

УДК 538.913

І.І. Небола, В.Я. Кіндрат

Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина, 54

ФРАКТАЛЬНІ СТРУКТУРИ З ЕЛЕМЕНТАМИ СИМЕТРІЇ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ, ЩО ЗДАТНІ ЗАХОПЛЮВАТИ МІКРОХВИЛЬОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Проведено опис будови та властивостей фотонних кристалів на основі 3-D фракталів з елементами симетрії п'ятого порядку (фотонний кристал «дюрерит»). Отримано значення Гаусдорфової розмірності двовимірного фракталу типу «килим Дюрера» та встановлено його площу, встановлено кути під якими перетинаються осі, які проходять через центри порожнин трьохвимірного фракталу типу «губка Дюрера», що дозволяє використати форму такої структури для виготовлення фотонного кристалу, що є аналогом фотонного кристалу Е. Яблоновича.

Ключові слова: фрактал, фотонний кристал, надгратка, оптичний фільтр.

Вступ

Фотонним кристалом є надгратка (crystal superlattice), в якій штучно створено додаткове поле з періодом, співмірним деякій зовнішній по відношенню до даного середовища хвилі, через зміну параметрів цього середовища. Завдяки цьому такі гратки можуть виконувати роль фільтрів і активних середовищ.

Сукупність падаючих на таке середовище хвиль терпить активну інтерференційну та/або дифракційну взаємодію, викликану кореляційно-інваріантним розташуванням модулюючих факторів у середовищі.

Вказані фактори реалізують вимоги для проходження різних енергетичних коливань для електромагнітного поля фотонів. Цей енергетичний спектр може бути побудований виходячи із трансляційних характеристик модулюючих параметрів. Може бути проведена аналогія між електронним спектром фотонного (фононного) кристалу та енергетичним спектром електронів і фононів у твердому тілі [1]. Вказана аналогія базується на розв'язку рівняння Шредінгера для електронів на базисі плоских хвиль і отримання при включенні будь-якої взаємодії з остовом, структури дозволених і заборонених зон для носіїв заряду. При цьому ефективна заборонена зона реалізується між повністю заповненою і першою незаповненою

носіями заряду в напівпровідниках.

Тобто її положення залежить від середнього числа носіїв заряду і числа станів в енергетичній зоні.

Для фононного спектру аналогія більш природня, оскільки і фотони, і фонони є бозонами, а отже, і характер їхнього заповнення енергетичних зон інший.

Енергетика спектрів в цьому випадку починається з точки координати якої $(\omega(k); k)$ (рівної $(0,0)$) і тому з відомої акустичної хвилі $\omega = ck$ (світлового конусу для фотонів) слідує, що перша заборонена зона є енергетичною щілиною між акустичною і оптичними вітками в фононному спектрі кристалів з багатоатомною елементарною коміркою.

Також особливістю фотонних кристалів є строга поперечність електромагнітної хвилі, звідки слідує відсутність поздовжньої вітки в спектрах фотонних кристалів.

В цілому, енергетичний спектр фотонів у фотонному кристалі, аналогічний спектру електронів в реальному кристалі, наприклад, в напівпровіднику. Тут також утворюються заборонені зони, в певній області частот, в якій заборонено вільне поширення фотонів. Період модуляції діелектричної проникності визначає енергетичне положення забороненої зони, довжину хвилі відбитого випромінювання. Ширина фотонних заборонених зон визначається контрастом діелектричної про-

никності – тобто відношенням коефіцієнтів заломлення n_1/n_2 , а спектральне положення є функцією періоду ґратки. Фотонні кристали бувають прямими, якщо упаковані сферичні (трёхвимірний випадок) чи циліндричні (двохвимірний випадок) елементи, з яких вони складаються, оточені повітрям (або іншим матеріалом з меншим показником заломлення світла), та інвертованими, якщо повітряні порожнини сферичної або циліндричної форми знаходяться всередині суцільного каркасу.

