ВПЛИВ ПРИСКОРЕННЯ НА ЕВОЛЮЦІЮ КВАНТОВОМЕХАНІЧНОГО ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Р.Р.Ломпей

Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики,
вул.Волошина, 32, Ужгород, 88000
e-mail: inbox@zk.arbitr.gov.ua

Знайдено хвильові функції стаціонарних станів та спектр значень енергії рівноприскореного гармонічного осцилятора. Вивчено питання про збудження осцилятора в результаті прискорення. На основі отриманих результатів дано наочну інтерпретацію ефекту Фуллінга-Унру.

Вступ

У роботах [1, 2] було виявлено неінваріантність вакууму при переході від інерціальної системи відліку (ІСВ) до рівноприскореної (РПСВ). Це явище отримало в літературі назву "ефект Фуллінга-Унру" і коротко полягає в наступному. Нехай є деяке квантове поле (Фуллінг і Унру розглядали нейтральне скалярне поле), яке з точки зору ІСВ перебуває в основному (вакуумному) стані. Тоді з точки зору РПСВ поле перебуває у змішаному стані, який характеризується тепловою матрицею густини з температурою $T_a = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}$, де $\hbar$ – стала Планка, a – прискорення РПСВ відносно ІСВ, k_B – стала Больцмана, c – швидкість світла у вакуумі. Щоб прояснити фізичний зміст явища, Девітт [3] ввів поняття детектора квантів, як квантовомеханічної системи, здатної в результаті взаємодії із квантовим полем поглинати або випромінювати кванти цього поля, переходячи при цьому в збуджений або основний стан відповідно. Девітт показав, що детектор, який покоїться у РПСВ збуджується, причому так, мов він перебуває у термостаті (або у полі теплового випромінювання) із температурою T_a. Проте аналізуючи взаємодію детектора з квантовим полем, питання про еволюцію в часі власне детектора (без взаємодії його з квантами) Девітт не розглядав. Він припускав, що поведінка рівноприскореного детектора нічим суттєво не відрізняється від поведінки детектора, який рухається інерціально. Цікаво проаналізувати це питання більш глибоко і з'ясувати, яким чином прискорення або сили інерції впливають на еволюцію і покази детектора. Цьому і присвячено дану роботу.

Оскільки послідовна квантова механіка є суттєво нерелятивістською, то природно розгляд детектора проводити в рамках нерелятивістської фізики. З іншого боку, вивчення нерелятивістських теорій дозволяє краще зрозуміти теорії релятивістські і більш чітко відтінити відмінності між ними.

У ролі моделі детектора вибирається одновимірний гармонічний осцилятор. У розділі 2 знаходяться хвильові функції стаціонарних станів та спектр значень енергії рівноприскореного гармонічного осцилятора. У розділі 3 досліджується питання в який стан перейде осцилятор в результаті прискорення, якщо початково він покоївся і перебував у стаціонарному стані. На основі отриманих результатів дається наочна інтерпретація ефекту Фуллінга-Унру (розділ 4).

1. Інерціальний гармонічний осцилятор

Нехай $\{x,t\}$ – координата і час деякої ІСВ К. Наведемо для посилань відомості про гармонічний осцилятор із масою m і частотою ω, який покоїться відносно ІСВ К. Хвильова функція такого осцилятора $\psi^I(x,t)$ задовольняє рівняння

$$i\hbar\frac{\partial\psi^I(x,t)}{\partial t}=\hat{H}^I\psi^I(x,t),\hat{H}^I= =-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad (1)$$

Нормовані хвильові функції, що відповідають стаціонарним станам з енергією

$$E_n=\hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right)\ , \qquad (2)$$

мають вигляд

$$\psi_n^I(x,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\varphi_n(x), \qquad (3)$$

де

$$\varphi_n(x)=\tilde{\varphi}_n(\xi)_{|\xi=\frac{x}{b}},b\equiv\frac{\hbar}{m\omega}, \qquad (4)$$

