Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. № 7. – 2000

РОЗКЛАДИ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЧАСТИНКИ ЗМІННОЇ МАСИ ПО НЕЗВІДНИХ ПРЕДСТАВЛЕННЯХ ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА *SO*(1,4) (РЕДУКЦІЯ *SO*(1,4) ⊃ *ISO*(3))

І.І. Качурик

Технологічний університет Поділля, 280016, Хмельницький-16, вул. Інститутська, 11

Хвильова функція, яка описує вільну частинку змінної маси, визначається як функція на конусі C^4 5-вимірного імпульсного простору Мінковського. На C^4 введені три ортогональні системи координат, що відповідають різним редукціям $SO(1,4)$ на евклідову підгрупу $ISO(3)$, і для кожної із них побудовані базисні функції, які реалізують незвідні унітарні представлення групи $SO(1,4)$. Виведені формули, які розкладають хвильову функцію по цих базисних функціях. Обговорюється можливість застосування формул розкладу для класифікації по $SO(1,4)$-представленнях станів частинки із неперервним спектром маси.

Масу m вільної релятивістської частинки введемо [1] як незалежну змінну, зв'язану з координатою p_4 5-імпульсу $p=(p_0,\mathbf{p},p_4)$ рівністю $m=|p_4|$, $-\infty<p_4<\infty$ (тут всюди $\hbar=c=1$); при цьому p_4 розглядується як координата типу компонент 3-імпульсу $\mathbf{p}$. У результаті $ISO(1,3)$-інваріантне співвідношення $p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2$ (μ,ν=0,1,2,3) переходить в $ISO(1,4)$--інваріантне співвідношення

$$p_\mu p^\mu - m^2 = \\ = p_\mu p^\mu + p_4 p^4 = p_a p^a = g_{ab}p^a p^b = 0, \\ g_{00}=1,\ g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}, \\ a,\ b = 1, 2, 3, 4;\quad \alpha,\ \beta = 1, 2, 3, 4,$$

яке визначає рівняння конуса C^4 в $(1+4)$-вимірному імпульсному просторі Мінков-ського $M^{(1+4)}$. В подальшому будемо роз-глядувати тільки верхню порожнину C_+^4 конуса C^4 ($p_0>0$). $ISO(1,4)$-скалярну хвильову функцію в p-представленні по-значимо через $\Psi(p)$. Допустимо, що вона задовільняє $ISO(1,4)$-інваріантне рівняння

$$g_{ab}p^a p^b \Psi(p) = 0, \tag{1}$$

яке представляє собою рівняння Клейна-Гордона для частинки змінної маси, записане у п'ятивимірній формі. Тоді при перетвореннях із групи $ISO(1,4)$ вона буде перетворюватись по незвідному представленню. При перетвореннях $\Lambda \in SO(1,4) \subset \subset ISO(1,4)$ $\Psi(p)$ перетворюється по квазирегулярному представленню групи $SO(1,4)$

$$\Psi(p) = S(\Lambda)\Psi(p) = \Psi(\Lambda^{-1}p), \tag{2}$$

яке унітарне відносно норми

$$\|\Psi(p)\| = \int_{C_+^4} (d^4p/p_0)|\Psi(p)|^2 < \infty,$$

але, взагалі кажучи, може бути звідним. У зв'язку з цим виникає питання про розклад його на незвідні компоненти, що еквівалентне розкладу $\Psi(p)$ по базисних функціях на конусі C_+^4, які реалізують незвідні представлення групи $SO(1,4)$. Зробимо це в системах координат на C_+^4, які відповідають редукції $SO(1,4)$ на евклідову підгрупу $ISO(3)$. У рамках цього звуження розглянемо такі три різні випадки: $ISO(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$ (орисферична система O), $ISO(3) \supset T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$ (орисферично-трансляційна система OT),

$ISO(3)\supset ISO(2)\otimes T_\perp \supset SO(2)\otimes T_\perp$ (орисферично-циліндрична система ОС). Тут T_i – перетворення трансляцій вздовж i-ої осі у тривимірному евклідовому просторі, група рухів якого $ISO(3)$; $T_\perp$ – група перетворень трансляцій вздовж прямої, перпендикулярної до тої площини, групою рухів якої є підгрупа $ISO(2)$.

У цих системах координат C_+^4 параметризується слідуючим чином.