Розглянемо електромагнітну хвилю, що падає на фотонний кристал. Якщо фотони мають енергію, яка відповідає забороненій зоні фотонного кристалу, то такі фотони не зможуть поширюватися в кристалі і віді́ються від його поверхні. І навпаки, якщо фотони будуть мати енергію, що відповідає енергії дозволеної зони фотонного кристалу, то вони поширюватимуться в фотонному кристалі. Таким чином, фотонний кристал здійснює функцію оптичного фільтру, який пропускає або відбиває електромагнітні хвилі в певному діапазоні частот (фотони певної енергії).

Особливістю трёхвимірних фотонних кристалів (рис. 1) є те, що в таких кристалах коефіцієнт заломлення змінюється в трёх просторових напрямках, а отже, і властивості ці фотонні кристали проявляють також у трёх просторових напрямках.

При цьому умова максимуму інтерференції для даної довжини хвилі випромінювання може не виконуватись для будь-якого з напрямків у просторі. Поширення фотонів з такими довжинами хвиль в трёхвимірному кристалі не можливе, а відповідні їм енергії утворюють фотонні заборонені зони.

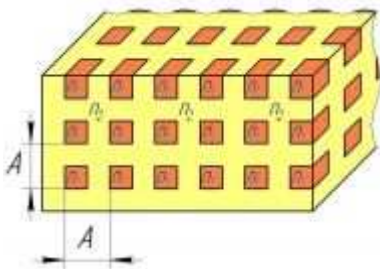
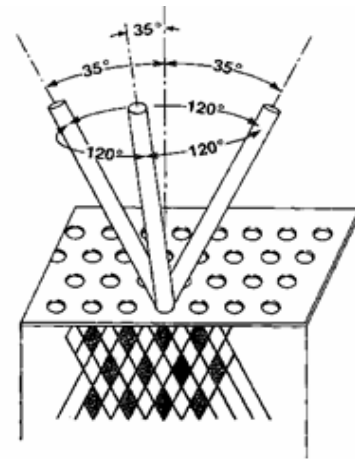


Рис. 1. Схематичне зображення трёхвимірного фотонного кристалу.

Дослідження фотонних кристалів розпочалося у 1987 році. Перший фотонний кристал (для НВЧ-діапазону) було створено на початку 1990-х років співробітником Bell Labs Елі Яблоновичем. А 1991 році Елі Яблонович (Eli Yablonovitch) разом з співробітниками та колегами (T.J. Gmitter and K.M. Leung) створили та описали порожнисту структуру, яка має властивості гранецентрованого фотонного кристалу, якій дали назву – фотонний кристал яблонович [2].

Для отримання трёхвимірної періодичної ґратки в діелектричному матеріалі групою дослідників під керівництвом Елі Яблоновича було висвердлено через маску циліндричні отвори таким чином, щоб їх мережа в об'ємі матеріалу утворила гранецентровану кубічну ґратку порожнин, при цьому діелектрична проникність була промодульована з періодом в 1 сантиметр у трёх вимірах.

При створенні цього фотонного інвертованого кристалу яблонович, отвори висвердлювались під кутом 120 градусів один до одного та 35,26 градусів до нормалі щодо поверхні зразка.



В 2004 році для створення фотонних кристалів інвертованого типу групою японських дослідників Єшінорі Міямото, Чіхару Сано та Такатоші Хомма запропоновано використати трёхвимірний аналог фрактальної структури т.зв. «Килима Серпінського» („Sierpinsky Carpet”) або, як її ще називають – губку Менгера (“Menger’s Sponge”) [3].

Єшінорі Міямото виявив, що трёхвимірна фрактальна структура типу губки

Менгера з числом ітерацій навіть рівним двом (розмір кристалу 27 міліметрів, кубічної форми, матеріал - епоксидна смола, з включенням часток титану) захоплює електромагнітну хвилю з частотою 8 GHz всередині структури на одну десяти-мільйонну секунди, тобто на період в 5 раз більше часу, ніж існуючий, на той час, найкращий фотонний кристал.

