ВИВЧЕННЯ ТРАНСФОРМАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ПЕРЕХОДІ В НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Р.Р.Ломпей

Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики,
вул.Волошина, 32, Ужгород, 88000
e-mail: inbox@zk.arbitr.gov.ua

На основі методу унітарних перетворень вивчено трансформаційні властивості хвильових функцій фізичних систем у нерелятивістській квантовій механіці при переході від інерціальної системи відліку до рівноприскореної. Знайдено явний вигляд гамільтоніанів у рівноприскореній системі відліку деяких простих систем, зокрема вільної частинки, частинки, яка перебуває в однорідному гравітаційному полі, та рівноприскореного гармонічного осцилятора. На основі цих результатів зроблено висновок про виконання принципу еквівалентності і у нерелятивістській квантовій механіці.

Вступ

Питання про трансформаційні властивості станів фізичних систем при переході від однієї системи відліку до іншої в нерелятивістській квантовій механіці добре вивчено лише для випадку інерціальних систем відліку (ІСВ) [1]. Але в останні роки виникла необхідність вивчення вказаних трансформаційних властивостей при переході і до неінерціальних систем відліку. Зокрема така задача виникає при аналізі проблеми випромінювання точкового заряду, коли детектор фотонів рухається з прискоренням. У даній роботі методом унітарних перетворень встановлено трансформаційні властивості хвильової функції та гамільтоніану при переході від ІСВ до рівноприскореної системи відліку (РПСВ). Отримано вирази для гамільтоніанів у РПСВ таких систем: вільної частинки, частинки, що перебуває в однорідному статичному гравітаційному полі та рівноприскореного гармонічного осцилятора. На основі цих результатів зроблено висновок про виконання принципу еквівалентності і у нерелятивістській квантовій механіці.

Метод унітарних перетворень

Нехай $|\rangle$ – вектор стану квантової системи, а $\hat{A},\hat{B},...$ – оператори спостережуваних в деякій системі відліку (СВ). Для того, щоб перейти до іншої СВ потрібно [2] виконати унітарне перетворення або над вектором стану $|\rangle$:

$$|\rangle\to|\rangle'=\hat{U}\,|\rangle, \tag{1}$$

або над операторами спостережуваних $\hat{A},...$:

$$\hat{A}\to\hat{A}'=\hat{U}^{+}\hat{A}\hat{U}\,,..., \tag{2}$$

де $\hat{U}$ – унітарний оператор:

$$\hat{U}\hat{U}^{+}=\hat{U}^{+}\hat{U}=1\,. \tag{3}$$

Середні значення в обох випадках будуть однаковими:

$$\langle|\hat{A}\,|\rangle'=\langle|\hat{U}^{+}\hat{A}\hat{U}\,|\rangle=\langle|\hat{A}'|\rangle\,. \tag{4}$$

Перетворення операторів (2) можна розглядати як аналог пасивного перетворення: фізична система залишається тією самою (стара фізична система), але ми описуємо її в термінах інших спостережуваних – *спостережуваних нової (штрихованої)* СВ. Перетворення ж вектора стану

(1) відповідає активному перетворенню: ми вводимо нову фізичну систему і описуємо її в термінах старих спостережуваних (спостережуваних вихідної СВ). При цьому нова система в термінах старих спостережуваних "виглядає" точно так само, як стара система в термінах спостережуваних нової СВ. Останнє і пояснює фізично однаковість результатів, отриманих способом (2) або (1). Математичним виразом цього є (4).

Перехід від ІСВ до РПСВ. Нехай К – ІСВ, а К`` – РПСВ, яка рухається відносно К зі сталим прискоренням $\vec{a}$, причому в момент часу $t=0$ обидві системи співпадають. Координати $\vec{r}$ та імпульс $\vec{p}$ частинки відносно ІСВ К пов'язані із координатами $\vec{r}''$ та імпульсом $\vec{p}''$ цієї частинки відносно РПСВ К`` співвідношеннями

$$\begin{cases} \vec{r}'' = \vec{r} - \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \vec{p}'' = \vec{p} - m\vec{a}t \end{cases}.$$