О-система:

$$p_0 = e^a\left(r^2+1\right)/2,\ p_1 = e^a r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$p_2 = e^a r\sin\theta\sin\varphi,\ p_3 = e^a r\cos\theta,$$
$$p_4 = e^a\left(r^2-1\right)/2, \tag{3}$$

$-\infty < a < \infty$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$;

ОТ-система:

$$p_0 = e^a\left(x^2+1\right)/2,\ \mathbf{p} = e^a\mathbf{x},$$
$$p_4 = e^a\left(x^2-1\right)/2,\ x^2 = \mathbf{x}^2, \tag{4}$$

$-\infty < a < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1,2,3$;

ОС-система:

$$p_0 = e^a\left(\xi^2+z^2+1\right)/2,\ p_1 = e^a\xi\cos\varphi,$$
$$p_2 = e^a\xi\sin\varphi,\ p_3 = e^a\xi,$$
$$p_4 = e^a\left(\xi^2+z^2-1\right)/2, \tag{5}$$

$-\infty < a < \infty$, $0 \le \xi < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Базисні функції у кожній із систем можна знайти як добуток загальних власних функцій операторів повного набору, який складається із інваріантів групи $SO(1,4)$ і її підгруп, що входять у відповідний ланцюжок редукції. Генератори J_{ab} алгебри $so_{1,4}$ задовільняють комутаційні співвідношення

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i\left(g_{ad}J_{bc} - g_{ac}J_{bd} + g_{bc}J_{ad} - g_{bd}J_{ac}\right).$$

Повні набори утворюються із таких операторів: $F = P_0^2 + \mathbf{N}^2 - (\mathbf{P}+\mathbf{M})^2$, $\mathbf{E}^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$, $\mathbf{M} = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$, M_3 (редукція $SO(1,4)\supset ISO(3)\supset SO(3)\supset SO(2)$); F, $\mathbf{E}^2$, E_i, $i = 1,2,3$ (редукція $SO(1,4)\supset ISO(3)\supset T_1\otimes T_2\otimes T_3$); F, $\mathbf{E}^2$, $\widetilde{E}^2 = E_1^2 + E_2^2$, E_3, M_3 (редукція $SO(1,4)\supset ISO(3)\supset ISO(2)\otimes T_\perp \supset SO(2)\otimes T_\perp$). Тут $P_0 \equiv J_{04}$, $\mathbf{N} = \left(N_1 \equiv J_{01}, N_2 \equiv J_{02}, N_3 \equiv J_{03}\right)$, $\mathbf{M} = \left(M_1 \equiv J_{23}, M_2 \equiv J_{31}, M_3 \equiv J_{12}\right)$, $\mathbf{P} = \left(P_1 \equiv J_{14}, P_2 \equiv J_{24}, P_3 \equiv J_{34}\right)$, $E_i = P_i + N_i$, $i = 1, 2, 3$. Саме для цих інваріантів, розглядуваних як диференціальні оператори на C_+^4, розділюються змінні (параметри координатних систем). Приведемо явні вирази для них (див. також [2]).

О-система:

$$\mathbf{E}^2 = -\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right],$$

$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\mathbf{M}^2 = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right),$$

$$F = -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 3\frac{\partial}{\partial a}.$$

ОТ-система:

$$\mathbf{E}^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right),$$

$$F = -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 3\frac{\partial}{\partial a},$$

$$E_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1,2,3.$$

ОС-система:

$$\mathbf{E}^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

$$E_3 = -i\frac{\partial}{\partial z},\ M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\widetilde{E}^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right),$$

$$F = -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 3\frac{\partial}{\partial a}.$$

Власні значення цих операторів:

$$\nu(F) = -(\rho^2 + 9/4),\ \nu(\mathbf{E}^2) = \kappa^2,$$
$$\nu(\mathbf{M}^2) = l(l+1),\ \nu(\widetilde{E}^2) = \eta^2,\ \nu(M_3) = m,$$
$$\nu(E_3) = \kappa_3 \equiv q,\ (\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2),$$

де

$$-\infty < \rho < \infty,\ 0 \le \kappa < \infty,\ l = 0,1,\ldots,$$
$$-l \le m \le l,\ -\infty < q < \infty,\ 0 \le \eta < \infty.$$

Як бачимо, у всіх системах координат оператор Казиміра F групи $SO(1,4)$ у диференціальній формі має один і той же вигляд. Із рівняння на власні функції цього оператора випливає, що розв'язок $\exp(-3/2 + i\rho)a$ є однорідною функцією від $\exp a$ степеня однорідності $-3/2 + i\rho$. Це означає, що розклад на конусі включає у себе розклад по однорідних функціях.