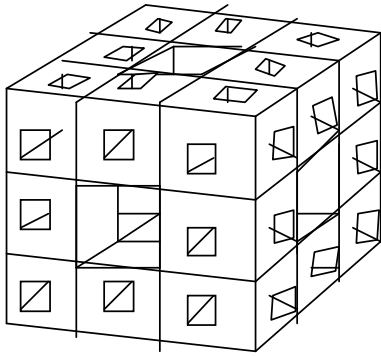


Рис. 2. Схематичне зображення фотонного кристалу у вигляді губки Менгера, який досліджувався Є. Міямото.

При дослідженні такого фотонного кристалу групою Е. Міямото [3] отримано наступні співвідношення:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2}{3} a \sqrt{\epsilon}, \quad (1.1)$$

де λ – довжина падаючої електромагнітної хвилі, c – швидкість світла, f – частота падаючої електромагнітної хвилі, a – довжина ребра кубічної матриці, з якої створено фотонний кристал, та ϵ – відносна діелектрична проникність.

$$\tau = Q/2\pi f_0, \quad (1.2)$$

де τ – характерний час замикання, тобто, час затухання енергії в $1/e \approx 0,37$, Q – якісний коефіцієнт локалізації хвилі $Q = f_0/\Delta f$, де f_0 – частота вершинної локалізації, а Δf – смуга частот половинної енергії. У випадку використання епоксидних смол, що містять титан з відносною діелектричною проникністю 8,7 та діелектричними

втратами 0,1 замість епоксидних смол з відносною діелектричною проникністю 2,8 та діелектричними втратами 0,2, час захоплення електромагнітної хвилі збільшився до 159,1 ns від 7,6 ns.

При використанні світла з частотою 500 THz, розмір ребра куба повинен бути менше, ніж $6,0 \cdot 10^{-8} m$, що викличе труднощі по виготовленню фрактальної структури з двох чи трьох шарів навіть з нанотехнологією на рівні $10^{-9} m$.

Японські дослідники зробили висновок, що замість пошуку матеріалу з низькими діелектричними втратами і великою відносною діелектричною проникністю, необхідно досліджувати інші фрактальні структури, які дозволять отримати максимальний час замикання електромагнітної хвилі [3].

Наслідком теоретичних розрахунків групи Міямото стало те, що для збільшення часу захоплення електромагнітної хвилі, необхідно збільшити кількість фрактальних складок всередині обмеженого об'єму експоненційно. А для цього необхідно використовувати фрактал, в структурі внутрішніх порожнин якого наявна логарифмічна спіраль золоті пропорції.

Опис трьохвимірної фрактальної структури з елементами п'ятого порядку на основі фракталу «килим Дюрера I»

При порівнянні фотонного кристалу Е. Яблоновича та фотонного кристалу Є. Міямото видно, що перевага щодо більшого часу захоплення електромагнітної хвилі буде у такого, де кути між осями, що проходять через центри порожнин не паралельні до нормалі щодо поверхні зразка.

У даний час відомі фрактальні структури, порожнини яких підкоряються законам золоті пропорції. Двохвимірним фракталом такого роду є фрактал типу «килим Дюрера».

- 1) Перший спосіб отримання формули площі фракталу типу «килим Дюрера I».

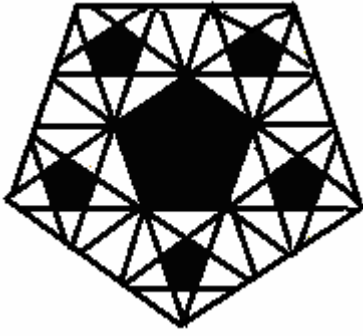


Рис. 3. Фрактал килим Дюрера І.

Фрактали типу «килим Дюрера» будуються на основі правильного п'ятикутника.

