УДК 537.52:621.327

Т.Б. Шпеник
Ужгородський національний університет
вул. Підгірна, 46, Ужгород, 88000
e-mail: inga211204@mail.ru

АЛГОРИТМ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО ПО КІЛЬКОСТІ ПРИЛАДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ РОЗКЛАДІВ

Розглядається задача, в якій в систему паралельних приладів $M = \{1,2,...,m\}$ в момент часу *d=0* надходить множина *N* робіт. Кожна робота $i \in N$ повинна бути без переривань виконана протягом $t_i \le D$ одиниць часу деяким приладом. Задано час t_i, необхідний для виконання роботи $i \in N$ приладом з продуктивністю $\alpha = 1$, а також продуктивність α_j кожного з приладів $j \in M$. Запропоновано алгоритм, який будує лексикографічно зростаючу послідовність розкладів $\pi^0, \pi^1, \ldots$.(довжина розкладу π^j (*j=1,2,…*) не перевищує *D*), в якій кожний наступний розклад використовує меншу кількість приладів, ніж попередній.

Ключові слова: алгоритм пошуку, лексикографічна послідовність, теорія розкладів.

Вступ

Запропоновано алгоритм пошуку оптимального розв'язку для задачі теорії розкладів, яка належить до класу *NP*-важких [1]. До даного класу належить більшість задач теорії розкладів і реалізація пошуку їх оптимального розв'язку, потребує великих витрат часу. Тому дослідження властивостей оптимальних розкладів та побудова на їх основі ефективних наближених алгоритмів [2], а також точних алгоритмів розв'язку окремих випадків задач [3] є актуальними проблемами в теорії розкладів. Як показує практика, багато *NP*-важких задач залишаються важкими і з точки зору знаходження нетривіальних наближених розв'язків. Дослідженню в даній області присвячені роботи [4, 5, 6], де розглядаються одностадійні та багатостадійні обслуговуючі системи і представлені нові наближені та точні алгоритми для розв'язку *NP*-важких задач теорії розкладів як для одного, так і для декількох приладів, аналіз складності, а також доводяться властивості оптимальних розкладів. Огляд публікацій показує, що інтерес викликає випадок, коли роботи обслуговуються приладами з різною продуктивністю.

Розглядається наступна задача. В обслуговуючу систему паралельних приладів $M = \{1,...,m\}$ одночасно (в момент часу $d = 0$) надходить скінчена множина $N = \{1,...,n\}$ незалежних робіт, кожна з яких $i \in N$ повинна бути виконана не пізніше встановленого спільного для всіх робіт директивного строку D. Задано час t_i, необхідний для виконання роботи $i \in N$ приладом з продуктивністю $\alpha = 1$, а також продуктивність α_j кожного з приладів $j \in M$. Час t_i^j, необхідний для виконання роботи *i* приладом *j*, обчислюється за формулою

$$t_i^j = t_i \cdot \alpha_j, \; i = 1,...,n; \; j = 1,...,m.$$

Величину t_i назвемо тривалістю роботи *i* ($i = 1,...,n$). Очевидно, що кожен з приладів *j* ($j = 1,...,n$), за час D може виконати роботи сумарною тривалістю $D \cdot \alpha_j$. Переривання процесу виконання робіт заборонені.

Обслуговуюча система, що розглядається, є одностадійною, а саме:
а) кожний прилад $j \in M$ може виконувати будь-яку роботу $i \in N$;
б) в будь-який момент часу $t \in (0, D]$ кожна робота $i \in N$ виконується не більш, ніж одним приладом, і кожний прилад $j \in M$ виконує не більше однієї роботи.

Прилади не виходять з ладу і перехід від виконання однієї роботи до іншої здійснюється миттєво, без витрат часу. Необхідно знайти мінімальне число $M^{\min}$ виконуючих приладів, які забезпечать завершення виконання всіх робіт до заданого моменту часу $D \geq \max_{i \in N} t_i$.