Випишемо нормовані власні функції інших операторів повного набору у кожній системі координат (див. [2]).

О-система:

$$J_{lm}^{r}(r,\theta,\varphi) = (\kappa r)^{-1/2} J_{l+1/2}(\kappa r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad (6)$$

де: $J_{l+1/2}(\kappa r)$ – функція Бесселя,

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ – $SO(3)$-сферична функція.

Умова нормування

$$\int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_{lm}^{\kappa}(r,\theta,\varphi)\, \overline{J_{l'm'}^{\kappa'}(r,\theta,\varphi)} = \frac{\delta(\kappa - \kappa')}{\kappa^2}\, \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}.$$

ОТ-система:

$$J_{\hat{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\hat{\mathbf{e}}\mathbf{x}), \quad (7)$$
$$\int_{R^3} d\mathbf{x}\, J_{\hat{\mathbf{e}}}(\mathbf{x})\, \overline{J_{\hat{\mathbf{e}}'}(\mathbf{x})} = \delta(\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}').$$

ОС-система:

$$J_m^{\eta q}(\xi, z, \varphi) = (2\pi)^{-1} J_m(\eta\xi) \exp(iqz) \exp(im\varphi), \quad (8)$$
$$\int_0^\infty d\xi\, \xi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_m^{\eta q}(\xi, z, \varphi)\, \overline{J_{m'}^{\eta' q'}(\xi, z, \varphi)} = \frac{\delta(\eta - \eta')}{\eta}\, \delta(q - q')\, \delta_{mm'}.$$

Базисна функція на конусі C_+^4 у кожній координатній системі представляється як добуток $\exp(-3/2 + i\rho)a$ на одну із функцій (6)-(8).

Повернемось до рівності (2), яка визначає представлення $S(\Lambda)$ групи $SO(1,4)$ на функціях $\Psi(p)$, заданих на конусі C_+^4 (C_+^4 розглядається як поверхня транзитивності даної групи). Розклад цього представлення на незвідні зводиться до розкладу $\Psi(p)$ по однорідних компонентах. Це можна зробити унітарним інтегральним перетворенням Мелліна:

$$\Psi(p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho\, \Phi(p;\rho), \quad (9)$$

$$\Phi(p;\rho) = \int_0^\infty dt\, t^{1/2 - i\rho}\, \Psi(tp), \quad (10)$$

де $\Phi(p;\rho)$ – однорідна функція від ρ степеня однорідності $-3/2 + i\rho$:

$$\Phi(cp;\rho) = c^{-3/2 + i\rho}\, \Phi(p;\rho),\ c > 0. \quad (11)$$

При цьому, як показано у [3], представленню $S(\Lambda)$ відповідають унітарні незвідні представлення $S^\rho(\Lambda)\Phi(p;\rho) = \Phi(\Lambda^{-1}p;\rho)$ у просторі однорідних функцій на конусі C_+^4. Далі розклад ведеться на контурі Γ, що пересікає по одному разу кожну твірну конуса C_+^4. Виберемо у ролі такого контура переріз C_+^4 із площиною $p_0 - p_4 = 1$. Оскільки функція $\Phi(p;\rho)$ однорідна, то вона однозначно визначається своїми значеннями на контурі Γ. Позначимо через $\varphi(k;\rho)$, $k \in \Gamma$, функцію на Γ, яка співпадає з обмеженням $\Phi(p;\rho)$ на Γ. Її можна одержати із $\Phi(p;\rho)$ слідуючим чином. Із (3)-(5) видно, що кожна точка $p \in C_+^4$ у кожній із роз-глядуваних систем координат представля-ється у вигляді $p = \omega k$, де $\omega = \exp a > 0$. А тому згідно (11) справедливе спів-відношення

$$\Phi(p;\rho) = \Phi(\omega k;\rho) = \omega^{-3/2 + i\rho}\, \varphi(k;\rho), \quad (12)$$