Відомо, що площа правильного п'ятикутника:

$$S_{ABCDE} = \frac{5}{4} a_0 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{5} \right). \quad (1.3)$$

Крім того відомо, що

$$\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \quad (1.4)$$

де Φ постійна Фідія, приблизно рівна 1,618

$$\text{та } \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}. \quad (1.5)$$

Отже,

$$\frac{5}{4} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}. \quad (1.6)$$

Виразимо це співвідношення через постійну Φ .

$$\frac{5(1 + \sqrt{5})}{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}}. \quad (1.7)$$

Перевіримо отримані співвідношення:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} = 1,720477, \quad (1.8)$$

$$\frac{5}{4} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{5} \right) = 1,720477. \quad (1.9)$$

Таким чином, площа основи фракталу «Килима Дюрера» на основі правильного п'ятикутника

$$S_o = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2. \quad (1.10)$$

Розглянувши рис. 3 знайдемо сторони п'ятикутників, які утворюються при n ітераціях створення фракталу «Килим Дюрера» на основі правильного п'ятикутника та їх кількість.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_o}{1 + \Phi} \\ a_2 &= \frac{a_1}{1 + \Phi} = \frac{a_o}{(1 + \Phi)^2}. \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{1 + \Phi} = \frac{a_o}{(1 + \Phi)^n} \end{aligned} \quad (1.11)$$

При першій ітерації утворюється 1 (тобто 5^0) п'ятикутників з стороною a_1 , при другій ітерації – 5 (тобто 5^1) п'ятикутників з стороною a_2 , і т.д.

Площа фракталу типу «Килима Дюрера І» на основі правильного п'ятикутника рівна різниці площі основи (площі правильного п'ятикутника) та суми площ відповідних п'ятикутників, помножених на їх кількість в кожній ітерації.

$$\begin{aligned} S_{\text{fract}} &= S_o - \sum_{n=1}^{\infty} n S_n = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - 5^0 \left(\frac{1}{(1 + \Phi)^1} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 5^1 \left(\frac{1}{(1 + \Phi)^2} \right)^2 - \dots - 5^{n-1} \left(\frac{1}{(1 + \Phi)^n} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

тобто,

$$\begin{aligned} S_{\text{fract}} &= \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} 5^{n-1} \left(\frac{1}{(1 + \Phi)^{2n}} \right) \right] = \\ &= \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \Phi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(1 + \Phi)^2} \right)^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Бачимо, що під знаком суми наявна геометрична прогресія, перший член якої

$$b_1 = \frac{1}{(1+\Phi)^2}, \quad (1.14)$$

а степінь

$$q = \frac{5}{(1+\Phi)^2} \approx 0,72949 \leq 1 \quad (1.15)$$

Оскільки сума геометричної прогресії рівна $\frac{b_1}{1-q}$, то

$$S_{fract} = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \frac{\Phi}{3} \right]. \quad (1.16)$$

2) Другий спосіб отримання формули площі фракталу типу «килим Дюрера I».

Відомо, що

$$1+\Phi = \Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618, \quad (2.1)$$

тоді

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_o}{1+\Phi} = \frac{a_o}{\Phi^2} \\ a_2 &= \frac{a_1}{1+\Phi} = \frac{a_o}{(1+\Phi)^2} = \frac{a_o}{\Phi^4} \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{1+\Phi} = \frac{a_o}{(1+\Phi)^n} = \frac{a_o}{\Phi^{2n}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Інша формула для площі фракталу типу «Килима Дюрера I» на основі правильного п'ятикутника має вигляд:

$$\begin{aligned} S_{fract} &= \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \frac{1}{\Phi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{\Phi^4} \right)^{n-1} \right] = \\ &= \frac{5^{\frac{3}{4}}}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \frac{1}{\Phi^4 - 5} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наслідок: з рівняння

$$\frac{\Phi}{3} = \frac{1}{\Phi^4 - 1} \Leftrightarrow \Phi^5 - 5\Phi - 3 = 0 \quad (2.4)$$

слідє, що у нього є дійсний розв'язок (корінь Брінга) $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3) Розмірність Гаусдорфа для фракталу типу «Килима Дюрера I».