Відмітимо, що в [7, 8] вже були запропоновані алгоритми для наступних критеріїв:

а) $t_i + d_i \leq D_i$, $d_i = 0$, $D_i = D$, $i = 1,...,n$;

б) $t_i + d_i \leq D_i, d_i = 0, i = 1,...,n$,

але обслуговуюча система в задачах, які розглядалися, являла собою одностадійну обслуговуючу систему з ідентичними паралельними приладами.

Надалі будемо вважати, що роботи перенумеровані в порядку не зростання їх тривалостей, тобто

$$t_i \geq t_{i+1},\ i = 1,...,n-1,$$

а прилади – в порядку не зростання їх продуктивностей, тобто

$$\alpha_j \geq \alpha_{j+1},\ j = 1,...,m-1.$$

Кожному допустимому розкладу виконання робіт поставимо у відповідність перестановку $\pi = (\nu_{11}, \nu_{21}, ..., \nu_{r_1 1}, ..., \nu_{r_M M})$, де M – кількість приладів, що зайняті виконанням робіт, r_j – кількість робіт, а $\nu_{1j}, \nu_{2j}, ..., \nu_{r_j j}$ – послідовність номерів робіт, що виконані приладом j.

Теоретично оптимальним розкладом будемо вважати розклад, якому відповідає число приладів:

$$M_{theor} = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{D} \right\rceil, \qquad (1)$$

а $\lceil x \rceil$ – найменше ціле число таке, що $x \leq \lceil x \rceil$. Величину $M_{теор}$ будемо розглядати як нижню оцінку кількості приладів в оптимальному розкладі.

Розроблений алгоритм полягає в побудові початкового допустимого розкладу на 0-му етапі, та послідовному покращенню розкладу на наступних етапах.

Алгоритм

Початок алгоритма.

0-й етап. *k*-й крок $(k = 1,2,...)$. На *k*-му кроці будується розклад виконання робіт *k*-м приладом. Нехай для *k*-го приладу визначено перші *r* робіт (спочатку *r=0*). Позначимо через B_p множину невиконаних робіт $l \in N$, для яких $l > p$ (на нульовому етапі $p = 0$). Для кожного $i \in B_p$ обчислимо $t_l^k = t_l \cdot \alpha_k$. Через S_{rk} позначимо момент часу завершення виконання перших *r* робіт *k*-м приладом ($S_{0k} = 0$).

Якщо виконання *k*-м приладом будь-якої з невиконаних робіт $l \in B_p$ (на нульовому етапі $p = 0$) неможливе, тобто умова

$$S_{rk} + t_l^k \leq D \cdot \alpha_k \qquad (2)$$

не виконується, вважатимемо, що *k*-й прилад завантажений числом робіт, що дорівнює *r*, а номери робіт, що виконані даним приладом, утворюють перестановку π_k.

Якщо умова (2) виконується для деяких $l \in B_p$, то серед таких робіт вибирається робота з найменшим номером і включається в розклад виконання робіт *k*-м приладом, а *r* збільшується на одиницю. Процес повторюється до тих пір, поки прилад *k* не буде завантажено або поки не будуть виконані всі роботи.

Як тільки *k*-й прилад завантажено, визначається

$$\delta_k = D \cdot \alpha_k - S_{rk} \geq 0 \qquad (3)$$

і здійснюється перехід до $(k+1)$-го кроку.

При цьому для кожного $i \in B_p$ обчислюється $t_i = \dfrac{t_i^k}{\alpha_k}$, тобто послідовність величин t_i, де *i* належить множині невиконаних робіт B_p, відтворюється.

Коли всі роботи виконані, ми дістанемо деякий допустимий розклад, в якому роботи виконуються на $M_{практ}$ приладах та перестановку $\pi^0 = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{M_{практ}})$. У випадку, коли $M_{практ} = M_{теор}$ ми, зрозуміло, дістанемо оптимальний розв'язок і шукану величину M^{min} (вона дорівнює $M_{теор}$).

У випадку, коли $M_{практ} > \mathrm{M}_{теор}$, переходимо до наступного етапу алгоритму, намагаючись побудувати розклад виконання робіт на M_j приладах, де $M_{теор} \le M_j < M_{практ}$.