яке і визначає $\varphi(k;\rho)$. Із врахуванням (12) формули (9) і (10) приймають вигляд

$$\Psi(p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho\, \omega^{-3/2+i\rho}\, \varphi(k;\rho), \qquad (13)$$

$$\varphi(k;\rho) = \omega^{3/2-i\rho} \int_{0}^{\infty} dt\, t^{1/2-i\rho}\, \Psi(tp).$$

Щоб одержати остаточні формули для розкладу $\Psi(p)$ у розглядуваних системах координат, необхідно провести у кожній із них розклад $\varphi(k;\rho)$ по функціях тих координат системи, які параметризують контур Γ. Займемося цим.

Розклад в О-системі

Параметризуємо контур Γ координатами r, θ, φ так, як це випливає із формул (3). Функцію $\varphi(k;\rho)$, визначену на Γ, розкладемо по функціях (6):

$$\varphi(k;\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_{0}^{\infty} d\kappa\, \kappa^2 A_{lm}^{\rho\kappa}\, J_{lm}^{\kappa}(k). \qquad (14)$$

Формула оберненого перетворення має вигляд

$$A_{lm}^{\rho\kappa} = \int_{\Gamma} dk\, \varphi(k;\rho)\, \overline{J_{lm}^{\kappa}(k)},$$

$$dk = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Підставляючи (14) у (13), знаходимо остаточну формулу для розкладу $\Psi(p) = \Psi(a,r,\theta,\varphi)$ в О-системі:

$$\Psi(a,r,\theta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{0}^{\infty} d\kappa\, \kappa^2 A_{lm}^{\rho\kappa} e^{(-3/2+i\rho)a} J_{lm}^{\kappa}(r,\theta,\varphi). \qquad (16)$$

Розклад в ОТ-системі

Параметризуємо контур Γ координатами x_1, x_2, x_3 згідно формул (4). Розкладемо $\varphi(k;\rho)$ по функціях (7):

$$\varphi(k;\rho) = \int_{R^3} d\hat{e}\, A^{\rho\hat{e}}\, J_{\hat{e}}(\mathbf{x}),$$

$$A^{\rho\hat{e}} = \int_{\Gamma} dk\, \varphi(k;\rho)\, \overline{J_{\hat{e}}(\mathbf{x})}, \quad dk = d\mathbf{x}.$$

У результаті формула для розкладу $\Psi(p) = \Psi(a,\mathbf{x})$ у цій системі координат приймає такий вигляд:

$$\Psi(a,\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{R^3} d\hat{e}\, A^{\rho\hat{e}}\, e^{(-3/2+i\rho)a} J_{\hat{e}}(\mathbf{x}). \qquad (16)$$

Розклад в О-системі

На контурі Γ введемо параметри ξ, z, φ у відповідності з формулами (5). У цих параметрах розкладемо $\varphi(k;\rho)$ по системі функцій (8):

$$\varphi(k;\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} d\eta\, \eta \int_{-\infty}^{\infty} dq\, A_m^{\rho\eta q}\, J_m^{\eta q}(k), \qquad (17)$$

$$A_m^{\rho\eta q} = \int_{\Gamma} dk\, \varphi(k;\rho)\, \overline{J_m^{\eta q}(k)},$$

$$dk = \xi\, d\xi\, dz\, d\varphi.$$

Підставляючи (17) у (13), знаходимо, що в ОС-системі формула для розкладу функції $\Psi(p) = \Psi(a,\xi,z,\varphi)$ має вигляд

$$\Psi(a,\xi,z,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{0}^{\infty} d\eta\, \eta \int_{-\infty}^{\infty} dq A_m^{\rho\eta q} e^{(-3/2+i\rho)a} J_m^{\eta q}(\xi,z,\varphi). \qquad (18)$$

Використовуючи приведені раніше співвідношення ортогональності для функцій на Γ, можна легко одержати вирази для коефіцієнтів розкладу у кожній координатній системі на C_+^4.