Параметр зменшення рівний

$$\varepsilon = \frac{1}{(1+\Phi)^n} = \frac{1}{\Phi^{2n}}. \quad (3.1)$$

Кількість новоутворених при кожній ітерації правильних п'ятикутників рівна

$$N(\varepsilon) = 5^n. \quad (3.2)$$

Таким чином, розмірність Гаусдорфа для фракталу типу «Килима Дюрера I» на основі правильного п'ятикутника рівна

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{\ln 5}{\ln(1+\Phi)} = \frac{\ln 5}{\ln(3+\sqrt{5}) - \ln 2} = \\ &= \frac{\ln 5}{2 \ln \Phi} = \frac{\ln 5}{2(\ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2)} \approx 1,672. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Трьохвимірним аналогом фракталу «Килим Дюрера» є фрактал типу «Губка Дюрера» на основі правильного додекаедра.

Порожнини цього фракталу утворені правильними прямокутними анти призмами, які утворюють певний кут з нормаллю до поверхні зразка.

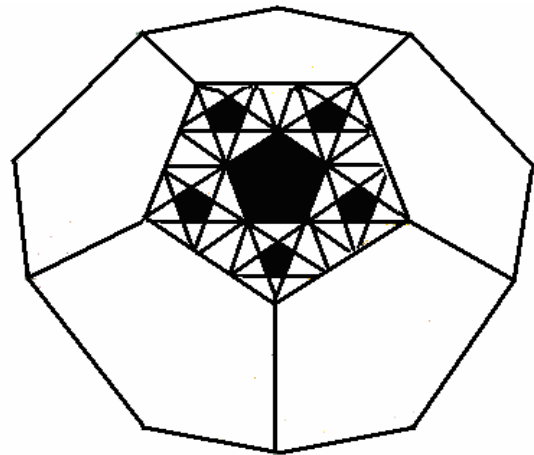


Рис. 4. Фрактал типу «Губка Дюрера I» на основі правильного додекаедра.

Опис фрактальної структури з елементами п'ятого порядку на основі фракталу «килим Дюрера II»

Фрактал «килим Дюрера II» відрізняється від фракталу «килим Дюрера I» тим, що від правильної п'ятикутної основи додатково віднімається на кожній ітерації,

починаючи з другої, правильний п'ятикутник з стороною меншою в Φ разів.

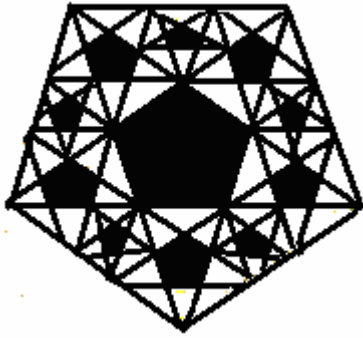


Рис. 5. Фрактал килим Дюрера II.

Площа фракталу «килим Дюрера II»:

$$S_{fract} = S_o - S_1 - \sum_{n=2}^{\infty} nS_n - \sum_{n=2}^{\infty} n'S_{n'} =$$

$$= \frac{5^4}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - 5^0 \left(\frac{1}{1+\Phi} \right)^2 - 5^1 \left\{ \left(\frac{1}{(1+\Phi)^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi(1+\Phi)^2} \right)^2 \right\} - \right.$$

$$\left. - 5^2 \left\{ \left(\frac{1}{(1+\Phi)^3} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi(1+\Phi)^3} \right)^2 \right\} - \dots - 5^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{(1+\Phi)^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi(1+\Phi)^n} \right)^2 \right\} \right] \quad (4.1)$$

Після перетворень площа фракталу «килим Дюрера II» прийме вигляд:

$$S_{fract} = \frac{5^4}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - 5^0 \left(\frac{1}{1+\Phi} \right)^2 - \left(1 + \frac{1}{\Phi^2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(1+\Phi)^{2n}} \right] =$$

$$= \frac{5^4}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \left(\frac{1}{1+\Phi} \right)^2 - \frac{1}{(1+\Phi)^2} \left(1 + \frac{1}{\Phi^2} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{(1+\Phi)^2} \right)^{n-1} \right] \quad (4.2)$$

