

ЕНЕРГІЯ ЗВ'ЯЗКУ ОСНОВНОГО СТАНУ ОДНОВИМІРНОГО АТОМУ "ГЕЛІУ" У МЕТОДІ ГІПЕРСФЕРИЧНИХ КООРДИНАТ

М.С. Чундак

Кафедра теоретичної фізики

У рамках адіабатичного підходу методу гіперсферичних координат проведені розрахунки енергій $^{1,3}\text{S}$ - станів одновимірного атому гелію. Розрахунки адіабатичних потенціалів проведені при трьох значеннях параметру регуляризації матричних елементів оператора потенціальної енергії системи. Ці розрахунки дали змогу екстраполювати значення енергій за формулою Річардсона на нульове значення параметру регуляризації. Показано, що енергії $^{1,3}\text{S}$ - станів змінюються у досить широкому інтервалі енергій від 0 до 70 Ry.

Квантово-механічна задача трьох тіл має важливе значення для побудови загальної теорії N-частинкової задачі, адже їй притаманні усі основні особливості N-частинкової задачі. Точний розв'язок тричастинкової задачі можна провести лише для дуже обмеженого класу взаємодій між частинками. Так, наприклад, Калоджеро у роботах [1, 2] в аналітичному вигляді розв'язав задачу трьох тіл, які мають однакові маси для модельного потенціалу взаємодії між i -ою та j -ою частинками, аналітичний вид якої задається формулою

$$V(x_i, x_j) = \frac{1}{4} m \omega^2 (x_i - x_j)^2 + g (x_i - x_j)^{-2}$$

де m - маса частинки, x_i - координата i -ої частинки, g - та ω - константи, які характеризують інтенсивність взаємодії

між частинками. У роботі [3] розглянута модель для N-частинкової задачі із потенціалом взаємодії, що описується дельта-функціональною залежністю

$$V(x_i, x_j) = g_{ij} \delta(x_i - x_j),$$

де $g_{ij} = g < 0$ – константа парної взаємодії між частинками. Показано, що така модель має лише один зв'язаний стан, енергія якого дорівнює

$$E = \frac{1}{48} g^2 N(N^2 - 1) R y,$$

а хвильова функція основного стану має наступний аналітичний вираз:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = C e^{-\frac{g}{4} \sum_{i < j=1}^N |x_i - x_j|},$$

де C – константа нормування.

Інтерес до задачі трьох тіл, які взаємодіють із реалістичними потенціалами, значно зріс у зв'язку з експериментальними дослідженнями надструктур у фізиці твердого тіла. Експериментально спостерігались негативно та позитивно заряджені іони екситонів (ehc, heh) [4, 5]. Такі мало-частинкові комплекси мають практичне застосування у прикладних задачах квантової електроніки. Існування подібних комплексів у напівпровідникових матеріалах було передбачено М. Ломпертом [6] у 1958 році.

У даній роботі ми застосуємо адіабатичний гіперсферичний підхід для опису квантових станів тричастинкової системи одновимірного атому гелію. Відомо, що така модель була розглянута Лапідусом [7] у варіаційному підході. У якості пробної хвильової функції була взята наступна експоненціальна функція:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = N e^{-\frac{Z'}{a_0} (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_3|)},$$

де N – константа нормування, $Z=1,75$ – ефективний заряд ядра, $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ – Борівський радіус. Мінімум енергії основного стану дорівнює $6,125 R_y$, який досягається при вказаному значенні ефективного заряду ядра. У гіперсферичному підході така модель вже була розглянута у роботі [8] із врахуванням тільки основної $K=0$ гармоніки. У даній роботі ми розглянемо внесок і вищих гармонік у значення основного стану.