а функція $\tilde{\varphi}_n(\xi)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_n(\xi)}{d\xi^2}+\left(\varepsilon_n-\xi^2\right)\tilde{\varphi}_n(\xi)=0,\varepsilon_n\equiv\frac{2E_n}{\hbar\omega} \qquad (5)$$

і виражається через поліноми Ерміта

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} \qquad (6)$$

формулою

$$\tilde{\varphi}_n(\xi)=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{n!2^n\ \pi}H_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\ . \qquad (7)$$

2. Рівноприскорений гармонічний осцилятор

Позначимо через К` РПСВ, яка рухається відносно ІСВ К зі сталим прискоренням $a$, причому в момент часу $t=0$ обидві системи відліку співпадають. Тоді координата і час $\{x',t'\}$ РПСВ К` пов'язані із координатою і часом $\{x,t\}$ ІСВ К співвідношеннями

$$\begin{cases}x'=x-\dfrac{at^2}{2}\\ t'=t\end{cases}. \qquad (8)$$

Нехай центр притягання гармонічного осцилятора рухається відносно ІСВ К за законом $x_0=\frac{at^2}{2}$. Згідно [4] хвильова функція такого осцилятора у РПСВ $\psi'^a(x',t')$ задовольняє рівняння

$$i\hbar\frac{\partial\psi'^a(x',t')}{\partial t'}=\hat{H}'^a\psi'^a(x',t'),\hat{H}'^a= =-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{m\omega^2}{2}x'^2+max' \ . \qquad (9)$$

Виділяючи у $\hat{H}'^a$ повний квадрат відносно x', гамільтоніан можна записати у вигляді

$$\hat{H}'^a=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{m\omega^2}{2}(x'+L)^2-\frac{maL}{2}, \quad L\equiv\frac{a}{\omega^2} \qquad .(10)$$

Для стаціонарних станів з енергією W

$$\psi'^a(x',t')=e^{-\frac{i}{\hbar}Wt'}\chi(x'),$$

де функція $\chi(x')$ задовольняє рівняння

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{m\omega^2}{2}(x'+L)^2-\frac{maL}{2}-W\right)\chi(x')=0$$

Позначаючи

$$b\equiv\frac{\hbar}{m\omega},E\equiv W+\frac{maL}{2} \qquad (12)$$

і вводячи безрозмірні величини

$$\xi'=\frac{x'+L}{b},\varepsilon\equiv\frac{2E}{\hbar\omega}, \qquad (13)$$

легко показати, що функція $\tilde{\chi}(\xi')\equiv\chi(x')_{|x'=b\xi'-L}$ задовольняє рівняння (5). Тоді, згідно з (14), (13), (7), (12) і (2)

$$\chi(x') = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} H_n\left(\frac{x'+L}{b}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'+L}{b}\right)^2}, \tag{15}$$

$$W_n = -\frac{ma^2}{2\omega^2} + \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right), \tag{16}$$

З формули (16) видно, що в результаті прискорення спектр енергії рівноприскореного гармонічного осцилятора зсувається вниз по відношенню до спектру інерціального гармонічного осцилятора на величину, пропорційну квадрату прискорення. Оскільки величина зсуву не залежить від сталої Планка $\hbar$, то він має чисто класичний характер. Вибираючи прискорення a досить великим, енергію основного стану (як і будь-якого іншого) можна зробити від'ємною. Для цього досить покласти $a > \sqrt{\hbar\omega^3/m}$.

3. Збудження осцилятора в результаті прискорення

Нехай центр притягання гармонічного осцилятора до моменту часу $t = 0$ покоївся відносно ІСВ К в точці $x_0 = 0$, а починаючи з цього моменту рухається з прискоренням a, так що $x_0 = at^2/2$. Яка ймовірність збудження гармонічного осцилятора внаслідок прискорення, якщо початково він перебував у стаціонарному стані з енергією E_n?