В цьому випадку, так само бачимо, що під знаком суми також наявна геометрична прогресія, перший член якої також

$$b_1 = \frac{1}{(1+\Phi)^2},$$

а степінь також

$$q = \frac{5}{(1+\Phi)^2} \approx 0,72949 \leq 1.$$

Оскільки сума геометричної прогресії рівна $\frac{b_1}{1-q}$, то після певних перетворень

$$S_{fract} = \frac{5^4}{4} \Phi^{\frac{3}{2}} a_o^2 \left[1 - \left(\frac{1}{1+\Phi} \right)^2 - \frac{\Phi}{3} \left(1 + \frac{1}{\Phi^2} \right) \right] \quad (4.3)$$

Порівнявши формули площі фракталів «килим Дюрера I» та «килим Дюрера II» видно, що вираз в квадратних дужках зменшився

$$3 \left[1 - \frac{\Phi}{3} \right] \approx 0,4606 \quad (4.4)$$

$$\text{до } \left[1 - \frac{\Phi}{3} - \left\{ \frac{1}{(1+\Phi)^2} + \frac{1}{3\Phi} \right\} \right] \approx 0,1087 \quad (4.5)$$

Аналогічно утворюється трьохвимірний аналог «губка Дюрера II», при цьому його порожнистість значно більша.

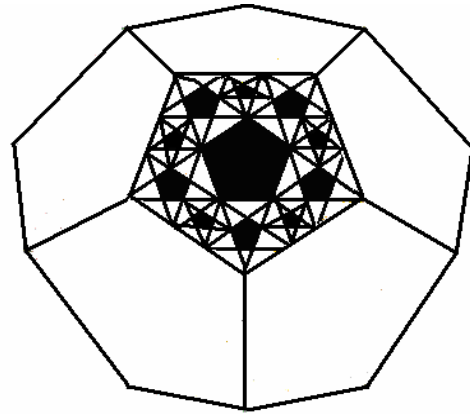


Рис. 6. Фрактал типу «губка Дюрера II» на основі правильного додекаедра.

Кути між осями, що проходять через центри порожнин фрактальної структури з елементами п'ятого порядку на основі фракталу «килим Дюрера II»

Як було вище зазначено, кути між осями, що проходять через центри отворів у фотонному кристалі Е. Яблоновича складають 120 градусів, а кут щодо нормалі до поверхні зразка 35,26 градусів.

У фракталі «Губка Менгера», який використовувався в досліджах Є. Міямото кути між осями, що проходять через центри порожнин складають 90 градусів, а кут щодо нормалі до поверхні зразка 0 градусів [4].

Якщо обмежитись двома ітераціями в фрактальній структурі «Губка Дюрера II», то отримаємо наступні значення кутів між осями, що проходять через центри порожнин.

Відомо також, що

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 1,377, \quad (5.1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\Phi}{2} \approx 0,809, \quad (5.2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\Phi}{2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}} \approx 0,5875. \quad (5.3)$$

$r_{\text{непт}}$ - радіус кола, вписаного в правильний п'ятикутник:

$$r_{\text{непт}} = a_o \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}, \quad (5.4)$$

$r_{\text{додек}}$ - радіус сфери, вписаної додекаедр, яка торкається його граней:

$$r_{\text{додек}} = a_o \frac{\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}{4}. \quad (5.5)$$

Кути між осями, що проходять через центри порожнин на першій ітерації рівні:

$$\angle(1) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{r_{\text{непт}}}{r_{\text{додек}}}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}\right) \approx \quad (5.6)$$

$$\approx 1,107 \text{ рад} \approx 63,43^\circ,$$

а кут щодо нормалі до поверхні зразка на першій ітерації також 0 градусів.