Одновимірне рівняння Шредінгера для системи трьох частинок, які взаємодіють за законом Кулона

Нерелятивістське рівняння Шредінгера для системи трьох частинок у атомній системі одиниць ($m_e = \hbar = e = 1$) має вигляд [8]

$$\left[-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2m_3} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + V(x_1, x_2, x_3) \right] \psi(x_1, x_2, x_3) = \tilde{E} \psi(x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

де m_i – маса i -ої частинки, x_i – положення i -ої частинки, \tilde{E} – повна енергія системи, $\psi(x_1, x_2, x_3)$ – хвильова функція системи, $V(x_1, x_2, x_3)$ – оператор потенціальної енергії взаємодії між частинками, яка задається наступним співвідношенням:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{z_1 z_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{z_1 z_3}{|x_1 - x_3|} + \frac{z_3 z_2}{|x_3 - x_2|}, \quad (2)$$

де z_i – заряд i -ої частинки. Перші три доданки у рівнянні (1) представляють оператор кінетичної енергії системи.

Оскільки ми обмежились розглядом лише парної взаємодії між частинками, то потенціальна енергія (2) системи залежить лише від відносних відстаней між частинками, тому рівняння (1) допускає розділення змінних. Для розділення змінних необхідно ввести відносні координати Якобі, тобто перейдемо від незалежних змінних x_1, x_2, x_3 , які задають положення частинок системи до незалежних змінних Якобі R, ρ, τ , що задають положення центру мас системи та відносні відстані між частинками, відповідно. Зв'язок між цими незалежними змінними задається наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ \rho = d(x_1 - x_2), \\ \tau = \tilde{d} \left(x_1 - \frac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_2 + m_3} \right), \end{cases} \quad (3)$$

де d і \tilde{d} - деякі константи, величини яких будуть визначені у подальшому.

Вираз для оператора кінетичної енергії у відносних координатах Якобі має вигляд:

$$T_k = -\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right), \quad (4)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$ - повна маса системи, μ - приведена маса системи, причому $\mu = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{M}}$.

Рівняння Шредінгера (1) у відносних змінних Якобі (3) набуде наступного вигляду:

$$(T_k + V(\rho, \tau))\psi(R, \rho, \tau) = \tilde{E}\psi(R, \rho, \tau), \quad (5)$$

де

$$V(\rho, \tau) = \frac{\tilde{d} z_1 z_2}{\left| \tau - \frac{\tilde{d} m_3}{d m_{23}} \rho \right|} + \frac{\tilde{d} z_1 z_3}{\left| \tau + \frac{\tilde{d} m_2}{d m_{23}} \rho \right|} + \frac{d z_2 z_3}{|\rho|}, \quad (6)$$

де $m_{ij} = m_i + m_j$ – маса i -ої та j -ої частинок.

Оскільки оператор потенціальної енергії залежить лише від відносних координат Якобі (ρ, τ) , то рівняння (5) допускає розділення змінних. Для цього представимо хвильову функцію системи у вигляді добутку двох хвильових функцій, тобто $\psi(R, \rho, \tau) = \chi(R)\varphi(\rho, \tau)$. Підставляючи цей вираз у рівняння Шредінгера (5) і відокремлюючи змінні, ми одержимо систему рівнянь, яка еквівалентна вихідному рівнянню (5)

$$\begin{cases} \frac{1}{2M} \frac{d^2 \chi}{dR^2} + (E - \lambda^2) \chi = 0, \\ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right) + (\lambda^2 - V(\rho, \tau)) \varphi = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де λ^2 – константа розділення змінних.

Перше рівняння у системі (7) описує рух системи центру мас. Це рівняння є рівнянням Гельмгольца, частинні розв'язки якого добре відомі [9]. У нашому випадку ці розв'язки мають простий вигляд – $(\sin \sqrt{2M(E - \lambda^2)}R, \cos \sqrt{2M(E - \lambda^2)}R)$. Друге рівняння системи (7) описує відносний рух частинок у системі. Основною нашою задачею є знаходження частинних розв'язків цього рівняння. Для того, щоб якобіан переходу від змінних x_1, x_2, x_3 до ρ, τ, R дорівнював одиниці, необхідно константи d і \tilde{d} вибрати наступним чином:

$$d^2 = \frac{\mu M}{m_1 m_{23}}, \quad \tilde{d}^2 = \frac{\mu m_{23}}{m_2 m_3}, \quad \text{причому } d\tilde{d} = 1.$$