Обчислення зручно проводити в системі спокою гармонічного осцилятора. При $t < 0$ вона співпадає з інерціальною, а при $t > 0$ – з рівноприскореною. Згідно [4], хвильова функція у ІСВ $\psi(x,t)$ пов'язана із хвильовою функцією у РПСВ $\psi'(x',t')$ співвідношенням

$$\psi'(x',t') = \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} ma \cdot \left(\frac{at^3}{3} - \frac{a\omega^2 t^5}{40} - xt\right)\right) \cdot \psi(x,t)\right]_{\substack{t=t' \\ x=x'+at'^2/2}} \tag{17}$$

Для моменту часу $t = 0$ формула (17) дає

$$\psi'(x',0) = [\psi(x,0)]_{x=x'} = \psi(x',0) \quad . \tag{18}$$

Таким чином, отримуємо наступну крайову задачу: знайти функцію $\psi'_n(x',t')$, яка на множині $(-\infty < x' < +\infty) \times (0 < t' < +\infty)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$i\hbar\frac{\partial\psi'_n(x',t')}{\partial t'} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{m\omega^2}{2}x'^2 + max'\right]\psi'_n(x',t') \tag{19}$$

і початкову умову

$$\psi'_n(x',0) = \varphi_n(x'), \tag{20}$$

де $\varphi_n(x')$ дається формулами (4), (7), (6).

Для спрощення позначень опустимо надалі штрихи при $\{x',t'\}$ та $\psi'_n(x',t')$. Загальний розв'язок рівняння (19) згідно з розділом 2 має вигляд

$$\psi_n(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{nl}\psi_l'^{o}(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{nl} e^{-\frac{i}{\hbar}W_l t}\chi_l(x), \tag{21}$$

де $C_{nl} = \text{const}$, а $\chi_l(x)$ визначаються формулою (15). Умова (19) дає рівняння для знаходження сталих C_{nl} :

$$\varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{nl}\chi_l(x). \tag{22}$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(x)\chi_l(x)dx = \delta_{kl},$$

то

$$C_{nk}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)\chi_k(x)dx=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{n!k!2^{n+k}\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}H_n\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2}H_k\left(\frac{x+L}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+L}{b}\right)^2}dx. \quad (23)$$

Використовуючи формулу Родріга (6) і формулу Лейбніца для знаходження похідної k-го порядку від добутку двох функцій:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)^{(k)}=\sum_{l=0}^{k}C_k^l u^{(l)}(x)\cdot v^{(k-l)}(x), C_k^l=\frac{k!}{l!(k-l)!}, \quad (24)$$

можна вивести формулу

$$H_k\left(\frac{x}{b}+\frac{L}{b}\right)=\sum_{l=0}^{k}C_k^l H_l\left(\frac{x}{b}\right)\left(2\frac{L}{b}\right)^{k-l}. \quad (25)$$

Підставляючи (25) у (23) і позначаючи $N_n\equiv\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}$, отримаємо

$$\begin{aligned}C_{nk}&=N_nN_k\sum_{l=0}^{k}C_k^l\left(2\frac{L}{b}\right)^{k-l}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}H_n\left(\frac{x}{b}\right)H_l\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{x^2+xL+L^2/2}{b^2}}dx=\\&=N_nN_ke^{-\frac{L^2}{4b^2}}\sum_{l=0}^{k}C_k^l\left(2\frac{L}{b}\right)^{k-l}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}H_n\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{L}{2b}\right)^2}H_l\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{L}{2b}\right)^2}dx\end{aligned}. \quad (26)$$

Вводячи нову змінну інтегрування $y=x+\frac{L}{2}$ і повторно використовуючи формулу (25), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{L}{2b}\right)^2}H_l\left(\frac{x}{b}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{L}{2b}\right)^2}dx=\sum_{s=0}^{m}\frac{C_n^sC_l^s}{N_s^2}\left(-\frac{L}{b}\right)^{n+l-2s}, \quad (27)$$

де $m=\min\{n,l\}$. Підставляючи (27) у (26), знайдемо остаточно

$$C_{nk}=\frac{1}{\sqrt{n!2^n}\sqrt{k!2^k}}e^{-\frac{L^2}{4b^2}}\sum_{l=0}^{k}\sum_{s=0}^{m}s!C_k^lC_n^sC_l^s(-1)^{n+l-2s}\cdot2^{k-l+s}\left(\frac{L}{b}\right)^{n+k-2s}, m=\min\{n,l\}. \quad (28)$$