Формули (15), (16), (18) дають розклад хвильової функції $\Psi(p_0,\mathbf{p},p_4)$, яка описує частинку довільної маси $m = |p_4|$, по незвідних унітарних представленнях однорідної групи де Сіттера $SO(1,4)$ при різних звуженнях її на підгрупу $ISO(3)$. (Для хвильової функції, що описує скалярну частинку фіксованої маси, аналогічна задача була вперше поставлена і вирішена в рамках групи Лоренца (у декартових координатах) у роботі [4]. Такими розкладами здійснюється класифікація станів частинки по квантових числах, зв'язаних із власними значеннями інваріантів групи

$SO(1,4)$ і її підгруп, що входять у відповідний ланцюжок звуження.

Одержані формули можна пристосувати до розгляду частинок, які мають неперервну масу у заданому інтервалі. Ідея полягає у тому (див. [5]), щоб порушити $ISO(1,4)$ -симетрію рівняння (1) до $ISO(1,3)$-симетрії. Після такого порушення воно набуває вигляду

$$p_\mu p^\mu \Psi(p) = m^2 \Psi(p),\ m = |p_4|.$$

Тепер, якщо тут взяти $m_1 \le p_4 \le m_2$, замість $p_4 = m$, то одержане рівняння

$$p_a p^a (m_1 \le p_4 \le m_2) \Psi(p) = 0 \qquad (19)$$

буде, як це легко бачити, пуанкаре-інваріантним і описуватиме частинку із спектром маси у заданому інтервалі.

Коли ми бажали б описати частинку, яка розпадається і характеризується спектром маси, то природно звернутися до неунітарних представлень групи Пуанкаре $ISO(1,3)$, оскільки її унітарні представлення відповідають збереженню ймовірності. Це, у свою чергу, веде до розгляду неунітарних представлень вищої групи симетрії $ISO(1,4)$. Виявляється, що при цьому достатньо обмежитися тими представленнями цієї групи, які відповідають комплексному 5-імпульсу π_a, який задовільняє співвідношення

$$\pi_a \pi^a = 0,\ \pi_a = p_a + i q_a,\ q_a \sim p_a.$$

Аналіз показує (див. [5]), що вільна нестабільна скалярна частинка із неперервним спектром маси повинна задовільняти рівняння

$$\left[\pi_\mu \pi^\mu + \pi_4 \pi^4 \theta(m_1, m_2)\right] \Psi(p) = 0, \qquad (20)$$

де $p_4 = \operatorname{Re} \pi_4$; $\theta(x_1, x_2)$ дорівнює 1, коли $x_1 \le x \le x_2$, або 0 – у інших випадках.

Із наведеного вище у принципі ясно, як прийти до класифікації по представленнях групи $ISO(1,4)$ частинок, які мають неперервну масу у заданому інтервалі: для цього в одержаних формулах розкладу $\Psi(p)$ треба обмежити значення змінної p_4 так, щоб задовільнялось рівняння (19). Що стосується хвильової функції $\Psi(\pi)$ у формулі (20), то тут справа складніша і потребує додаткового вивчення.

1. J.A. De-Voos, J. Hilgervood. Five-dimensional aspect of free particle motion, Nucl. Phys., B1, 495(1967).
2. А.У. Климык, И.И. Качурик. Вычислительные методы в теории представлений групп, К., Вища школа (1986), 225 с.
3. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., Наука (1976), 588 с.
4. И.С. Шапиро. Разложение волновой функции по неприводимым представлениям группы Лоренца, Докл. АН СССР, 106, 647 (1956).
5. M. Humi. Wave equations for unstable particles, J. Math. Phys., 11, 2222(1970).

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. № 7. – 2000

AN EXPANSIONS OF THE WAVE FUNCTION OF A PARTICLE WITH VARIABLE MASS OVER THE IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE DE SITTER GROUP *SO*(1,4) (REDUCTION *SO*(1,4) ⊃ *ISO*(3))

I.I. Kachurik

Technological University of Podillia, 280016, Khmelnitsky, Institutskaja str., 11

The wave function, which is sintable to describe a free particle with variable mass is defined as a function on the cone C^4 in a 5-dimetional Minkowsky momentum space. Three orthogonal coordinate systems on C^4corresponding a different reductions of $SO(1,4)$ onto Euclidean $ISO(3)$ subgroup are introduced and for every of those basic functions that realize unitary irreducible representations of $SO(1,4)$ are constructed. In terms of these functions an expansions for the wave functions are obtained. A possibility to use the expansion formulaes for classifications in $SO(1,4)$-representations of a particle states with a continuous mass spectrum are discussed too.