Для знаходження розв'язків рівняння відносного руху зручно перейти у полярну систему координат, яка задається співвідношеннями

$$\begin{cases} \rho = \mathfrak{R} \sin \alpha, \\ \tau = \mathfrak{R} \cos \alpha, \end{cases} \quad (8)$$

$\mathfrak{R} = \sqrt{\rho^2 + \tau^2}$ - радіальна змінна,

$$\alpha = \arctg \frac{\rho}{\tau} - \text{полярний кут.} \quad (9)$$

У полярних змінних (8) рівняння відносного руху (друге рівняння системи (7)) набуде вигляду:

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{R}} \left(\mathfrak{R} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{R}} \right) + \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] + [\mathcal{L}^2 - V(\mathfrak{R}, \alpha)] \right\} \varphi(\mathfrak{R}, \alpha) = 0 \quad (10)$$

Перший доданок у рівнянні (10) описує вільний радіальний рух системи, а другий - кутовий. Явний вигляд оператора потенціальної енергії у змінних (\mathfrak{R}, α) , має вигляд (зауважимо, що у нашому випадку $m_2 = m_3$, а $m_1 \gg m_2$):

$$V(\mathfrak{R}, \alpha) = \frac{1}{\mathfrak{R}} \left[\frac{z_1 z_2 |\cos \beta \tilde{d}|}{|\sin(\alpha - \beta)|} + \frac{z_1 z_3 |\cos \beta \tilde{d}|}{|\sin(\alpha + \beta)|} + \frac{z_3 z_2 d}{|\sin(\alpha)|} \right], \quad (11)$$

де $\beta = \arctg \frac{\tilde{d}}{d} \frac{m_3}{m_{23}}$ - фіксований кут, який визначається масами частинок системи.

Враховуючи, що для одновимірного атому гелію $z_1=2e$, $z_2=z_3=-e$, то (13) запишеться у вигляді

$$V(\mathfrak{R}, \alpha) = \frac{1}{\mathfrak{R}} \left[\begin{array}{c} -\frac{2}{|\sin(\alpha - \pi/4)|} - \frac{2}{|\sin(\alpha + \pi/4)|} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}|\sin \alpha|} \end{array} \right]. \quad (12)$$

Як видно із (12), вираз для потенціальної енергії є періодичною функцією з періодом π . Враховуючи цей факт, легко переконатись, що рівняння (10) є інваріантним відносно перетворень:

$$\alpha' = \alpha - \pi,$$

а значить, і розв'язки рівняння (10) теж будуть періодичними функціями того ж періоду.

При фіксованому значенні радіуса і відсутності взаємодії у рівнянні (10), кутова частина оператора кінетичної енергії має власні функції $\varphi_m(\alpha) = \sin(m\alpha)$ і $\chi_m(\alpha) = \cos(m\alpha)$, які задовольняють граничним умовам:

$$\varphi_m(\alpha)|_{\alpha=0, \alpha=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \chi_m(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0, \alpha=\pi} = 0 \quad (13)$$

і відповідають власним значенням $-m^2$. Із періодичності розв'язку випливає, що числа m можуть бути парними і непарними. Для синглетних станів, які задовольняють другій граничній умові (13), m є парним, а для розв'язку, який задовольняє першій умові (13), m непарне. Для триплетних станів вибір m протилежний. Таким чином, існують чотири набори хвильових функцій, які задовольняють умовам (13), а саме: для синглетних станів $\{\sin((2m+1)\alpha)\}$ і $\{\cos(2m\alpha)\}$, а для триплетних $\{\sin(2m\alpha)\}$ і $\{\cos(2m+1)\alpha\}$. Згадані серії утворюють повні ортогональні системи у просторах Гільберта періодичних функцій з періодом π і різними парностями (відносно заміни кутової змінної $\alpha -> \pi - \alpha$).