Приймемо, що такий самий зв'язок має місце і для відповідних операторів, тобто

$$\begin{cases} \hat{\vec{r}}'' = \hat{\vec{r}} - \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \hat{\vec{p}}'' = \hat{\vec{p}} - m\vec{a}t \end{cases}. \qquad (5)$$

Розглядатимемо (5) як унітарне перетворення типу (2) із деяким

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}}, \quad \hat{\vec{G}}^{+} = \hat{\vec{G}}. \qquad (6)$$

Для нескінченно малих $\delta\vec{a}$

$$\begin{cases} \hat{\vec{r}}'' = \hat{\vec{r}} - \delta\hat{\vec{r}},\ \delta\hat{\vec{r}} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{r}}\right] = \dfrac{t^2}{2}\,\delta\vec{a} \\ \hat{\vec{p}}'' = \hat{\vec{p}} - \delta\hat{\vec{p}},\ \delta\hat{\vec{p}} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{p}}\right] = mt\,\delta\vec{a} \end{cases} \qquad (7)$$

або, покомпонентно,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{G}_i, \hat{x}_j\right] = \dfrac{t^2}{2}\delta_{ij} \\ \dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{G}_i, \hat{p}_j\right] = mt\delta_{ij} \end{cases}. \qquad (8)$$

Співвідношення (8) можна задовольнити, поклавши

$$\hat{\vec{G}} = \hat{\vec{G}}_x + \hat{\vec{G}}_p - \frac{m\vec{a}t''^3}{12}, \qquad \hat{\vec{G}}_x = -\frac{t^2}{2}\hat{\vec{p}},\ \hat{\vec{G}}_p = mt\hat{\vec{r}} \qquad (9)$$

Відзначимо що, рівняння (8) визначають оператори $\hat{\vec{G}}$ лише з точністю до адитивної C-числової величини, можливо, залежної від часу.

Для скінченних $\vec{a}$, використовуючи формулу Кемпбелла-Хаусдорфа

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2}\left[\hat{A}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \ldots \qquad (10)$$

і враховуючи, що комутатори $\left[\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{r}}\right]$ та $\left[\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{p}}\right]$ є C-числами, отримаємо

$$\begin{cases} \hat{\vec{r}}'' = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}}\hat{\vec{r}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}} = \\ = \hat{\vec{r}} + \dfrac{1}{i\hbar}\left[\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{r}}\right] = \hat{\vec{r}} - \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \\ \hat{\vec{p}}'' = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}}\hat{\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}} = \hat{\vec{p}} + \left[\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}, \hat{\vec{p}}\right] = \hat{\vec{p}} - m\vec{a}t \end{cases}$$

що співпадає з (5). Отже генератори (9) справді генерують перетворення (5).

Знайдемо тепер, згідно з (1), новий вектор стану $|\rangle'$.

Оскільки $\left[\hat{\vec{G}}_x, \hat{\vec{G}}_p\right] \neq 0$, то

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\left(\hat{\vec{G}}_x + \hat{\vec{G}}_p\right)} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}_x}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{G}}_p}.$$

Однак $\left[\hat{G}_{xi}, \hat{G}_{pj}\right] = i\hbar\dfrac{mt^3}{2}\delta_{ij}$ є C-числом.

Для будь-яких операторів $\hat{A}, \hat{B}$, комутатор яких є C-числом, справедлива формула

$$e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)} = e^{\frac{1}{2}\left[\hat{B}, \hat{A}\right]}\cdot e^{\hat{A}}\cdot e^{\hat{B}}. \qquad (11)$$

Звідси

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{m\bar{a}^2t^3}{6}\right)\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\cdot\hat{\vec{G}}_p\right)\times \tag{12}$$
$$\times\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\bar{a}\cdot\hat{\vec{G}}_x\right)$$

Виберемо реалізацію операторів та вектору стану у вигляді

$$\begin{cases}\hat{\vec{r}}\to\vec{r}\\ \hat{\vec{p}}\to -i\hbar\nabla\\ |\rangle\to\psi(\vec{r},t)\end{cases}. \tag{13}$$

