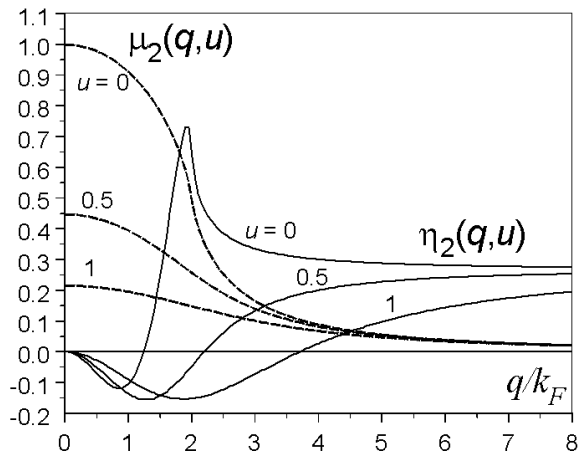


Рис. 1. Двочастинкові кореляційні функції $\eta_2(q, u) = 2\varepsilon_F(3N)^{-1}\eta_2(x, -x)$ та $\mu_2^0(q, u) = 2\varepsilon_F(3N)^{-1}\mu_2^0(x, -x)$ при різних значеннях безрозмірної частоти ($u = 0; 0.5; 1$).

Як бачимо з рисунка, $\eta_2(x, -x)$ є знакозмінною функцією в області $0 < q \leq 2k_F$, яка приймає значення набагато менші, ніж $\mu_2^0(x, -x)$ при тих самих частотах. Та обставина, що $\eta_n(x_1, \dots, x_n)$ приймають малі значення в області малих хвильових векторів, забезпечує швидку збіжність ряду теорії збурень і відсутність розбіжних діаграм. Поведінка їх в області великих хвильових векторів не впливає на збіжність ряду, оскільки ефективний потенціал має асимптотику q^{-6} . Залежність потенціалу (50) від параметра r_s є причиною доброї збіжності ряду теорії збурень у випадку сильно неідеальних систем.

Література

1. W. Z. Macke, Zs. Naturf. 5a, 192 (1950).
2. M. Gell-Mann, K. A. Brueckner, Phys. Rev. 106, 364 (1957).
3. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. 82, 625 (1951).
4. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. 85, 338 (1952).
5. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. 92, 609 (1953).
6. D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. 92, 626 (1953).
7. D. Bohm, K. Huang and D. Pines, Phys. Rev. 107, 71 (1957).
8. P. Nozieres, D. Pines, Phys. Rev. 111, 442 (1958).
9. Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах (Мир, Москва, 1965).
10. И. Р. Юхновский, УФЖ. 9, 702 (1964).
11. И. Р. Юхновский, УФЖ. 9, 827 (1964).
12. И. Р. Юхновский, В.В. Цыганенко, М. В. Ваврух, УФЖ. 10, 135 (1965).
13. И. Р. Юхновский, Р. Н. Петрашко, ТМФ. 17, 118 (1973).
14. M. V. Vavrukh, S. B. Slobodyan, Condens. Matt. Phys. 8, 502 (2005).
15. М. В. Ваврух, Вісник Львів. держ. ун-ту, серія фізична. 3, 26 (1968).
16. Д. Н. Зубарев, Док. Академии Наук СССР. 95, 757 (1954).
17. И. Р. Юхновский, М. Ф. Головкин, Статистическая теория классических равновесных систем (Наукова думка, Киев, 1980).
18. M. Vavrukh., T. Krokhmal'skii, Phys. stat. sol. (b). 168, 519 (1991).
19. М. В. Ваврух, С. Б. Слободян, ЖФД. 7, 275 (2003).
20. М. В. Ваврух, Н. Л. Тишко, С. П. Коваль, Я. В. Куштай, ЖФД. 7, 375 (2003).
21. М. В. Ваврух, Т. Е. Крохмальский, УФЖ. 32, 621 (1987).
22. Р. Хуа, В. Теплиц, Гомология и фейнмановские интегралы (Мир, Москва, 1969).
23. M. V. Vavrukh, N. L. Tyshko, Condens. Matt. Phys. 7, 383 (2004).

MULTIPARTICLE DYNAMIC CORRELATION FUNCTIONS OF THE ELECTRON-PLASMON MODEL IN ELECTRON LIQUID THEORY

M. V. Vavruk, S. B. Slobodyan

Ivan Franko National University of Lviv, Department of Astrophysics,
8 Kyrylo and Mefodiy Str., 79005, Lviv
e-mail: slobodyan@physics.wups.lviv.ua

A new variant of the electron-plasmon model in the electron liquid theory is proposed. The perturbation theory over the electron-plasmon interaction has no divergent diagrams, therefore, no summation of the series diagrams, expressed in the terms of many-particle dynamic correlation functions, is required. These functions are constructed on energy density operators. The calculation of these functions is one of the principal points of our approach. In this paper n -particle correlation functions are calculated in the analytical form at $n=2, 3, 4$.