Для простоти ми розглянемо систему, яка задовольняє другій граничній умові (15), і є нормованою на відрізок $[0, \pi/2]$, тобто

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \varphi_1(\alpha) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos 2\alpha, \varphi_2(\alpha) = \\ = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos 4\alpha, \dots \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Цю систему використаємо для побудови частинного розв'язку рівняння (10). Згідно методу Гальоркіна-Рітца [10], розв'язок рівняння (10) при фіксованому \mathfrak{X} можна представити у вигляді ряду:

$$\phi(\mathfrak{X}, \alpha) = C_0(\mathfrak{X})\varphi_0(\alpha) + C_1(\mathfrak{X})\varphi_1(\alpha) + C_2(\mathfrak{X})\varphi_2(\alpha) + \dots, \quad (15)$$

де $C_i(\mathfrak{X})$ - невідомі константи, які визначаються рівнянням (10). Для цього підставимо (15) в (10), і отримаємо рівняння для визначення невідомих констант

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{X}^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) + [\lambda^2 - V(\mathfrak{X}, \alpha)] \right\} \sum_{i=1}^n C_i(\mathfrak{X})\varphi_i(\alpha) = 0 \quad (16)$$

Помноживши обидві сторони рівняння (18) на $\varphi_j(\alpha)$ і проінтегрувавши по α від 0 до $\pi/2$, отримаємо наступну систему рівнянь, якій задовольняють константи $C_i(\mathfrak{X})$:

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_j(\alpha) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\mu \mathfrak{X}^2 [\lambda^2 - V(\mathfrak{X}, \alpha)] \right\} \sum_{i=1}^n C_i(\mathfrak{X})\varphi_i(\alpha) = 0. \quad (17)$$

Матричні елементи оператора потенціальної енергії

Знайдемо матричні елементи, які відповідають найнижчому стану енергії і задовольняють граничним умовам задачі Неймана. Базисні елементи, які входять у систему (17) мають бути кратні чотирьом. Для цього необхідно знайти інтеграли

$$I_{ji}(\mathfrak{R}) = \int_0^{\pi/2} \varphi_j(\alpha) V(\mathfrak{R}, \alpha) \varphi_i(\alpha) d\alpha. \quad (18)$$

Проведемо розрахунки матричних елементів для синглету, базисні функції якого задовольняють граничним умовам Неймана. Явний ортонормований базис має наступний вигляд:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(4x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(8x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(12x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(16x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Провівши інтегрування за формулою (18) ми одержимо

$$M_1 = \begin{pmatrix} 22.449+0.i & -40.2192+0.i & 31.3525+0.i & -36.0422+0.i & 28.862+0.i \\ -40.2192+0.i & 37.8702+0.i & -53.613+0.i & 42.2661+0.i & -49.4429+0.i \\ 31.3525+0.i & -53.613+0.i & 36.4212+0.i & -52.7085+0.i & 41.4168+0.i \\ -36.0422+0.i & 42.2661+0.i & -52.7085+0.i & 35.572+0.i & -51.7008+0.i \\ 28.862+0.i & -49.4429+0.i & 41.4168+0.i & -51.7008+0.i & 34.969+0.i \end{pmatrix} \quad (19)$$

Аналогічні розрахунки матричних елементів проведемо для триплету, базисні функції якого задовольняють граничним умовам Неймана. Ортонормований базис має наступний вигляд:

$$\left\{ \frac{2 \cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(6x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(10x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(14x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \cos(18x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Провівши інтегрування за формулою (18), ми одержимо

$$M_2 = \begin{pmatrix} -7.76846+0.i & -14.7961+0.i & -11.5305+0.i & -12.9795+0.i & -11.451+0.i \\ -14.7961+0.i & -4.50286+0.i & -16.2451+0.i & -10.002+0.i & -13.8288+0.i \\ -11.5305+0.i & -16.2451+0.i & -2.9743+0.i & -17.0944+0.i & -8.99429+0.i \\ -12.9795+0.i & -10.002+0.i & -17.0944+0.i & -1.96663+0.i & -17.6972+0.i \\ -11.451+0.i & -13.8288+0.i & -8.99429+0.i & -17.6972+0.i & -1.21378+0.i \end{pmatrix} \quad (20)$$

Матричні елементи, розраховані для синглету, базисні елементи якого задовольняють граничним умовам Діріхле. Ортонормований базис для цього стану має наступний вигляд:

$$\left\{ \frac{2 \sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(6x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(10x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(14x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(18x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