Тоді

$$\psi''(\vec{r},t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{m\bar{a}^2t^3}{6}\right)\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}t\bar{a}\cdot\vec{r}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{t^2}{2}\bar{a}\cdot\nabla\right)\psi(\vec{r},t)=$$
$$=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m\bar{a}\cdot\left(\frac{\bar{a}t^3}{6}+\vec{r}t\right)\right)\psi\left(\vec{r}+\frac{\bar{a}t^2}{2},t\right)$$

або

$$\psi''(\vec{r}'',t'')=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m\bar{a}\cdot\left(\frac{\bar{a}t''^3}{6}+\vec{r}''t''\right)\right)\times$$
$$\times\psi\left(\vec{r}''+\frac{\bar{a}t''^2}{2},t''\right) \tag{14}$$

Вводячи координати РПСВ К` (координатну сітку, а не оператори координат!) за формулами

$$\begin{cases}\vec{r}''=\vec{r}-\dfrac{\vec{a}t^2}{2}\\ t''=t\end{cases},\quad \begin{cases}\vec{r}=\vec{r}''+\dfrac{\vec{a}t''^2}{2}\\ t=t''\end{cases}, \tag{15}$$

формулу (14) можна записати у вигляді

$$\psi''(\vec{r}'',t'')=$$
$$=\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}m\bar{a}\cdot\left(\frac{\bar{a}t^3}{3}-\vec{r}t\right)\right)\cdot\psi(\vec{r},t)\right]_{\substack{t=t''\\ \vec{r}=\vec{r}''+\bar{a}t''^2/2}} . \tag{16}$$

Обернене перетворення:

$$\psi(\vec{r},t)=\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}m\bar{a}\cdot\left(\frac{\bar{a}t''^3}{6}+\vec{r}''t''\right)\right)\cdot\psi''(\vec{r}'',t'')\right]_{\substack{t''=t\\ \vec{r}''=\vec{r}-\bar{a}t^2/2}}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m\bar{a}\cdot\left(\frac{\bar{a}t^3}{3}+\vec{r}t\right)\right)\cdot\psi''\left(\vec{r}-\frac{\bar{a}t^2}{2},t\right). \tag{17}$$

Гамільтоніан у новій системі відліку. Принцип еквівалентності

Метод унітарних перетворень дає можливість знайти також гамільтоніан у новій системі відліку. Якщо вектор стану $|\rangle$ задовольняє рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\rangle=\hat{H}\,|\rangle, \tag{18}$$

то, використовуючи (1) знайдемо, що вектор стану $|\rangle'$ задовольняє рівняння

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\rangle'=\hat{H}'\,|\rangle', \tag{19}$$

де

$$\hat{H}'=-i\hbar\hat{U}\frac{\partial\hat{U}^+}{\partial t}+\hat{U}\hat{H}\hat{U}^+. \tag{20}$$

Знайдемо гамільтоніан $\hat{H}'$ в РПСВ для деяких частинних випадків, а саме: 1) для вільної частинки; 2) для частинки, що перебуває в однорідному статичному ньютоновому гравітаційному полі; 3) для рівноприскореного гармонічного осцилятора.

Використовуючи формули (12), (10), знайдемо, що

$$-i\hbar\hat{U}\frac{\partial\hat{U}^+}{\partial t}=\bar{a}\cdot\left(m\hat{\vec{r}}-\hat{\vec{p}}t-\frac{m\bar{a}t^2}{2}\right). \tag{21}$$

Для вільної частинки

$$\hat{H}_0=\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m},\hat{U}\hat{H}_0\hat{U}^+=\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}+\bar{a}\cdot\left(\hat{\vec{p}}t+\frac{m\bar{a}t^2}{2}\right). \tag{22}$$

Для частинки, що перебуває у однорідному гравітаційному полі

$$\hat{H}_g = \hat{H}_0 - m\vec{g}\cdot\hat{\vec{r}}, \hat{U}\hat{H}_g\hat{U}^+ =$$
$$= \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}t - m\vec{g}\cdot\hat{\vec{r}} + \frac{mt^2}{2}\left(\vec{a}^2 - \vec{g}^2\right). \quad (23)$$