Якщо вихідний стан був вакуумним, $n=0$ і

$$\begin{aligned}C_{0n}&=\frac{1}{\sqrt{k!2^k}}e^{-\frac{L^2}{4b^2}}\left(\frac{L}{b}\right)^k\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^l\cdot2^{k-l}=\frac{1}{\sqrt{k!2^k}}e^{-\frac{L^2}{4b^2}}\left(\frac{L}{b}\right)^k\sum_{l=0}^{k}(-1+2)^k=\\&=\frac{1}{\sqrt{k!2^k}}e^{-\frac{L^2}{4b^2}}\left(\frac{L}{b}\right)^k\end{aligned} \quad (29)$$

Позначаючи

$$\bar{k}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{L}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{ma^2}{\hbar\omega^3}, \quad (30)$$

знайдемо, що ймовірність переходу осцилятора у k-й збуджений стан у цьому випадку рівна

$$\wp_k=|C_{0k}|^2=\frac{(\bar{k})^ke^{-\bar{k}}}{k!}, \quad (31)$$

що є нічим іншим як розподілом Пуассона із середнім значенням $\bar{k}$. Такий розподіл ймовірностей є характерним для когерентного стану гармонічного осцилятора. Отже, в результаті прискорення осцилятор із вакуумного стану перейде у когерентний.

4. Інтерпретація ефекту Фуллінга-Унру

Розглянемо деяке квантове поле. Добре відомо, що динамічні змінні вільного поля: енергію, імпульс та ін., можна представити у вигляді суми відповідних динамічних змінних гармонічних осциляторів із частотами що належать інтервалу $(\omega_0,+\infty)$ (ω_0 – "частота спокою"). Маючи на увазі саме це, для скорочення говоритимемо просто про *розклад поля по осциляторах*. Нехай К і К' – відповідно ІСВ і РПСВ із розділу 2. Кожен спостерігач розкладає поле по своїх осциляторах: інерціальний К – по інерціальних (І-осцилятори), рівноприскорений К' – по рівноприскорених (РП-осцилятори). В момент часу $t=0$ обидві системи відліку співпадають. Співпадають і осцилятори. Однак енергетичні рівні відповідних інерціальних і рівноприскорених осциляторів співпадати не будуть. Це зрозуміло, адже РП-осцилятори залишаються прискореними і в момент часу $t=0$, і тому їхній гамільтоніан міститиме додатковий доданок, зумовлений силами інерції. Стан квантового поля, коли всі його І-осцилятори перебувають у основному стані назвемо І-вакуумом, а стан, коли в основному стані перебувають РП-осцилятори – РП-вакуумом. Згідно результатів розділу 2, енергетичний спектр РП-осциляторів є зсунутим вниз по відношенню до енергетичного спектру І-осциляторів (формула(16)). РП-вакуум "лежить нижче" І-вакууму. Отже І-вакууму відповідає з точки зору РПСВ деякий збуджений стан. Так, згідно розділу 3, якщо І-осцилятори перебувають в основному стані (І-вакуум), то з точки зору РПСВ еквівалентним цьому стану є стан, когерентно збуджений над РП-вакуумом.

Література

1. S.A.Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
2. W.Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
3. Б.С.ДеВитт, в: *Общая теория относительности,* под ред. С.Хокинга (Мир, Москва, 1983) с. 297.
4. Р.Р.Ломпей, *Науковий вісник Ужг. Унів. Сер. Фіз.* **10**, 16 (2001).

INFLUENCE OF ACCELERATION ON THE EVOLUTION OF A QUANTUM MECHANICAL HARMONICAL OSCILLATOR

R.R.Lompay

Uzhhorod National University, Department of Theoretical Physics,
Voloshyna str. 32, Uzhhorod, 88000
e-mail: inbox@zk.arbitr.gov.ua

Wave functions of stationary states for a uniformly accelerated harmonical oscillator and its energy spectrum are obtained. The oscillator excitation due to the acceleration is studied. Based on the obtained results a descriptive interpretation of Fulling-Unruh effect is given.