Провівши інтегрування за формулою (18), ми одержимо

$$M_3 = \begin{pmatrix} 57.6365+0.i & -50.6089+0.i & 47.3433+0.i & -45.8943+0.i & 44.3657+0.i \\ -50.6089+0.i & 40.2503+0.i & -49.1598+0.i & 45.8147+0.i & -45.045+0.i \\ 47.3433+0.i & -49.1598+0.i & 40.4868+0.i & -48.3107+0.i & 44.8071+0.i \\ -45.8943+0.i & 45.8147+0.i & -48.3107+0.i & 37.714+0.i & -47.7078+0.i \\ 44.3657+0.i & -45.045+0.i & 44.8071+0.i & -47.7078+0.i & 36.9604+0.i \end{pmatrix} \quad (21)$$

На кінець проведемо розрахунки матричних елементів для триплетного стану, який задовольняє граничним умовам Діріхле. Ортонормований базис цього терму має вигляд:

$$\left\{ \frac{2 \sin(4x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(8x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(12x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(16x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin(20x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

Чисельні розрахунки матричних елементів наведені нижче.

$$M_4 = \begin{pmatrix} 7.02767+0.i & -3.2656+0.i & 1.44902+0.i & -1.52855+0.i & 0.84923+0.i \\ -3.2656+0.i & 8.47669+0.i & -4.79415+0.i & 2.29825+0.i & -2.53623+0.i \\ 1.44902+0.i & -4.79415+0.i & 9.32591+0.i & -5.80183+0.i & 2.90106+0.i \\ -1.52855+0.i & 2.29825+0.i & -5.80183+0.i & 9.92872+0.i & -6.55468+0.i \\ 0.84923+0.i & -2.53623+0.i & 2.90106+0.i & -6.55468+0.i & 10.3964+0.i \end{pmatrix} \quad (22)$$

Знайдені матричні елементи дають змогу отримати адіабатичні потенціали, які є власними значеннями матриці

$$V_{ij}(R) = \int_0^{\pi/2} \varphi_j(\alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \varphi_i(\alpha) d\alpha - 2RI_{ji}(R). \quad (23)$$

На рисунку 1 наведені нижчі адіабатичні потенціали, які відповідають наведеним вище базисам. Ці адіабатичні потенціали містять як основні, так і одночастинково збуджені квантові стани системи. Як видно із наведеного малюнка, три адіабатичні потенціали, які відповідають матрицям (19) – (21), мають мінімуми, що знаходяться у точках $x \approx 0.55; 0.49; 5.64$, відповідно. Адіабатичний потенціал, який відповідає матриці (22), потенціальної ями немає. Цей потенціал описує стани неперервного спектру.

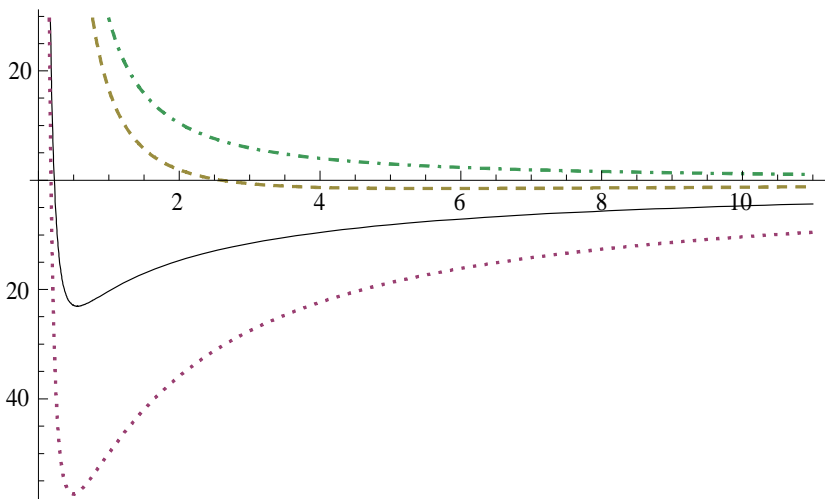


Рис. 1. Залежність адіабатичних потенціалів, які містять основні $1,3\text{Se},0$ - стани системи від гіперрадіусу, що відповідають матрицям M_2 (.....), M_1 (—), M_3 (---) і M_4 (—·—).