Для рівноприскореного гармонічного осцилятора

$$\hat{H}_h = \hat{H}_0 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{\vec{r}} - \frac{\vec{a}t^2}{2}\right)^2,$$
$$\hat{U}\hat{H}_h\hat{U}^+ = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}t + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\vec{r}}^2 + \frac{m\vec{a}^2t^2}{2}\left(1 - \frac{\omega^2t^2}{4}\right) \quad (24)$$

Підставивши (21)–(24) у (20), отримаємо

$$\hat{H}_0'' = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + m\vec{a}\cdot\hat{\vec{r}}, \quad (25)$$

$$\hat{H}_g'' = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + m(\vec{a} - \vec{g})\cdot\hat{\vec{r}} - \frac{m\vec{g}^2t^2}{2}, \quad (26)$$

$$\hat{H}_h = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\vec{r}}^2 + m\vec{a}\cdot\hat{\vec{r}} - \frac{m\vec{a}^2\omega^2t^4}{8}. \quad (27)$$

Останні доданки у правих частинах (26), (27) є C-числовими функціями від часу. Вони можуть бути усунені унітарним перетворенням вектора стану і одночасно операторів спостережуваних. Справді, якщо $|\rangle$ задовольняє рівняння

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\rangle = \left(\hat{H} + f(t)\right)|\rangle,$$

де $f(t)$ – C-числова функція від часу, то

$$|\rangle' = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int f(t)dt\right)|\rangle \quad (28)$$

задовольняє рівняння

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\rangle' = \hat{H}|\rangle'.$$

Оператори спостережуваних при такому перетворенні не змінюються:

$$\hat{A}' = e^{\frac{i}{\hbar}\int f(t)dt}\hat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}\int f(t)dt} = \hat{A}.$$

Тому вказані C-числові доданки у (26), (27) можна просто відкинути. Тоді

$$\hat{H}_g'' = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + m(\vec{a} - \vec{g})\cdot\hat{\vec{r}}, \quad (29)$$

$$\hat{H}_h = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\vec{r}}^2 + m\vec{a}\cdot\hat{\vec{r}}. \quad (30)$$

Порівнюючи $\hat{H}_0$ у (22) із $\hat{H}_g''$ у (29) і $\hat{H}_g$ у (23) із $\hat{H}_0''$ у (25) бачимо, що при $\vec{g} \approx -\vec{a}$ мають місце рівності

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_g'', \quad (31)$$

$$\hat{H}_g = \hat{H}_0''. \quad (32)$$

Останні означають, що у розглянутих прикладах на квантовому рівні виконується принцип еквівалентності Ейнштейна: квантова частинка, яка "падає" в однорідному статичному гравітаційному полі напруженості $(-\vec{a})$, еволюціонує з точки зору РПСВ К`` точно так само як і вільна частинка з точки зору ІСВ К (рівність (31)); вільна частинка еволюціонує з точки зору РПСВ К`` точно так же як і частинка, поміщена в однорідне статичне гравітаційне поле з точки зору ІСВ К (рівність (32)).

Роботу виконано за часткової підтримки ДФФД України, договір № Ф7/458-2001.

Література

1. В.И.Фущич, А.Г.Никитин. *Симметрия уравнений квантовой механики* (Наука, Москва. 1990)
2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, Москва. 1984)

INVESTIGATION OF WAVE FUNCTION TRANSFORMATIONAL PROPERTIES AT THE TRANSITION TO NON-INERTIAL REFERENCE FRAMES

R.R.Lompay

Uzhhorod National University, Department of Theoretical Physics,
Voloshyn str. 32, Uzhhorod, 88000.
e-mail: inbox@zk.arbitr.gov.ua

Based on the unitary transformation method the transformational properties of physical system wave functions in nonrelativistic quantum mechanics are studied for the case of the transition from an inertial frame of reference to a uniformly accelerated one. The explicit form for Hamiltonians in an uniformly accelerated reference frame for some simple systems, namely a free particle, a particle in a homogeneous gravitational field and a uniformly accelerated harmonic oscillator, is found. On the base of these results a conclusion is made on the equivalence principle validity in non-relativistic quantum mechanics.