Відхилення від нормалі до поверхні зразка на другій ітерації становитиме для більших порожнин $2r$, де r - радіус кола вписаного в правильний п'ятикутник з

$$\text{стороною } \frac{a_o}{(1+\Phi)}, \text{ тобто } 2r = a_o \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{(1+\Phi)}.$$

Тоді кут відхилення рівний

$$\angle(2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2r}{r_{\text{додек}}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}{(1+\Phi)\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}\right) \approx$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\Phi^2\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}\right) \approx \quad (5.7)$$

$$0,757 \text{ рад} \approx 43,36^\circ.$$

Відхилення від нормалі до поверхні зразка на другій ітерації становитиме для менших порожнин $R + \rho$, де r - радіус кола описаного навколо правильного п'ятикутника з стороною $\frac{a_o}{(1+\Phi)}$, а ρ - радіус кола описаного навколо правильного п'ятикутника з стороною $\frac{a_o}{\Phi(1+\Phi)}$, тобто

$$R + \rho = a_o \frac{\left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)}{(1+\Phi)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

Оскільки $1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$, а $1 + \Phi = \Phi^2$, тоді кут відхилення рівний

$$\begin{aligned} \angle(2') &= \operatorname{arctg}\left(\frac{R + \rho}{r_{\text{додек}}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{8\left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\Phi(1+\Phi)\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}\right) \approx \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\Phi^2\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}}\right) \approx 0,757 \text{ рад} \approx 43,36^\circ. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отже, $2r = R + \rho$ та $\angle 2 = \angle 2' = 43,36^\circ$.

Такі самі будуть кути перетину між осями, що проходять через центри порожнин, утвореними при першій ітерації та осями відповідних порожнин, утвореними при другій ітерації.

Крім того, слід зазначити, що центри двох однакових порожнин, утворених при другій ітерації та центр порожнини утвореної при першій ітерації є вершинами рівностороннього трикутника, тому і найменші кути між осями однакових порожнин при другій ітерації також становлять відповідно $\approx 43,36^\circ$.

Отже за аналогією до структури створеної Е. Яблоновичем [2], нами розглянуто

можливість створення фотонного кристалу під назвою дюрерит, який має такі властивості: додекаедрична форма матриці, порожнини змінюють розмір за законами золотого перерізу, кут перетину осей порожнин на першій ітерації $\approx 63,43^\circ$, кут осей порожнин щодо нормалі до поверхні зразка $\approx 43,36^\circ$.

Як показав Ешінори Міямото [3 та 4], фрактальна структура побудована за законами золотого пропорції може реалізовувати «нескінченний» час захоплення електромагнітної хвилі. У цій фрактальній структурі необхідні співвідношення розмірів найменших отворів до характерного розміру матриці, на якій будується фотонний кристал повинні мати величину

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\Phi^2} \approx 0,381, \text{ а внутрішні}$$

порожнини повинні формувати структуру логарифмічної спіралі золотого пропорції. Як показано вище, саме такі величини співвідношень між розміром порожнин та характерним розміром матриці ($\approx 0,381$) якраз і можуть бути отримані у фрактальній структурі типу «килим Дюрера» на другій ітерації.

Природні об'єкти, схожі на фрактальну структуру з елементами п'ятого порядку на основі фракталу «губка Дюрера I»

Міжнародна група дослідників (Liang Tang, Karin N. Johnson, L. Andrew Ball, Tianvey Lin, Mark Yeager and John E. Johnson) визначила структуру вірусу Паріакото (Pariacoto virus), РНК якого формує додекаедр, а на гранях цього

додекаедра розміщені інші нуклеотидні елементи [5].

Висновок

В статті проведено опис двох- та трьохвимірних фрактальних структур типу «килим Дюрера I та II» та «губка Дюрера I та II», форму яких пропонується використати при виготовленні фотонних кристалів, які аналогічно до терміну введеного Е. Яблоновичем (яблоновіт), можна назвати дюрерит.