Обговорення результатів

Як видно з рис. 1, адіабатичний потенціал, який відповідає матриці M_2 , має потенціальну яму, мінімум якої знаходиться при значенні радіуса 0.49 а.о., а її глибина рівна -57.4 а.о.. Другий адіабатичний потенціал (M_1) досягає мінімуму, в точці (0.55, -23). Третій адіабатичний потенціал (M_3) має мінімум (5.64, -1.52). Адіабатичний потенціал, який відповідає матриці M_4 , є відштовхувальним (потенціальна яма відсутня). Цей потенціал вносить вклад лише у задачу розсіювання.

Значення енергії зв'язку, отриманих із наведених потенціалів наведено у таблиці 1 для розмірності базису, рівній п'ять і три. Як видно із даних таблиці, найбільша енергія зв'язку для непарного триплетного стану

**Залежність енергій основних станів синглетної і триплетної серій
одновимірного атому гелію від розмірності базису**

Квантові стани	Розмірність базису	Енергія зв'язку E (Ry)	Екстраполяція за Річардсоном
$1S^e$	5	9.0697	9.0697
	3	8.1876	-
$3S^e$	5	49.2347	68.8515
	3	37.8475	-
$1S^o$	5	1.3486	1.3486
	3	1.3108	-
$3S^o$	5	-	-
	3	-	-

становить ~ 50 і 37 Ry, відповідно, що вказує на значну залежність результату від розмірності базису. У роботі проведено розрахунки адіабатичних потенціалів при трьох значеннях параметру ε (10^{-7} , $0.5 \cdot 10^{-7}$, $0.25 \cdot 10^{-7}$). Це дало змогу провести екстраполяцію значення енергії зв'язку за допомогою формули Річардсона на значення $\varepsilon \rightarrow 0$. Отримане у такий спосіб значення енергії зв'язку становить близько 69 Ry. У подальшому проведемо дослідження збіжності енергії зв'язку від розмірності базису.

Зауважимо, що у роботі [11] проведено розрахунки енергій зв'язку двоелектронних систем із модельною не-сингулярною взаємодією в одновимірному випадку. Отримані значення енергій зв'язку як для основних, так і для збуджених станів досить добре узгоджуються із точними значеннями енергій у тривимірному випадку.

Таким чином показано, що метод гіперсферичних координат є ефективним методом для дослідження енергії зв'язку малочастинкових систем. Цікавим, на наш погляд, є факт, що енергія зв'язку триплетного стану для одновимірного випадку значно більша за відповідне значення у тривимірному випадку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Calogero F. Solution of a Three-Body Problem in One Dimension, *J. Math. Phys.* **10**, №12, 1969, P. 2191-2196.
2. Calogero F. Solution of One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials, *J. Math. Phys.* **12**, №3, 1971, P. 419-436.
3. McGuire J.B. Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problems *J. Math. Phys.* **5**, №5, 1964, P. 622-635.
4. Huant S., Najda S.P., Etienne B. Two-dimensional D⁻ centers, *Phys. Rev. Lett.* **65** №19, 1990, P.1486-1489.
5. Skettrup T., Suffezynski M., Gorzkkowski M. Properties of Excitons Bound to Ionized Donors, *Phys. Rev. B*, **4**, 1971, P.512-517.
6. Lompert M.A. Existence of Excitonic Complexes in Conducted Matter Physics, *Phys. Rev. Lett*, **1**, 1958, P.450-454.
7. Lapidus J.R. *Amer. J. Phys.* **56**, 92,1988.
8. Amado R.D., Coelho H.T. K harmonics in one dimension, *Am. J. Phys.* **46**, №10, 1057-1061, 1978.
9. Варшалович Д.А., Москальов А.Н., Херсонський В.К. Квантовая теория углового момента. – Л.: Наука, 1985, 436 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
11. Artemyev A.I., Grobe R., Eberly J.H. Hyperspherical coordinates approach to one-dimensional models of two-electron quantum systems, *Phys. Rev. A* **51**, 1-10, 1995.