***j*-й етап** $(\mathrm{j} = 1,2,...)$. На *j*-му етапі здійснюється побудова допустимого розв'язку задачі для M_j приладів, де

$$M_j = \frac{M_{ниж} + M_{верх}}{2}. \tag{4}$$

Вибір M_j з формули (4) реалізовує пошук оптимального розкладу за методом дихотомії. На першому кроці за $M_{ниж}$ вибирається $M_{теор}$, обчислене згідно (1), а за $M_{верх}$ вибирається $M_{практ} - 1$.

З побудови розкладу на $(M_{верх} + 1)$-му приладі, очевидно, випливає, що у випадку, коли розклад виконання робіт на M_j приладах існує, то відповідна перестановка π^j буде лексікографічно більша за π^{j-1}. Тому роботи включаються в порядку їх слідування в π^{j-1}.

Нехай

$$k_j = \min\left\{ i \left| \sum_{l=1}^{i} \delta_l \ge \Delta \right. \right\},$$

де

$$\Delta = M_j \cdot D - \overline{\alpha} \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Величину Δ будемо називати максимально допустимим простоєм для M_j приладів. Роботи, що виконувалися приладом *i*, де $i > k$, вважаються невиконаними. Покладемо $k = k_j$ і перейдемо до *k*-го кроку.

***k*-й крок** $(k = 1,2,...)$. Вважається, що розклад виконання робіт приладами *1, 2,..., k* є фіксованим з попереднього розкладу. Для кожного $i \in B_p$ обчислимо $t_i^k = t_i \cdot \alpha_k$. Умова (2) залишається умовою завантаженості *k*-го приладу. Схема, за якою він завантажується, така ж сама, як і на нульовому етапі.

Як тільки *k*-й прилад завантажено, із (3) визначається δ_k і здійснюється перевірка наступної умови:

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i \le \Delta . \tag{5}$$

Якщо умова (5) задовольняється, то можливі випадки:

а) всі роботи виконані. У цьому випадку розклад виконання робіт на M_j приладах побудовано і переходимо до $(j+1)$-го етапу, поклавши $M_{верх} = M_j - 1$, а послідовність величин $t_i, i = 1,2,...,n$, приводимо до її початкового вигляду;

б) роботи виконані не всі. Тоді послідовність величин t_i, де *i* належить множині невиконаних робіт B_p, відтворюємо і переходимо до $(k+1)$-го кроку *j*-го етапу.

Якщо умова (5) не задовольняється, то з послідовності робіт, що виконуються на *k*-му приладі, виключається остання. Нехай це робота з номером *p*. Якщо

$$B_p \ne \varnothing \tag{6}$$

та

$$\sum_{i \in B_p} t_i^k - t_p^k \ge \sum_{i=1}^{k} \delta_k - \Delta . \tag{7}$$

виконуються (якщо умова (7) порушується, то навіть при виконанні всіх робіт

$i \in B_p$ на *k*-му приладі умова (5) не виконується), то починаючи з роботи $l = \min\{i \in B_p\}$ завантаження *k*-го приладу роботами здійснюється за попередньою схемою. Таким чином, якщо після завантаження *k*-го приладу та перерахування δ_k по (3) умова (5) виконується, то здійснюється перехід до $(k+1)$ -го кроку.

Якщо хоч одна з умов (5) – (7) не виконується і $k > 1$, то здійснюється перехід до (*k-1*)-го кроку (при цьому остання в списку виконаних цим приладом робіт виключається з розкладу і в якості *p* використовується при його завантаженні). Якщо $k = 1$, то розкладу виконаних робіт на M_j приладах не існує.

У випадку, коли з врахуванням (5), для обраного значення M_j розкладу побудувати не вдалося, уточнюється $M_{ниж} = M_j + 1$ і виконання алгоритму продовжується з $(j+1)$-го етапу, де послідовності величин $t_i, i = 1,2,...,n$ надається початкового вигляду і будується розклад виконання робіт на $M_j + 1$ приладах.

Процес повторюється до тих пір, поки $M_{ниж} \le M_{верх}$.