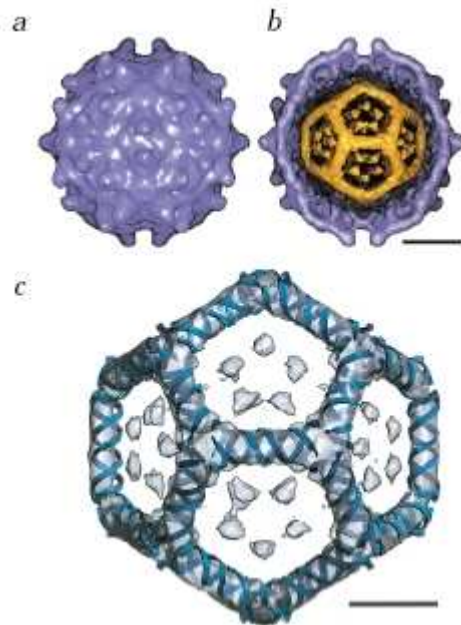


Рис. 7. Внутрішня будова вірусу Паріакото: а – вірус Паріакото в білковій оболонці; б – будова вірусу Паріакото в розрізі; с – будова внутрішньої частини (РНК) вірусу Паріакото.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. John D. Joannopoulos et.al. Photonic Crystals. Molding the Flow of Light// Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
2. Yablonovitch E., Gmitter T.J. and Leung K.M. Photonic band structure: the face-centered-cubic case // Phys. Rev. Lett. 67, 1991. - 2295.
3. Takeda M.W., Kirihara S., Miyamoto Y., Sakoda K. and Honda K. Localization of electromagnetic waves in three-dimensional fractal cavities // Phys. Rev. Lett., 5, 2004. – 1103.
4. Miyamoto Y., Kirihara S., Kanehira S., Takeda M.W., Honda K. and Sakoda K. Smart Processing Development of Photonic Crystals and Fractals // Int. J. Applied Ceramic Technology, American Ceramic Society, 1, 2004. – 40.

5. Tang Liang, Karin N. Johnson, L. Andrew Ball, Tianvey Lin, Mark Yeager and John E. Johnson. The structure of Pariacoto virus reveals a dodecahedral cage of duplex RNA // Nature, Structural biology, 1, 2001. – 77.

Стаття надійшла до редакції 20.02.2012

I.I. Nebola, V.Y. Kindrat

Uzhhorod National University, 54 Voloshin Str., 88000, Uzhhorod, Ukraine

FRACTAL STRUCTURES WITH ELEMENTS OF SYMMETRY OF THE FIFTH ORDER, GRASPING MICROWAVE RADIATION

The description of a structure and properties of photon crystals on a basis 3-D fractals with elements of symmetry of the fifth order is spent. Value by Hausdorfs dimension two-dimensional a type fractal «Durer's carpet» is received and calculated its area, corners of crossing of cavities of a three-dimensional fractal of type «Durer's sponge» that allows to use the form of such structure for manufacturing photonic crystal - analog of a photonic crystal of E. Jablonovich are defined.

Key words: a fractal, a photon crystal, a superlattice, the optical filter.

И.И. Небола, В.Я. Киндрат

Ужгородский национальный университет, 88000, Ужгород, ул. А. Волошина, 54

ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ СИММЕТРИИ ПЯТОГО ПОРЯДКА, ЗАХВАТЫВАЮЩИЕ МИКРОВОЛНОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Проведено описание строения и свойств фотонных кристаллов на основе 3-D фракталов с элементами симметрии пятого порядка. Получено значение Хаусдорфовой размерности двухмерного фрактала типа «ковёр Дюрера» и вычислено его площадь, определены углы пересечения осей, проходящих через центры полостей трехмерного фрактала типа «губка Дюрера», что позволяет использовать форму такой структуры для изготовления фотонного кристалла - аналога фотонного кристалла Э. Яблоновича.

Ключевые слова: фрактал, фотонный кристалл, сверхрешетка, оптический фильтр.