Кінець алгоритму.

Висновки

В результаті виконання алгоритму буде побудовано лексикографічно зростаючу по π^j послідовність розкладів. Оптимальним по кількості приладів розклад буде останній побудований допустимий розклад, де виконання робіт здійснюється на $M_{верх} + 1$ приладах. Апробація представленого алгоритму на реальних моделях показала, що оптимальний розклад можна знайти за скінчену кількість ітерацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. – М.: МГУ, 2011. – 222 с.
2. Кузюрин Н.Н., Фомин С.А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. – М.:МФТИ, 2007. – 326 с.
3. Joseph Y.-T. Leung (Ed.) Handbook of Scheduling. Algorithms, Models, and Performance Analysis. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall / CRC, 2004. – 1216 с.
4. Сервах В.В. Анализ сложности и разработка алгоритмов решения задач календарного планирования и теории расписаний: дис. ... доктора физ.-мат. наук / Сервах В.В. – Новосибирск, 2010. – 221 с.
5. Лазарев А.А. Методы и алгоритмы решения задач теории расписаний для одного и нескольких приборов и их применение для задач комбинаторной оптимизации: дис. ... доктора физ.-мат. наук / Лазарев А.А. – Москва, 2007. – 426 с.
6. Садыков Р.Р. Алгоритмы решения задач теории расписаний для одного прибора с критериями $L_{\max}$ и $\sum w_j U_j$: дис. ... кандидата физ.-мат. наук / Садыков Р.Р. – Казань, 2006. – 131 с.
7. Кузка О.І., Шпеник Т.Б. Мінімізація кількості приладів при виконанні робіт в системах ідентичних паралельних приладів // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія математика. – 1998. – вип. 3. – С. 147–150.
8. Кузка А.И., Шпеник Т.Б. Алгоритм последовательного анализа вариантов для минимизации числа приборов в задаче составления расписания, удовлетворяющего директивным срокам // Кибернетика и системный анализ. – 2000. - №5. – С. 118–123.

Стаття надійшла до редакції 30.06.2012

T.B. Shpenik
Uzhhorod National University, Pidgirna Str., 46, Uzhhorod, 88000

SEARCH ALGORITHMS ARE OPTIMAL IN NUMBER OF DEVICES SOLVING ONE PROBLEM SCHEDULING THEORY

The article deals with the problem, where the set of $N = (1,2,...,n)$ requirements fits into the system consisting of $M = (1,2,...,m)$ parallel devices at *d=0* time moment. Each requirement is attended not more then *D* time units by any device and without any interruption. Proposed time t_i, which is needed for making work *i (i=1,2,…,n)* device with efficiency $\alpha = 1$, and also α_j each of device *j* (*j=1,2,...,m*). The algorithm, which forms a lexicographic gradually increasing succession of schedules $\pi^0, \pi^1, \pi^2, ...$(length of π^j (*j=1,2,...*) is not more then *D*), where every following schedule is being made by a less quantity of devices than the previous one, has been proposed.

Keywords: algorithm, lexicographic gradually, scheduling theory.

Т.Б. Шпеник
Ужгородский национальный университет
ул. Подгорная, 46, Ужгород, 88000

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПО КОЛИЧЕСТВУ ПРИБОРОВ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Рассматривается задача, в которой в систему параллельных приборов $M = \{1,2,...,m\}$ в момент времени *d* = 0 поступает множество *N* работ. Каждая работа $i \in N$ должна быть без прерываний выполнена в течение $t_i \le D$ единиц времени некоторым прибором. Задано время t_i, необходимое для выполнения работы $i \in N$ прибором с производительностью $\alpha = 1$, а также производительность α_j каждого устройства $j \in M$. Предложен алгоритм, который строит лексикографически возрастающую последовательность расписаний $\pi^0, \pi^1, ...$ (длина расписания π^j (*j* = 1,2, ...) не превышает *D*), в которой каждый следующий расклад использует меньшее количество приборов, чем предыдущий.

Ключевые слова: алгоритм поиска, лексикографическая последовательность, теория расписаний.